§4 FOURIER-REIHEN

4.1. INTRO (Was sind & was sollen FR)

Das Grundthema der letzten beiden § war die Approximation glatter Fkt durch Polynome. Man könnte auch sagen: die Approximation schöner Fkt durch einfache Bausteine.

Hier befassen wir uns mit einem ähnlichen Thema: die Approximation periodischer Fkt (offizielle Def unten) durch Grund- und Oberschwingungen, die durch Sinus- und Cosinusfkt gegeben sind.

Dieses auch Fourier-Analysis genannte Gebiet hat große Relevanz in vielen Anwendungsgebieten von Physik und Elektrotechnik bis zu Bild- & Signalverarbeitung in Musik, Medizin und Mobilkommunikation. Immer geht es darum, periodische Signale in einfache Grundbausteine zu zerlegen bzw. ein periodisches Signal durch einfache Grundsignale anzunähern und dabei nur einen vertretbaren Fehler zu machen.

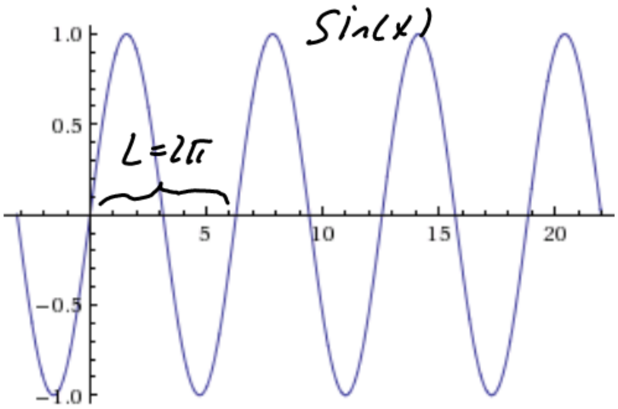
Die abstrakte Weiterentwicklung der FA findet im Rahmen der Funktionalanalysis statt und wird harmonische Analysis oder Zeit-Frequenz Analysis genannt. Wir können hier nur einen kleinen Einstieg geben.

4.2 DEF (periodische Fkt) Sei $L>0$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Die Fkt f heißt periodisch mit Periode(nlänge) L, falls

$$f(x+L)=f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

4.3 BEOBACHTUNG (periodische Fkt)

(i) Eine periodische Fkt „wiederholt" sich also nach der Periodenlänge L. Erzbeispiele sind die 2π-periodischen Fkt sin & cos



(ii) Induktiv folgt $\forall k\in\mathbb{Z}$ $f(x+kL)=f(x)$ und daher ist f bereits festgelegt, falls f auf einem Intervall der Form $[x_0,x_0+L]$ bekannt ist ($x_0\in\mathbb{R}$ beliebig)

(iii) Es gilt für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ und $L>0$

$$f \text{ ist } L\text{-periodisch} \iff F(x)=f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}$$

denn
$$F(x+2\pi)=f\left(\frac{L}{2\pi}(x+2\pi)\right)=f\left(\frac{L}{2\pi}x+L\right)=f\left(\frac{L}{2\pi}x\right)=F(x)$$

bzw

$$f(x+L)=F\left(\frac{2\pi}{L}(x+L)\right)=F\left(\frac{2\pi}{L}x+2\pi\right)=F\left(\frac{2\pi}{L}x\right)=f(x).$$

Daher genügt es also 2π-periodische Fkt zu studieren.

4.4 Bsp (2π-periodische Fkt)

$\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind 2π-periodisch [[2] 3.30 (i)]

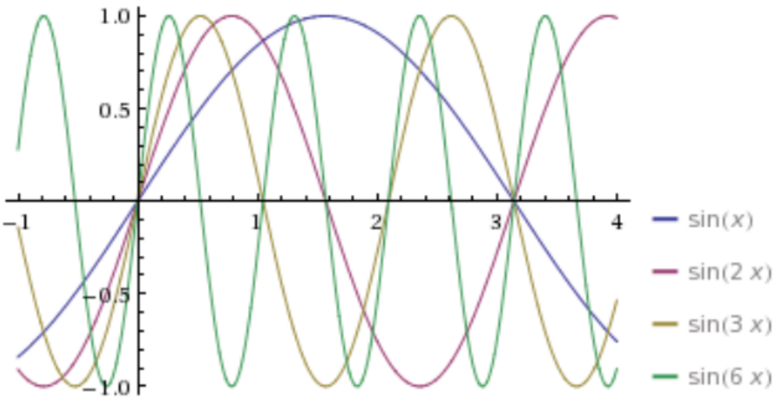
ebenso $x \mapsto e^{ix} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ [[2] 3.17].

Sei $k \in \mathbb{Z}$ dann sind die Fkt

$$x \mapsto \sin(kx),\quad x \mapsto \cos(kx),\quad x \mapsto e_k(x) := e^{ikx} \qquad (*)$$

ebenfalls 2π-periodisch

[sie sind natürlich auch $2\pi/k$-periodisch aber das tut nichts zur Sache]



Die Fkt in $(*)$ sind die Grundbausteine der FA. Zunächst „basteln" wir „Polynome" aus ihnen:

$\sin(2x)$ „schwingt doppelt so schnell" wie $\sin(x)$.

