Aufgabenvorschläge für das Proseminar zur

Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Kapitel I. Maßtheorie

zu §1. Maße und σ-Algebren

1 Sei Ω eine Menge. Zeige:

(a) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, dann gilt $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

(b) Ist $A \subseteq \Omega$ und $\mathcal{G} = \{A\}$, dann gilt $\sigma(\mathcal{G}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

2 Sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$, für welche A oder A^c (höchstens) abzählbar ist (vgl. VO Beisp.1.3(2)). Zeige, dass das System $\mathcal{E}$ aller endlichen Teilmengen von Ω ein Erzeuger für $\mathcal{A}$ ist, d.h. dass $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ gilt.

3 [Zählmaß, vgl. VO Beisp.1.8(2)] Sei Ω eine Menge und definiere $\zeta\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ durch

$$\zeta(A) = \begin{cases} \infty & A \text{ nicht endlich,} \\ \operatorname{card}(A) & A \text{ endlich,} \end{cases} \qquad (A \subseteq \Omega).$$

Zeige, dass ζ ein Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ist.

4 Sei Ω eine *überabzählbare* Menge und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$, für welche A oder A^c (höchstens) abzählbar ist. Definiere $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ abzählbar,} \\ 1 & A^c \text{ abzählbar,} \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Zeige, dass μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

zu §2. Äußere Maße

5 [Äußeres Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, vgl. VO Bem.2.3] Für (achsenparallele) Quader im $\mathbb{R}^n$ von der Form $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ (mit $a_j \leq b_j$, $j = 1, \ldots, n$) setzen wir wie üblich

$$\operatorname{Vol}(Q) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Weiters definieren wir die Abbildung $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ durch

$$\lambda^*(A) := \inf\{\sum_{Q\in\mathcal{U}} \mathrm{Vol}(Q) \mid \mathcal{U} \text{ ist endliche oder abzählbare Überdeckung von } A \text{ durch Quader}\}.$$

Zeige, dass λ^* ein äußeres Maß ist.

(Anleitung für den Beweis der σ-Subadditivität von λ^*: Sei $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$; falls für ein $n \in \mathbb{N}$ schon $\lambda^*(A_n) = \infty$ gilt, ist nichts mehr zu zeigen; sei also $\lambda^*(A_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig; dann exisitiert zu jedem n eine Überdeckung $(Q_l^n)_{l\in\mathbb{N}}$ von A_n durch Quader mit $\sum_{l=1}^\infty \mathrm{Vol}(Q_l^n) < \lambda^*(A_n) + \varepsilon/2^{n+1}$.)

6 Es sei λ^* wie in der vorigen Aufgabe. Für jede *beschränkte* Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir ein sogenanntes inneres Maß durch

$$\lambda_*(A) := \mathrm{Vol}(Q) - \lambda^*(Q \setminus A),$$

wobei Q ein beliebiger Quader mit $Q \supseteq A$ ist. Zeige:

(a) Der Wert $\lambda_*(A)$ ist unabhängig von der Wahl von Q.

(b) Die λ^*-Messbarkeit einer beschränkten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist äquivalent zur Bedingung

$$\lambda^*(A) = \lambda_*(A).$$

7 Sei $\Omega = \{1,2,3\}$ und $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ gegeben durch

$$\mu^*(\emptyset) := 0, \quad \mu^*(\Omega) := 2 \quad \text{und} \quad \mu^*(B) := 1 \text{ für } B \subseteq \Omega \text{ mit } 0 < \mathrm{card}(B) < 3.$$

Zeige, dass μ^* ein äußeres Maß ist, sodass für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ die Gleichung

$$\mu^*(\Omega) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$$

gilt und dennoch die trivialen Teilmengen $\emptyset$ und Ω die einzigen μ^*-messbaren Mengen sind.

zu §3. Inhalte und Ringe

8 Sei Ω eine Menge. Wir statten $\mathcal{P}(\Omega)$ mit der symmetrischen Mengendifferenz $\triangle$ als „Addition“ und dem Mengendurchschnitt $\cap$ als „Multiplikation“ aus. Zeige:

(a) $(\mathcal{P}(\Omega), \triangle, \cap)$ ist ein kommutativer Ring mit Nullelement $\emptyset$ und Einselement Ω.

(b) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann ein Ring im Sinne der Definition 3.1 aus der VO, wenn $\mathcal{R}$ ein Unterring des Ringes $(\mathcal{P}(\Omega), \triangle, \cap)$ gemäß (a) ist.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Sei Ω eine *abzählbar-unendliche* Menge und $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ bestehe aus jenen Teilmengen $A \subseteq \Omega$, für welche A oder A^c endlich ist.

