LERNUMGEBUNG

Thema: Lineare Abhängigkeit/Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
Zeit: 2 Unterrichtsstunden

Aufgabe

- Erklären Sie die Begriffe „lineare Abhängigkeit“ und „lineare Unabhängigkeit“ von Vektoren.
- Klären Sie die Begriffe „kollinear“ und „komplanar“.
- Erarbeiten Sie eine Rechenroutine, mit der Sie Vektoren auf diese Eigenschaften überprüfen können.

Materialien (siehe Lesezeichen)

- Theorie
- Gelöste Beispielaufgaben

Übungsaufgaben (siehe Lesezeichen)

- Aufgabensammlung zur Übung

weiterführende Materialien (Internetlinks)

- Lineare Abhängigkeit
- Erläuterung aller Begriffe
- Onlinekurs Vektorrechnung

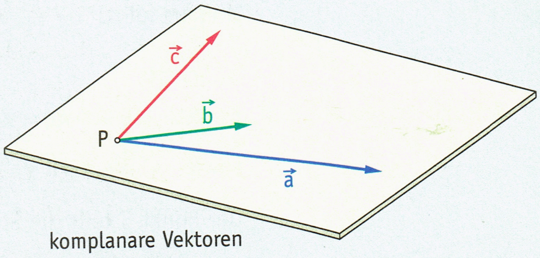
Lernumgebung	Thema: Lineare Abhängigkeit/Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	**THEORIE**

(1) Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Um Sachverhalte wie bei der Lösung von Aufgabe 1 einfacher beschreiben zu können, führt man folgende Begriffe ein:

Sind die Pfeile zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander parallel, so ist Vektor $\vec{b}$ ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ (oder auch eine Linearkombination von $\vec{a}$). Die beiden Vektoren heißen in diesem Fall voneinander **linear abhängig**.

Lässt sich bei drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mindestens einer der drei Vektoren als Linearkombination der beiden anderen Vektoren darstellen, so sagt man ebenfalls, die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind voneinander **linear abhängig**. Die Pfeile dieser drei Vektoren liegen dann in einer Ebene, wenn man sie in einem gemeinsamen Punkt anträgt.



komplanare Vektoren

Definition 6

(1) Vektoren heißen **voneinander linear abhängig**, falls wenigstens einer dieser Vektoren eine Linearkombination der übrigen Vektoren ist.

(2) Vektoren heißen **voneinander linear unabhängig**, falls keiner der Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist.

Sind *zwei* Vektoren voneinander linear abhängig, bezeichnet man sie auch als zueinander **kollinear**.

Sind *drei* Vektoren voneinander linear abhängig, bezeichnet man sie auch als zueinander **komplanar**.

Beispiel

Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$ sind voneinander linear abhängig, da sich z. B. $\vec{w}$ in der Form $\vec{w} = 3\cdot\vec{u} - 5\cdot\vec{v}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ schreiben lässt.

3 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

3.1 Linearkombination

3.1.1 Wiederholung der Definition

Ein Vektor $\vec{v}$ der Form $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots; \vec{a}_n$.

3.1.2 Aufgaben

1. Untersuchen Sie, ob sich $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -74 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 34 \\ -11 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -74 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 34 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
(1) & 8 = 2\cdot\lambda + 2\cdot\mu \\
(2) & -74 = 4\cdot\lambda + 34\cdot\mu \\
(3) & -2 = -5\cdot\lambda - 11\cdot\mu \\
(1) & 2\cdot\lambda = 8 - 2\cdot\mu \\
 & \lambda = 4 - \mu \\
(2) & -74 = 4\cdot(4-\mu) + 34\cdot\mu \\
 & -74 = 16 - 4\cdot\mu + 34\cdot\mu \\
 & -90 = 30\cdot\mu \\
 & \mu = -3 \\
(1) & \lambda = 4 + 3 \\
 & \lambda = 7 \\
(3) & -2 = -5\cdot 7 - 11\cdot(-3) \\
 & -2 = -35 + 33 \\
 & -2 = -2 \quad \text{(wahre Aussage)}
\end{array}$$