4.5 DEF (Trigonometrische Polynome)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ und b_k $(k = 1, \ldots, n) \in \mathbb{R}$.

Dann heißt $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$p_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

1/2 ist eine bequeme Konvention

trigonometrisches Polynom der Ordnung n.

4.6 Motivation (Trig. Polynome & ihre Koeffizienten)

Die Koeffizienten a_k, b_k eines trig. Polynoms p_n können aus p_n zurückgewonnen werden – und zwar durch

Integration. Um dies explizit durchführen zu können müssen wir einige Grundintegrale berechnen

4.7 Lemma (Die Integrale $\cos(kx)\sin(\ell x)$) Es gilt

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(kx)\sin(\ell x)\,dx=0 \quad \forall k,\ell\in\mathbb{N}$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(\ell x)\,dx=0 \quad \forall k\neq\ell\in\mathbb{N}$

(iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2(kx)\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^2(kx)\,dx=\pi \quad \forall k\geq 1$

Beweis. [partielle Integration, 2π-Periodizität $\rightsquigarrow$ UE] $\square$

4.8 Prop (Koeffizienten trig Polynome)
Sei $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\big)$ ein trig. Polynom. Dann gilt

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(kx)\,dx \quad \text{für } k=0,1,\dots,n$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(kx)\,dx \quad \text{für } k=1,2,\dots,n$$

Beweis. [einfache Rechnung unter Verwendung von 4.7]

$$\int_0^{2\pi}\underbrace{f(x)\sin(kx)}\,dx=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{a_0}{2}+\sum_{\ell=1}^{n}\big(a_\ell\cos(\ell x)+b_\ell\sin(\ell x)\big)\Big)\sin(kx)\,dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin(kx)\,dx+\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell\int_0^{2\pi}\cos(\ell x)\sin(kx)\,dx$$

$$+\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin(\ell x)\sin(kx)\,dx}_{\neq 0 \text{ nur falls } k=\ell}$$

$$\overset{4.7}{=}0+0+\underline{b_k\pi}$$

Analog für a_k $\square$

4.8 BEM (Komplexwertige trig. Polynome)

Oft ist es zweckmäßig komplexwertige trig. Polynome zu betrachten. Darunter versteht man Fkt $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Form

$$\left\{ q_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \right\} \quad (*)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}$ $(-n \le k \le n)$.

Mittels der Euler-Relationen $\cos(kx) = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$ $\sin(kx) = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$ [vgl. [2] 3.16] können wir (*) zu 4.5 in Beziehung setzen. Tatsächlich erhalten wir durch einen Koeffizientenvergleich

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = q_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{c_0 = \frac{a_0}{2}} \quad (k=0)$$

$$(**) \quad \underline{c_k} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{b_k}{i}\right) = \underline{\frac{1}{2}(a_k - ib_k)} \quad (k>0)$$

$$\underline{c_{-k}} = \frac{1}{2}\left(a_k - \frac{b_k}{i}\right) = \underline{\frac{1}{2}(a_k + ib_k)} = \underline{\overline{c_k}} \quad (k>0)$$

Das bedeutet, dass wir

(1) auch reellwertige trig. Polynome in der „komplexen Form" (*) schreiben können – was oft praktisch ist! Die komplexen Koeff. c_k sind dann durch (**) aus den reellen Koeffs a_k, b_k auszurechnen. Es gilt dabei $\underline{c_{-k} = \overline{c_k}}$.

(2) Jedes komplexwertige trig. Polynom mit $\overline{c_k} = c_{-k}$ ist automatisch reellwertig und kann in der Form

4.5 geschrieben werden; die reellen Koeffs a_k, b_k sind dabei gemäß (**) aus den c_k's zu berechnen

Auch für komplexwertige trig. Polynome ist es möglich, die Koeffizienten c_k mittels Integration zurückzugewinnen. Dazu benötigen wir zunächst folgenden

4.10 MINIEXKURS (Integration & Differentiation komplexwertiger Fkt.)

Jede komplexwertige Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kann in Realteil und Imaginärteil zerlegt werden. Genauer setzen wir $u(x) := \mathrm{Re}(f(x))$, $v(x) := \mathrm{Im}(f(x))$ dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = u(x) + i\,v(x)$$

1 komplexwertige Fkt sind 2 reellwertige ...

Wir nennen nun die komplexwertige Fkt f diffbar, falls die beiden reellwertigen Fkt u, v diffbar sind und wir setzen

$$f'(x) = u'(x) + i\,v'(x).$$

Wieder nichts Neues, nur 2x soviel Arbeit

Analog nennen wir f R-intbar auf $[a,b]$, falls u und v es sind und setzen

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

Als ersten Schritt transferieren wir nun unser Wissen über die Grundintegrale 4.7 ins „komplexe Setting".