(a) Zeige: $\mathcal{R}$ ist ein Ring, aber keine σ-Algebra.

(b) Definiere $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ endlich,} \\ 1 & A^c \text{ endlich,} \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{R}).$$

Zeige: μ ist ein Inhalt auf $\mathcal{R}$, aber kein Prämaß.

zu §4. Wann ist ein Inhalt ein Maß?

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sei Ω eine *abzählbar-unendliche* Menge und der Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ bestehe (wie in Aufgabe $\boxed{9}$) aus jenen Teilmengen $A \subseteq \Omega$, für welche A oder A^c endlich ist.

Definiere $\nu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ durch $\nu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ endlich,} \\ \infty & A^c \text{ endlich,} \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{R}).$

(a) Zeige, dass ν ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist, der die folgende Bedingung aus Proposition 4.1 der VO erfüllt: für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ gilt $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = 0$.

(b) Zeige, dass ν kein Prämaß ist. Widerspricht das dem oben genannten Satz aus der VO?

zu §5, §6 und §7. Maße auf $\mathbb{R}$, Maße auf $\mathbb{R}^n$ und Borel-σ-Algebren

$\boxed{\mathbf{11}}$ Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion.
Zeige (evtl. unter Zuhilfenahme eines Lehrbuches der Analysis):

(a) F besitzt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ einen linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert.

(b) Die Menge der Unstetigkeitsstellen von F ist (höchstens) abzählbar und besteht gänzlich aus Sprungstellen.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Sei $\mathbb{R}$ der von den halboffenen Intervallen der Form $]a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ erzeugte Ring (vgl. VO 3.3(3) und Anfang von §5). Weiters sei ein Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ gegeben. Definiere die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \begin{cases} \mu(]0,x]) & x \geq 0, \\ -\mu(]x,0]) & x < 0. \end{cases}$$

und zeige folgende Aussagen:

(a) F ist monoton wachsend.

(b) Ist μ sogar ein Prämaß, so ist F auch rechtsseitig stetig und daher eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$.

(c) Sei nun μ ein Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{R}$ und die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie oben definiert. Zeige: für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\{x\} \in \mathcal{B}$ und weiters

$$F \text{ ist stetig in } x \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\{x\}) = 0.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Sei λ das[1] Lebesgue-(Borel-)Maß auf $\mathbb{R}^n$. Zeige:

(a) Für beliebige $a_l < b_l$ $(l = 1, \ldots, n)$ sind $\prod_{l=1}^{n}]a_l, b_l[$, $\prod_{l=1}^{n} [a_l, b_l]$ Borelmengen und es gilt

$$\lambda(\prod_{l=1}^{n}]a_l, b_l[) = \lambda(\prod_{l=1}^{n}]a_l, b_l]) = \lambda(\prod_{l=1}^{n} [a_l, b_l]).$$

(b) Die affine Hyperebene der Form $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = \alpha\}$, wobei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und fest sind, ist eine Borelmenge und es gilt $\lambda(H) = 0$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Seien f und g Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass $(x, y) \mapsto f(x) \cdot g(y)$ eine Verteilungsfunktion F auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

(b) Bezeichne μ_f bzw. μ_g das aus f bzw. g konstruierte Maß auf $\mathbb{R}$ und μ_F das zu F gehörige Maß auf $\mathbb{R}^2$ (wiederum die Eindeutigkeit gemäß §8 schon vorwegnehmend), dann gilt

$$\mu_F(]a, b] \times]c, d]) = \mu_f(]a, b]) \cdot \mu_g(]c, d]).$$

zu §8. Eindeutigkeit von Maßen

gibt es keine Vorschläge für Aufgaben ...

[1] Wir nehmen mit dieser Sprechweise schon die in §8 zu beweisende Eindeutigkeit vorweg.

Kapitel II. Integrationstheorie

zu §9. Messbare Funktionen

$\boxed{\textbf{15}}$ (Rechnen mit Indikatorfunktionen) Seien Ω und I Mengen und $A, B \subseteq \Omega$ sowie $A_i \subseteq \Omega$ für $i \in I$. Zeige folgende Eigenschaften der entsprechenden charakteristischen Funktionen:

(a) $A \subseteq B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$

(b) $A \cap B = \emptyset \iff \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ (insbesondere gilt $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$)

(c) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$

(d) Für $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ ist $\mathbb{1}_A = \sup\limits_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}$ (punktweise Gleichheit)

(Bem.: analog ist $\mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \inf_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}$)

$\boxed{\textbf{16}}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Zeige, dass die Menge $\{\omega \in \Omega \mid (F_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$ zu $\mathcal{A}$ gehört.