Antwort: $\vec{c} = 7\cdot\vec{a} - 3\cdot\vec{b}$

2. Untersuchen Sie, ob sich $\vec{c} = \begin{pmatrix} 21 \\ -23 \\ 99 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 21 \\ -23 \\ 99 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) $21 = 2 \cdot \lambda - \mu$
(2) $-23 = -\lambda + 3 \cdot \mu$
(3) $99 = 19 \cdot \lambda + 6 \cdot \mu$
(1) $\mu = 2 \cdot \lambda - 21$
(2) $-23 = -\lambda + 6 \cdot \lambda - 63$
$40 = 5 \cdot \lambda$
$\lambda = 8$
(1) $\mu = 2 \cdot 8 - 21$
$\mu = -5$
(3) $99 = 19 \cdot 8 + 6 \cdot (-5)$
$99 = 122$ (falsche Aussage)
$-2 = -35 + 33$
$-2 = -2$ (wahre Aussage)

Antwort: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 21 \\ -23 \\ 99 \end{pmatrix}$ lässt sich nicht als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ darstellen.

3. Untersuchen Sie, ob sich $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

Antwort: $\vec{z} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{w}$

4. Untersuchen Sie, ob sich $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

3.2 Kollinearität zweier Vektoren

3.2.1 Aufgabe

Es ist zu untersuchen, ob sich $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4{,}5 \\ -15 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

$$\vec{b} = \sigma \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4{,}5 \\ -15 \end{pmatrix} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(1) $-3 = 2 \cdot \sigma$

$\sigma = -\frac{3}{2}$

(2) $4{,}5 = -\frac{3}{2} \cdot (-3)$

$4{,}5 = 4{,}5$ (wahre Aussage)

(3) $-15 = -\frac{3}{2} \cdot 10$

$-15 = -15$ (wahre Aussage)

$$\vec{b} = -\frac{3}{2} \cdot \vec{a}$$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel. Parallele Vektoren bezeichnet man auch als kollinear oder linear abhängig.

Folgerung:

$$\vec{b} = -\frac{3}{2} \cdot \vec{a}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot\vec{b} = -3\cdot\vec{a} \\ 3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}=\vec{0} \\ 6\cdot\vec{a}+4\cdot\vec{b}=\vec{0} \\ \text{usw.} \end{array}\right\} \quad \text{nicht-triviale Nullsummen}$$

Aber auch:

$0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}=\vec{0}$ triviale Nullsumme

3.2.2 Definition der linearen Unabhängigkeit zweier Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{b}=\vec{0}$ nur für $\lambda=\mu=0$ erfüllt ist. Anderenfalls nennt man die beiden Vektoren linear abhängig, kollinear oder parallel.

3.2.3 Übung 1

Es ist die Kollinearität der Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}12\\-14\\8\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}30\\-35\\20\end{pmatrix}$ zu untersuchen.

$$\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{b}=\vec{0}$$

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}12\\-14\\8\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}30\\-35\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(1) $12\lambda+30\mu=0$
(2) $-14\lambda-35\mu=0$
(3) $8\lambda+20\mu=0$
$20\mu=-8\lambda$
$\mu=-0{,}4\lambda$
(1) $12\lambda-12\lambda=0$
$0\cdot\lambda=0$ (wahre Aussage)
(2) $-14\lambda+14\lambda=0$
$0\cdot\lambda=0$ (wahre Aussage)

λ ist beliebig, also insbesondere $\lambda\neq 0$ wählbar. Somit sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, also linear abhängig.

3.2.4 Übung 2

Es ist die Kollinearität der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4{,}5 \\ 20 \end{pmatrix}$ zu untersuchen.