4.11 Lemma ($\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx$) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx = \begin{cases} 2\pi & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases}$$

Beweis. Für $k=0$ gilt $\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$

Für $k\neq 0$ haben wir eine Stammfkt $\int e^{ikx}dx = \frac{e^{ikx}}{ik}$ $\Big[\int e^{ikx} = \int\cos(kx) + i\int\sin(kx) =$
$= \frac{1}{k}(\sin(kx) - i\cos(kx)) =$
$= 1/ik\,(\cos(kx) + i\sin(kx))\Big]$

und daher wegen der 2π-Periodizität

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx = \frac{e^{ikx}}{ik}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$\square$

4.12 Prop (Koeffizienten komplexwertiger trig. Polynome)

Sei $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ ein trig. Polynom, dann gilt

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx.$$

Beweis. Es gilt $e^{-ilx} f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-l)x}$ und daher

$$\int_0^{2\pi} e^{-ilx} f(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n} c_k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x}dx}_{\neq 0 \text{ nur falls } k=l \; [4.11]} = 2\pi c_l$$

$\square$

4.13 Motivation (Fourier-Koeffizienten)

Unser Ziel ist es (vgl. 4.1.), periodische Funktionen in Einzelfrequenzen (e^{ikx} bzw $\cos(kx)$, $\sin(kx)$, $k\in\mathbb{Z}$) zu zerlegen. Offensichtlich „kitzeln" die Formeln in 4.8 und 4.12 die jeweiligen „Frequenzanteile" als trig. Polynomen heraus; genauer

$$f = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx \quad (*)$$

Größe des Frequenzanteils mit Frequenz kx

„Herauskitzeloperator"

Wir bemerken, dass die Formel $(*)$ auch für allgemeinere Fkt f als trig Polynome sinnvoll ist — nämlich für R-intbare f.

Der kühne nächste Schritt ist es nun zu hoffen, dass $(*)$ auch aus allgemeineren, 2π-periodischen, R-intbaren f den entsprechenden „Frequenzanteil herauskitzelt." In einem geeigneten Sinn wird das auch funktionieren; also definieren wir

4.14 DEF (Fourier-Koeffizienten, Fourier-Reihe)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Fkt, die auf $[0, 2\pi]$ R-intbar ist. Wir nennen die Zahlen ($k \in \mathbb{Z}$)

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx \quad (\in \mathbb{C})$$

die Fourier-Koeffizienten von f und die Reihe

$$\mathcal{F}[f](x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

die Fourier-Reihe von f. [und zwar unabhängig von Konvergenzfragen; vgl. [5] 3.3(ii)]

4.15 BEM (zu FR & FK)

(i) $\mathcal{F}[f](x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$ bedeutet die Folge der Partialsummen $\mathcal{F}_n[f](x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$

$n \to \infty$ gleichzeitig oben & unten

(ii) Ist f reellwertig, was sich auch durch $f(x) = \overline{f(x)}$ ausdrücken lässt, dann können wir für die FR auch eine reelle Schreibweise (vgl. 4.8) angeben: Es gilt

$z = x + iy$
$\bar{z} = x - iy$
$z = \bar{z} \Leftrightarrow y = 0$

$$f(x) = \overline{f(x)} \Longrightarrow \overline{c_k} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx} f(x)\,dx = c_{-k} \quad (*)$$

und somit

$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \overset{(*)}{=} c_k e^{ikx} + \overline{c_k e^{ikx}}$$

$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx})$$

$(**)$

$\mathrm{Re}(z \cdot w) = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)$

$$= 2\,\mathrm{Re}(c_k)\cos(kx) - 2\,\mathrm{Im}(c_k)\sin(kx).$$

Setzen wir in die Partialsummen $\mathcal{F}_n$ der FR ein so ergibt sich [vgl. 4.9]

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}\right)$$

$$\overset{(**)}{=} c_0 + \sum_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{2\,\mathrm{Re}(c_k)}_{=a_k}\cos(kx) + \underbrace{2\,\mathrm{Im}(c_k)}_{=b_k}\sin(kx)\Big).$$

wegen 4.5 $\rightarrow$ $c_0 = a_0/2$

Somit erhalten wir für die reellen FK

$$\left\{\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad (k=0,1,\dots,n) \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \qquad (k=1,2,\dots,n) \end{aligned}\right.$$

(iii) Aus diesen Integralformeln lesen wir sofort folgende Eigenschaften ab

- Ist f gerade [d.h. $f(-x)=f(x)$] $\Rightarrow b_k=0 \ \forall k$
- Ist f ungerade [d.h. $f(-x)=-f(x)$] $\Rightarrow a_k=0 \ \forall k$.