$\boxed{\textbf{17}}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Zeige:

(a) f ist messbar $\iff$ f^+ **und** f^- sind messbar

(b) f ist messbar $\implies$ $|f|$ ist messbar, ABER die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht!

zu §10. Integral im Stile von Lebesgue

$\boxed{\textbf{18}}$ Betrachte den Borel-Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, wobei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra und λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Ist die Dirichletfunktion $u = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ eine Elementarfunktion? Falls ja, was ist dann der Wert des Integrals $\int u \, d\lambda$?

$\boxed{\textbf{19}}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{M}^+$ die Menge der nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen darauf. Zeige, dass jede *beschränkte* Funktion aus $\mathcal{M}^+$ sogar gleichmäßiger Limes einer monoton wachsenden Folge von Elementarfunktionen ist.

$\boxed{\textbf{20}}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{A}$. Ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ in jedem Fall integrierbar?

$\boxed{\textbf{21}}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit endlichem Maß, d.h. $\mu(\Omega) < \infty$. Zeige, dass dann jede konstante reellwertige Funktion μ-integrierbar ist. Desweiteren ist in diesem Fall auch jede beschränkte, messbare, reellwertige Funktion integrierbar.

$\boxed{\textbf{22}}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und μ und ν zwei Maße auf $\mathcal{A}$. Zeige:

(a) $\mu + \nu$ definiert ein Maß auf $\mathcal{A}$

(b) $\mathcal{L}(\mu + \nu) = \mathcal{L}(\mu) \cap \mathcal{L}(\nu)$

(c) für $f \in \mathcal{L}(\mu + \nu)$ gilt $\displaystyle\int f \, d(\mu + \nu) = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu$.

zu §11. Bildmaße

$\boxed{\mathbf{23}}$ Wir betrachten wieder den Borel-Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$.

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Translation $T_a(x) := x + a$. Zeige, dass T_a messbar ist und für das Bildmaß von λ unter T_a gilt $\lambda_{T_a} = \lambda$, d.h. λ ist translationsinvariant.

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$ und $t > 0$. Berechne das Bildmaß von λ unter der Dehnung/Streckung $D_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto tx$.

zu §12. Nullmengen

$\boxed{\mathbf{24}}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für eine Funktion f in $\mathcal{M}^+$ oder $\mathcal{L}$ und $A \in \mathcal{A}$ setzen wir

$$\int_A f \, d\mu := \int \mathbb{1}_A f \, d\mu.$$

Zeige, dass für eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ stets $\int_N f \, d\mu = 0$ gilt.

$\boxed{\mathbf{25}}$ Beweise oder widerlege folgende Aussagen bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$:

(a) Für $a < b$ ist $\mathbb{1}_{[a,b] \cup \mathbb{Q}} = \mathbb{1}_{]a,b[}$ fast überall.

(b) Jede monotone Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist fast überall stetig.

(c) Die Dirichletfunktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ist fast überall stetig.

(d) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ teilerfremd}, \\ 0 & x = 0 \text{ oder } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist fast überall stetig.

zu §13. Konvergenzsätze

26 Wir betrachten wieder den Borel-Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Finde Beispiele für drei Folgen (f_n), (g_n) und (h_n) integrierbarer Funktionen, die allesamt fast überall gegen 0 konvergieren, aber

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = +\infty$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda = 1$,

(c) $\liminf\limits_{n\to\infty} \int h_n \, d\lambda = -1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} \int h_n \, d\lambda = 1$ erfüllen.

27 Seien $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ der Borel-Lebesgue-Maßraum, $h_n(x) := n \sin(\cos(x)/n)$ (für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$) und f eine integrierbare Funktion. Existiert $\lim_{n\to\infty} \int h_n f \, d\lambda$? Wenn ja, was ist der Grenzwert? (Hinweis: $|\sin(y)| \leq |y|$ und $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = \ldots$?)

zu §14. Das Riemann-Integral in der Lebesgue-Theorie

28 Welche der Funktionen aus Aufgabe $\boxed{25}$ sind auf dem Intervall $[0, 1]$ R-integrierbar?

29 Sei $f\colon [1, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$. Zeige:

(a) f ist uneigentlich R-integrierbar (Hinweis: Cauchy-Kriterium und partielle Integration)