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4{,}5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $2\lambda - 3\mu = 0$
(2) $-3\lambda + 4{,}5\mu = 0$
(3) $10\lambda + 20\mu = 0$
$10\lambda = -20\mu$
$\lambda = -2\mu$
(1) $-4\mu - 3\mu = 0$
$-7 \cdot \mu = 0$
$\mu = 0$
(3) $\lambda = -2 \cdot 0$
$\lambda = 0$
(2) $-3 \cdot 0 + 4{,}5 \cdot 0 = 0$ (wahre Aussage)

Es gibt keine nicht-triviale Nullsumme. Somit sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear, also linear unabhängig.

3.3 Komplanarität dreier Vektoren

3.3.1 Aufgabe

Es ist zu untersuchen, ob sich $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -11 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

$$\vec{c} = \sigma \cdot \vec{a} + \tau \cdot \vec{b}$$

$$\vec{c} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$$

Damit liegen die drei Vektoren in einer Ebene. Solche drei Vektoren bezeichnet man auch als komplanar oder linear abhängig.

Folgerung:

$$\vec{c} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6 \cdot \vec{c} = 2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} \\ 2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} - 6 \cdot \vec{c} = \vec{0} \\ 8 \cdot \vec{a} - 12 \cdot \vec{b} - 24 \cdot \vec{c} = \vec{0} \\ \text{usw.} \end{array}\right\} \quad \text{nicht-triviale Nullsummen}$$

Aber auch:

$$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0} \qquad \text{triviale Nullsumme}$$

3.3.2 Definition

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}$ nur für $\lambda = \mu = \nu = 0$ erfüllt ist. Anderenfalls nennt man die drei in einer Ebene liegenden Vektoren linear abhängig oder komplanar.

3.3.3 Übung 1

Es ist die Komplanarität der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -11 \end{pmatrix}$ zu untersuchen.

3.3.4 Übung 2

Es ist die Komplanarität der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$ zu untersuchen.

Es gibt keine nichttriviale Nullsumme.

Aber es gilt: $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$ (triviale Nullsumme)

3.4 Verallgemeinerte Definition der linearen Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt ist. Anderenfalls nennt man die Vektoren linear abhängig.

3.5 Aufgaben und Übungen

3.5.1 Aufgabe 1

Die gegebenen Vektoren sind auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{O}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $-2\lambda - 5\mu + \nu = 0$
(2) $\lambda + 4\mu - 2\nu = 0$
(3) $3\lambda + \mu + 5\nu = 0$
(1) $\nu = 2\lambda + 5\mu$
(2) $\lambda + 4\mu - 2 \cdot (2\lambda + 5\mu) = 0$
$\lambda + 4\mu - 4\lambda - 10\mu = 0$
$-3\lambda - 6\mu = 0$
$-3\lambda = 6\mu$
$\lambda = -2\mu$
(1) $\nu = 2 \cdot (-2\mu) + 5\mu$
$\nu = -4\mu + 5\mu$
$\nu = \mu$
(3) $3 \cdot (-2\mu) + \mu + 5\mu = 0$
$-6\mu + \mu + 5\mu = 0$
$0 \cdot \mu = 0$
$\mu \in \mathbb{R}$ beliebig

Die Vektoren sind linear abhängig und damit komplanar.

3.5.2 Aufgabe 2

Die gegebenen Vektoren sind auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{O}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\lambda + 2\mu + 4\nu = 0$

(2) $-3\lambda - \mu + 3\nu = 0$

(3) $2\lambda + \mu - \nu = 0$

$\nu = 2\lambda + \mu$

(1) $\lambda + 2\mu + 4 \cdot (2\lambda + \mu) = 0$

$\lambda + 2\mu + 8\lambda + 4\mu = 0$

$9\lambda + 6\mu = 0$

$6\mu = -9\lambda$

$\mu = -\frac{3}{2}\lambda$

(3) $\nu = 2\lambda - \frac{3}{2}\lambda$

$\nu = \frac{1}{2}\lambda$

(2) $-3\lambda + \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\lambda = 0$

$0 \cdot \lambda = 0$

$\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig

Die Vektoren sind linear abhängig und damit komplanar.