[$\pi b_k = \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \underset{[y=-x]}{=} -\int_{2\pi}^{0} f(-y)\sin(-ky)\,dy$

f ger, sin ung. $\boxed{2}$ 3.17(ii) $\boxed{4}$ 1.23(ii) $= -\int_0^{2\pi} f(y)\sin(kx)\,dy = -\pi b_k$

$\Rightarrow \underline{b_k = 0}$]

analog für a_k & ungerades f.

4.16 WARNUNG (Konvergenz von FR)

(i) Analog zum Fall der TR [vgl. 3.11] ist auch für FR weder klar, ob sie überhaupt konvergieren, noch ob sie im Falle der Konvergenz gegen die ursprüngliche Fkt konvergieren.

(ii) Eine Sache lässt sich allerdings leicht klarstellen: Falls die FR plm. konvergiert, dann schon gegen die ursprüngliche Fkt.

Das folgt aus 1.20, also der Tatsache, dass glm. Limiten mit dem Integral vertauschen.

Sei f der glm. Limes irgendeiner FR, also $f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l e^{ilx}$ glm. mit irgendwelchen Koeffizienten γ_l.
Dann sind die γ_l schon die FK c_l von f, denn

$$c_k \overset{4.14}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{l=-n}^{n}\gamma_l e^{ilx}\Big) e^{-ikx}\,dx$$

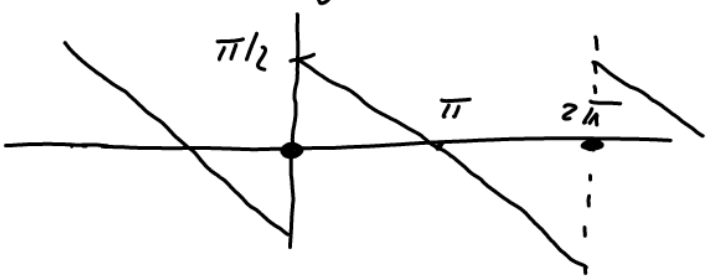
$$\overset{1.20}{=} \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{l=-n}^{n}\int_0^{2\pi}\gamma_l e^{i(l-k)x}\,dx \overset{4.11}{=} \underline{\gamma_k}\,.$$

(iii) Leider konvergieren FR im allgemeinen aber weder glm. noch pktw. Den FR ist ein anderer Konvergenzbegriff besser angepasst — die Konvergenz im quadratischen Mittel, die wir noch kennen lernen werden. Zunächst aber dringend ein Bsp.

4.17 BSP (Die Sägezahnfkt — Ein Da Capo)

Wir betrachten die 2π-periodische Fortsetzung von $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$s(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{\pi - x}{2} & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$



und bestimmen ihre FR.

Dazu bestimmen wir zunächst die (komplexen) FK und machen folgende <u>Beobachtung</u> (UE, Blatt 1a/7)

Der Wert eines R-Integrals $\int_a^b g(x)dx$ bleibt gleich, falls wir g an nur endlich vielen Stellen ändern. Daher können wir als Integrand für die c_k die Fkt $\pi - x/2$ statt f verwenden.

Wir haben

$$2\pi c_k = \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} e^{-ikx} dx = \frac{\pi}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx} dx}_{=0\ [4.11]} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x e^{-ikx} dx$$

$$\overset{\text{p.Int}}{=} \frac{1}{2ik} x e^{ikx} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2ik} \overbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx} dx} = \frac{\pi}{ik}$$

$$\Longrightarrow \underline{c_k = -\frac{i}{2k}}$$

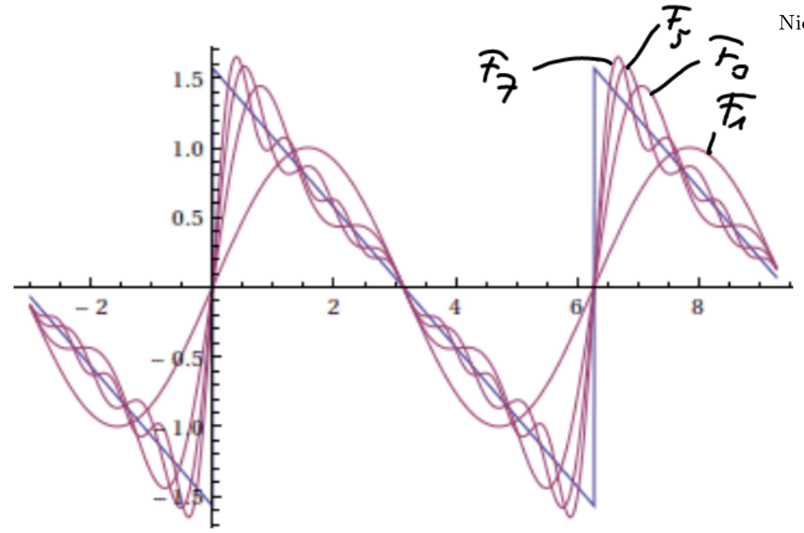
Damit ergibt sich für die reellen Koeff [4.15(ii)]