(b) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := 0$ $(x < 1)$ und $g(x) := f(x)$ $(x \geq 1)$, ist nicht Lebesgue-integrierbar.

zu §15. Vervollständigung eines Maßraumes

30 Der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei *vollständig*, d.h. jede Teilmenge einer Nullmenge gehört ebenfalls zu $\mathcal{A}$. Zeige: Sind f und g numerische Funktionen $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f = g$ fast überall, dann impliziert die Messbarkeit von f auch jene von g.

zu §16. Die Banachräume $\mathrm{L}^p(\mu)$

31 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei weiters $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}^p$ und $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und fast überall beschränkt. Zeige, dass dann auch $g \cdot f$ zu $\mathcal{L}^p$ gehört.

32 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit **endlichem** Maß (d.h. $\mu(\Omega) < \infty$) und $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeige: $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$. Insbesondere gilt also $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^1$ für jedes $p \geq 1$.

$\boxed{\mathbf{33}}$ Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ der Borel-Lebesgue-Maßraum. Gilt dann eine der Inklusionen $\mathcal{L}^1(\lambda) \subseteq \mathcal{L}^2(\lambda)$ oder $\mathcal{L}^2(\lambda) \subseteq \mathcal{L}^1(\lambda)$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

$\boxed{\mathbf{34}}$ Finde ein Beispiel für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Cauchyfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$, die aber nicht fast überall punktweise konvergent ist. Wie veträgt sich das mit Theorem 16.9 der VO?

zu §17. Regularität von Borel-Maßen auf metrischen Räumen

gibt es keine Vorschläge für Aufgaben.

Kapitel III. Grundkonstruktionen mit Maßen

zu §18. Signierte Maße und Hahn-Zerlegung

35 Zeige: Jedes signierte Maß ist beschränkt und nimmt ein Maximum und ein Minimum an. (Hinweis: Beweis von Kor.18.6 der VO und Hahn-Zerlegung.)

36 Seien $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ sowie $\Omega = \tilde{\Omega}^+ \cup \tilde{\Omega}^-$ zwei Hahn-Zerlegungen für das signierte Maß ρ auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$. (Soll heißen: beide Zerlegungen erfüllen (a) und (b) aus 18.5 der VO.) Zeige, dass $\Omega^+ \setminus \tilde{\Omega}^+$ und $\Omega^- \setminus \tilde{\Omega}^-$ jeweils ρ-Nullmengen sind.

zu §19. Maße mit Dichten

37 Zeige, dass das Dirac-Maß δ_0 auf $\mathbb{R}$ keine Dichte bezüglich des (Borel-)Lebesgue-Maßes λ besitzen kann, d.h. es gibt keine Borel-messbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ mit der Eigenschaft

$$\delta_0(A) = \int f \mathbb{1}_A \, d\lambda \qquad (A \in \mathcal{B}).$$

38 Sei F eine stetig differenzierbare Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ und μ das zugehörige Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$. Zeige, dass μ die Dichte F' bezüglich λ (Lebesgue-Maß) besitzt.

zu §20 und §21. Produktmaße, mehrfache Integrale

39 Sei $a < b$. Für eine Funktion $f\colon [a,b] \to [0,\infty[$ bezeichne $G(f) := \{\ (x,y) \mid a \leq x \leq b, y = f(x)\}$ den Graphen und $O(f) := \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ die Ordinatenmenge von f, aufgefasst jeweils als Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Es bezeichne $\mathcal{B}_d$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ und λ_d das Borel-Lebesgue-Maß (gegebenenfalls eingeschränkt auf entsprechende Intervalle bzw. Quader). Zeige:

(a) f ist Borel-messbar $\iff$ $O(f) \in \mathcal{B}_2$
(Hinweis: für '$\Rightarrow$' betrachte $g(x,y) := f(x) - y$, $g\colon [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; für '$\Leftarrow$' denke an Schnitte.)

(b) Ist f Borel-messbar, dann gilt die „aus der Schule bekannte Formel“

$$\lambda_2(O(f)) = \int f \, d\lambda_1.$$

(c) Ist f Borel-messbar, dann folgt[2] $G(f) \in \mathcal{B}_2$ und $\lambda_2(G(f)) = 0$.

[2] Die Umkehrung davon gilt auch, d.h. $G(f) \in \mathcal{B}_2$ impliziert, dass f Borel-messbar ist. Eine Referenz dazu ist J. J. Buckley, The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 10 (Dec., 1974), pp. 1125-1126.

Literatur

[Els05] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2005. Grundwissen Mathematik. [Basic Knowledge in Mathematics].