3.5.3 Aufgabe 3

Die gegebenen Vektoren sind auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{O}$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $4\lambda - 7\mu + 3\nu = 0$
(2) $-2\lambda + 5\nu = 0$
(3) $3\lambda + 2\mu - 6\nu = 0$
(2) $2\lambda = 5\nu$
$\lambda = \frac{5}{2}\nu$
(1) $4 \cdot \frac{5}{2}\nu - 7\mu + 3\nu = 0$
$10\nu - 7\mu + 3\nu = 0$
$13\nu - 7\mu = 0$
$7\mu = 13\nu$
$\mu = \frac{13}{7}\nu$
(3) $3 \cdot \frac{5}{2}\nu + 2 \cdot \frac{13}{7}\nu - 6\nu = 0$
$\frac{73}{14}\nu = 0$
$\nu = 0$
(1) $\mu = 0$
(2) $\lambda = 0$

Die Vektoren sind linear unabhängig.

Lernumgebung	Thema: Lineare Abhängigkeit/Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	**Übungsaufgaben**

5 Überprüfen Sie, ob die Vektoren voneinander linear abhängig oder unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ -11 \end{pmatrix}$

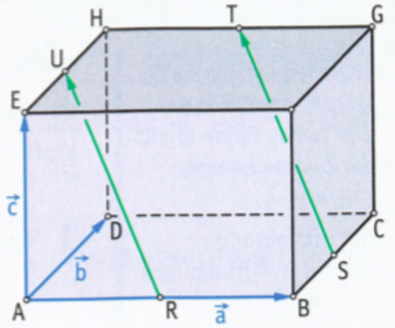
6 Untersuchen Sie, ob es Werte für den Parameter t gibt, sodass die drei Vektoren voneinander linear abhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 10 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ t+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ t+3 \end{pmatrix}$

12 Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ spannen einen Quader auf. Die Punkte R, S, T und U sind Kantenmitten des gezeichneten Quaders.

a) Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{RU}$ und $\overrightarrow{ST}$ jeweils als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

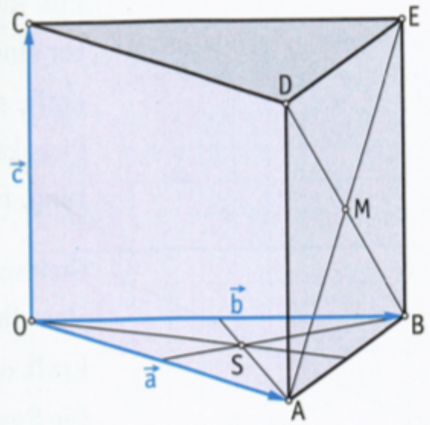
b) Untersuchen Sie, ob die beiden Vektoren $\overrightarrow{RU}$ und $\overrightarrow{ST}$ linear abhängig sind.



9 Die drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ spannen ein dreiseitiges Prisma auf. Dabei ist S der Schwerpunkt des Dreiecks OAB und M der Schnittpunkt der Diagonalen in der Seitenfläche ABED.

a) Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OM}$ und $\overrightarrow{SM}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

b) Wo liegt der Punkt P, für den $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$ gilt?



Lernumgebung	Thema: Lineare Abhängigkeit/Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	***Übungsaufgaben Lösungen***

5. **a)** linear unabhängig
b) linear unabhängig
c) linear unabhängig
d) linear unabhängig
e) linear abhängig

6. **a)** Für t = 8 linear abhängig.
b) Für t = 0 oder t = 3 linear abhängig.
c) Für alle $t \in \mathbb{R}$ linear abhängig.

12. **a)** $\overrightarrow{RU} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{ST} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

b) Sie sind linear abhängig, denn $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$ bzw. $\vec{0} = \overrightarrow{RU} - \overrightarrow{ST}$.

9. **a)** $\overrightarrow{EO} = -\vec{b} - \vec{c}$; $\overrightarrow{DB} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OM}$

Aus S. 195 Nr. 3 ist bekannt $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, wobei O und C hier zusammenfallen.

$\Rightarrow \overrightarrow{SM} = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

b) P ist der Mittelpunkt von $\overline{DE}$.