$$\underline{a_k = 2\mathrm{Re}(c_k) = 0}, \quad \underline{b_k = -2\mathrm{Im}(c_k) = \frac{1}{k}}$$

und daher

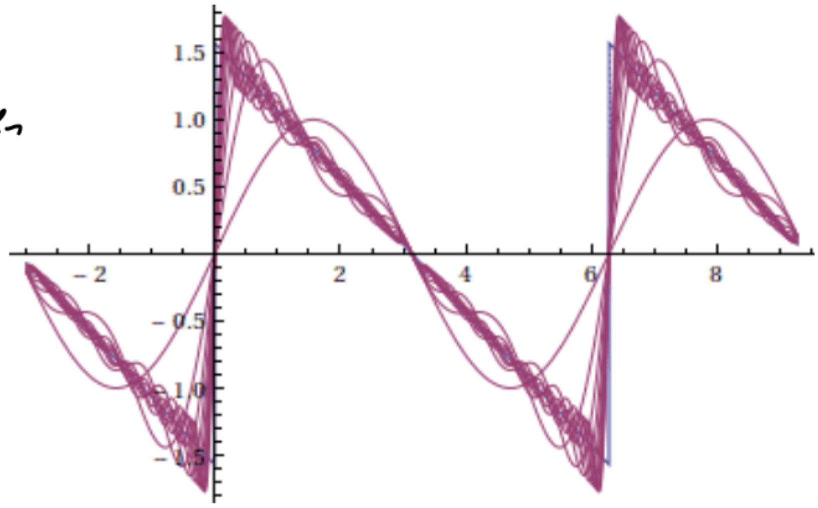
$$\mathcal{F}[f](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x}$$

Diese Reihe kennen wir aber schon aus [5] 2.7.
Es gilt $\mathcal{F}[f](x) \to f$ pktw $\forall x \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}[f] \to f$ glm auf allen Intervallen $[\delta, 2\pi - \delta]$ $(\delta > 0)$.



s und einige der ersten trig. Polynome $[F_1, F_3, F_5, F_7]$ die s approximieren

Die ersten 10 approximierenden F_{2n+1} $(n=1,\dots,10)$.



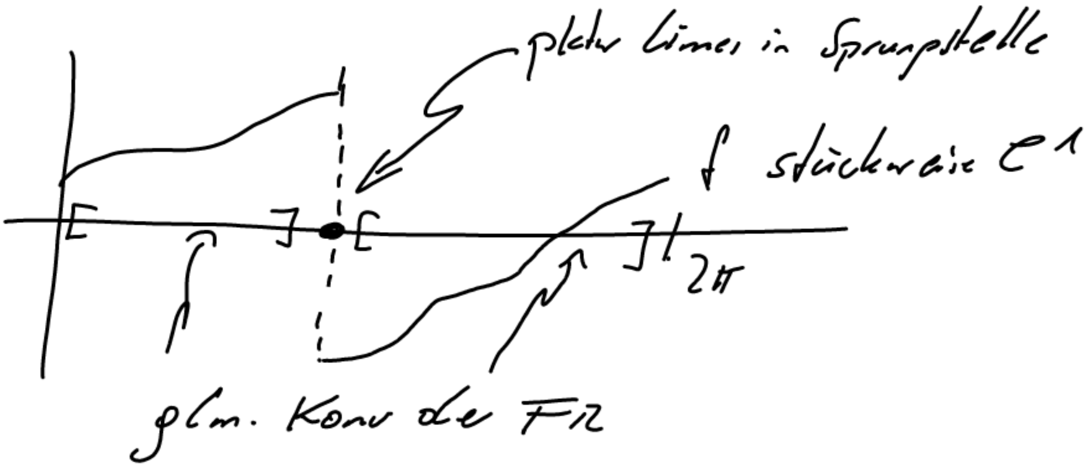
4.18 BEM (Punktweise & glm. Konv. von FR)

(i) Wir haben oben verwendet, dass sich die FK c_k nicht ändern, falls wir f an endlich vielen Stellen ändern. Damit verändert sich klarerweise die FR ebenfalls nicht und es wird offensichtlich, dass pktw. Konvergenz (in allen Punkten eines Periodizitätsintervalls) einer FR nicht angemessen ist.

Eine FR $F[f]$ ist blind für die Änderung der Fkt f an endl. vielen Stellen.

(ii) Man kann zeigen [Heuser II §136, 137] dass die FR $F[f]$ einer stückweisen C^1-Fkt

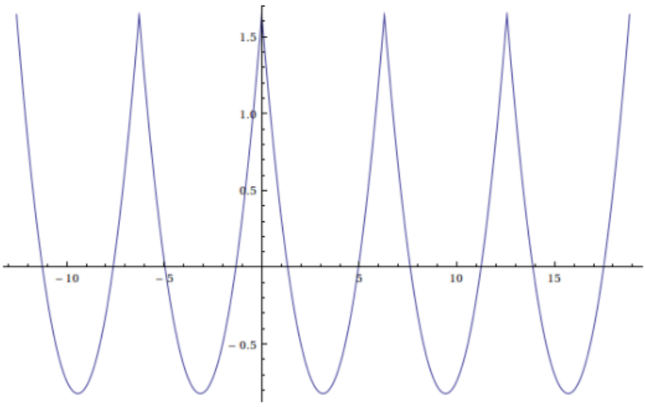
- außerhalb der Unstetigkeitsstellen auf allen abg Intervallen glm gegen f konvergiert und
- in Sprungstellen pktw gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigem limes konvergiert



4.18 Bsp (Haifischzahnfkt – Noch ein Da Capo)

Wir betrachten die 2π-periodische Fortsetzung der Fkt

$$h(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \quad (x \in [0, 2\pi])$$



Wir berechnen die reellen FK:

- h gerade $\Rightarrow b_k = 0 \ \forall k$ [4.15(iii)]
- $$\underline{\pi a_0} = \int_0^{2\pi} h(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4}\,dx - \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{12}\,dx$$

$$= \frac{(x-\pi)^3}{12}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\pi^2}{12}x\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi^3}{12} - \frac{2\pi^3}{12} = \underline{0}$$

• $\underline{a_k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(kx)\,dx - \frac{\pi}{12}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,dx}_{=0}$

$$\overset{P.I.}{=} \frac{1}{4\pi}\left(\underbrace{\frac{(x-\pi)^2}{k}\sin(kx)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{2}{k}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin(kx)\,dx\right)$$

$$\overset{P.I.}{=} -\frac{1}{2k\pi}\left((x-\pi)\frac{-\cos(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx}_{=0}\right)$$

$$= \frac{1}{2k^2\pi}\big(\pi\cos(2k\pi)+\pi\cos(0)\big) = \frac{2\pi}{2k^2\pi} = \underline{1/k^2}$$

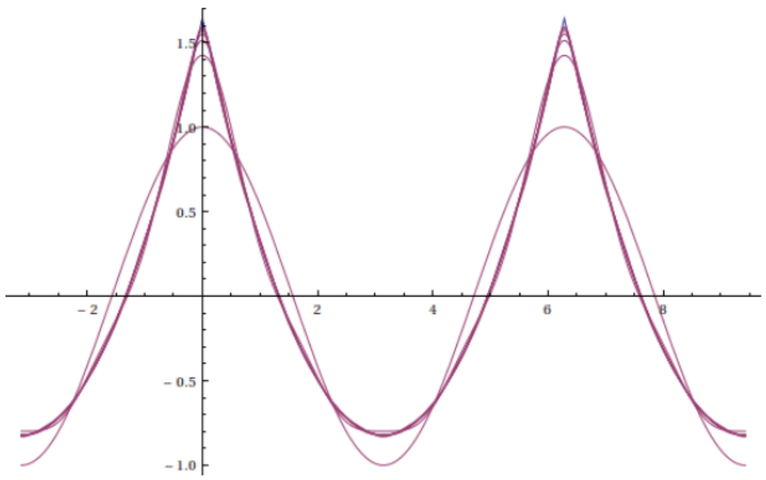
Also erhalten wir

$$\boxed{F[h](x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}}$$

wiederum eine alte Bekannte aus [5] 2.9.
Wir wissen bereits $F[h] \to h$ glm, d.h. als glm Limes gilt

$$\boxed{\frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = F[h](x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}.}$$

[Wir haben hier einen „schönen" Fall, weil die FR sogar glm. gegen die Fkt konvergiert; das ist ja i.a. nicht so – vgl. 4.18. Da h aber stetig & stückweise C^1 ist folgt die glm. Konvergenz aus dem oben zitierten Thm.]



h approximiert durch
$F_1, F_3, F_6, \ldots$

4.20 MOTIVATION (Ein Skalarprodukt für Funktionen)

Unser nächstes Ziel ist es nun, den „richtigen" Konvergenzbegriff für FR zu studieren. Das benötigt einige Vorarbeit und wir werden einige Parallelen zur linearen Algebra aufzeigen.

(i) Zunächst erinnern wir uns, dass die R-intbare Fkt einen Vektorraum bilden [14] 1.15 (i), (ii): f, g R-intbar auf $[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g, \lambda f$ R-intb. auf $[a,b]$].

Wir betrachten den für unsere Zwecke besser geeigneten VR $\mathcal{R}[0,2\pi]$ bestehend aus allen komplexwertigen R-intbaren Fkt auf $[0,2\pi]$

Das ist tatsächlich ein VR über $\mathbb{C}$, denn seien $f, g \in \mathcal{R}[0,2\pi]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ dann zerlegen wir in Real- & Imaginärteil und schreiben $f = u+iv$, $g = w+ix$, $\lambda = a+ib$ (u,v,w,x reell, R-intbar auf $[0,2\pi]$ nach 4.10, $a,b \in \mathbb{R}$) und schreiben

nichts Neues, mehr Arbeit vgl. 4.16

$$f+g = (u+iv)+(w+ix) = \underbrace{(u+w)}_{R\text{-intbar nach [14] 1.15 (i)}} + i\underbrace{(v+x)}_{} \quad R\text{-intbar nach } 4.10$$

$$\lambda f = (a+ib)(u+iv) = (\underbrace{au - bv}) + i(\underbrace{av+bu})$$ R-intbar nach 4.10

R-intb. nach [4] 1.15(i)(ii)

(ii) In der linearen Algebra definiert man auf (dem Erz-beispiel eines $\mathbb{C}$-VR) $\mathbb{C}^n$ ein Skalarprodukt

$$\langle v | w \rangle := \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \overline{w_j}$$

$(v = (v_1, \dots, v_n),\ w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n)$ und die zugehörige 2-Norm

$$\|v\|_2 := \sqrt{\langle v | v \rangle} = \sum_{j=1}^{n} v_i \cdot \overline{v_i} = \sum_{j=1}^{n} |v_i|^2$$

(siehe [Fischer], Kap. 5).

(iii) In unserem neuen (zugegeben etwas komplizierteren) $\mathbb{C}$-VR $\mathcal{R}[0, 2\pi]$ versuchen wir ein analoges Vorgehen und definieren [Offizielles unten] ein Skalarprodukt für zwei Vektoren (also R-intbaren Fkt) $f, g \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$

$$\underbrace{\langle f | g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx}$$

und die zugehörige Norm

$$\underbrace{\|f\|_2 := \sqrt{\langle f | f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}}$$

damit $\|1\|_2 = 1$ konstante Fkt 1

(iv) Dürfen wir das? Warum nicht, falls alle Zwischenschritte okay sind. Das prüfen wir nun noch: Seien $f, g \in \mathcal{R}[0,2\pi]$

einfache Rechnung mit Re, Im wie oben

(1) $\overset{[4]\,1.20}{\Longrightarrow} f \cdot g \in \mathcal{R}[0,2\pi] \Longrightarrow f \cdot \bar{g} \in \mathcal{R}[0,2\pi]$

$$\Longrightarrow \langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g} \quad \text{ist definiert}$$

(2) $|f(x)|^2 \geq 0 \overset{[4]\,1.15(\text{iii})}{\Longrightarrow} \int_0^{2\pi} |f|^2 \geq 0 \Longrightarrow \|f\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2\right)^{1/2}$ ist definiert

Also dürfen wir tatsächlich!

(v) Wozu ist es gut? Wir werden unten sehen, dass in diesem Formalismus die Darstellung einer Fkt durch ihre FR analog zur Darstellung eines Vektors im $\mathbb{C}^n$ in eine Orthonormalbasis (z.B. der Standardbasis) ist.

Zunächst machen wir obige Begriffe offiziell.

4.21 DEF $(\mathcal{R}[0,2\pi], \langle\,|\,\rangle, \|\ \|_2)$ Wir definieren

(i) $\mathcal{R}[0,2\pi] = \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ R\text{-intbar}\}$

(ii) $\langle\,|\,\rangle : \mathcal{R}[0,2\pi] \times \mathcal{R}[0,2\pi] \to \mathbb{C}$

$$\langle f|g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

(iii) $\| \ \|_2 : \mathcal{R}[0,2\pi] \to \mathbb{R}$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f|f\rangle} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

4.22 PROP (Eigenschaften von $\langle\,|\,\rangle$)

Für $f,g,h \in \mathcal{R}[0,2\pi]$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $\langle \lambda f + \mu g | h\rangle = \lambda \langle f|h\rangle + \mu \langle g|h\rangle$
(ii) $\langle f | \lambda g + \mu h\rangle = \bar\lambda \langle f|g\rangle + \bar\mu \langle f|h\rangle$ (bilinear)

(iii) $\langle f|g\rangle = \overline{\langle g|f\rangle}$ (symmetrisch, Hermitesch)
(iv) $\langle f|f\rangle \geq 0$ (pos. Semidefinit)

Beweis. (i)+(ii) folgen direkt aus der Linearität des Integrals [$\boxed{4}$ 1.15 (ii), (iii)]
(iii) folgt unmittelbar aus der Def & Zerlegung in Re + Im.
(iv) folgt aus der Def vgl. (2) in 4.20 (iv). $\square$

4.23 BEM (Fast ein Skalarprodukt)

(i) Prop 4.22 macht $\langle\,|\,\rangle$ fast zu einem Skalarprodukt auf $\mathcal{R}[0,2\pi]$. [In der lin. Algebra versteht man unter einem SP auf einem VR V eine Abb $V\times V \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften (i)–(iii) in 4.22 und der positiv Definitheit

$$\langle f|f\rangle \geq 0 \text{ und } \langle f|f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$$

zB [Fischer, 5.1.1']]

Prop 4.22(iv) liefert aber nur den 1. Teil der pos. Definitheit und der 2. Teil ist falsch. Ein Gegenbsp ist etwa

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $f \neq 0$ aber $\int f = 0$ [vgl UE, Blatt 1k $\boxed{17}$]

Folglich ist auch $\| \ \|_2$ nur fast eine Norm auf $\mathcal{R}[0,b]$, denn $\|f\| = 0$ aber $f \neq 0$.

Immer die gleiche Misere – das $\int$ ist blind für einzelne Pkte

(ii) Dieser „Defekt" stört in der Praxis nicht und kann formal umgangen werden, indem man zu Äquivalenzklassen von Fkt übergeht, die sich nur auf eine für die Integration vernachlässigbaren Menge unterscheiden. [Das führt zum Begriff der Lebesgue-Nullmenge aus dem Gebiet der Maß- und Integrationstheorie.]

(iii) Auf $\mathcal{C}[0,2\pi]$ ist $\langle\,|\,\rangle$ ein SP und $\| \ \|_2$ eine Norm, denn aus [UE, Blatt 1k $\boxed{16}$] folgt
$f \in \mathcal{C}[0,2\pi]$, $\int f = 0 \Rightarrow f = 0$

4.24 MiniEXKURS (Basisentwicklung von Vektoren)

Sei V ein n-dim $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt $\langle\,|\,\rangle$ (Euklidische VR falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; unitärer VR falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) dann versteht man unter einer Orthonormalbasis (ONB) eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ mit der Eigenschaft

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Vektoren stehen normal aufeinander & sind normiert

Jeder Vektor $v \in V$ hat dann die Basisentwicklung

$$\boxed{v = \sum_{j=1}^{n} v_i e_i = \sum_{j=1}^{n} \langle v | e_i \rangle e_i,}$$

d.h. die (eindeutig bestimmten) Koeffizienten v_i in der Basisentwicklung von v in der ONB $\{e_1, \dots, e_n\}$ sind durch das SP gegeben

$$v_i = \langle v | e_i \rangle$$

Projektion von v auf e_i

Wir werden nun sehen, dass die Entwicklung einer 2π-periodischen Fkt f in ihre FR sich als „Basis-entwicklung" im VR $\mathcal{R}[0,2\pi]$ verstehen lässt.

Allerdings ist $\mathcal{R}[0,2\pi]$ unendlich-dimensional. Daher können wir nicht erwarten, dass sich ein $f \in \mathcal{R}[0,2\pi]$ als endliche Summe darstellen lässt, sondern als Reihe – an genau diesem Punkt tritt also die Analysis in das lineare-Algebra-Spiel.

4.25 BEM (FR, Orthonormalsystem & Basisdarstellung)

(i) In $\mathcal{R}[0,2\pi]$ definieren wir die (altbekannten) Fkt

$$e_k(x) = e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mit dieser Notation schreibt sich 4.11 als

$$\underline{\langle e_k | e_l \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x}\, dx \overset{4.11}{=} \begin{Bmatrix} 1 & k=l \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix} = \underline{\delta_{kl}}$$

Diese Gleichung besagt, dass $\{e_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ein sog. <u>ORTHONORMALSYSTEM</u> in $\mathcal{R}[0,2]$ bzgl. $\langle\ |\ \rangle$ bildet.

Sei nun $f \in \mathcal{R}[0,2\pi]$, dann können wir die FK von f schreiben als

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \langle f | e_k \rangle \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

und daher ergibt sich die FR von f zu

$$\boxed{F[f] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{\langle f | e_k \rangle e_k}},$$

was formal (bis auf $k = -\infty \dots \infty$) gleich zur Basisdarstellung in endl. dim unitären VR ist [vgl. 4.24].

(ii) In seiner abstrakten Ausprägung führt dies zur Theorie der <u>Hilbert-Räume</u> in der <u>Funktionalanalysis</u>.

(iii) Uns bleibt aber immer noch die Frage wann und in welchem Sinne wir

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f | e_k \rangle e_k$$

schreiben können. Um diese beantworten zu können, definieren wir gleich den „richtigen" Konvergenzbegriff für FR; zunächst aber noch einige wichtige Ungleichungen.

4.26 Lemma (Cauchy-Schwarz- & Δ-Ungl)

Seien $f, g \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$, dann gilt

(i) (Die Cauchy-Schwarz Ungleichung)

$$|\langle f | g \rangle| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2$$

natürlich völlig analog zu CS-Ungl der Lin Alg.

(ii) (Die Dreiecksungleichung)

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

natürlich völlig analog zu Δ-Ungl für den Betrag

Beweis-Skizze (i) beweist man bequem mittels Riemann-Summen [4] 1.25]. Dadurch genügt es folgende Ungl. für endliche Summen zu zeigen

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| |y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \right)^{1/2}$$

Das ist aber die CS-Ungl der Lin Algebra; sie kann zB aus der Ungl zwischen geom. & arithmetischen

Mittel gefolgert werden.

(ii) folgt aus (i), denn es gilt

$$\|f+g\|_2^2 = \langle f+g|f+g\rangle = \langle f|f\rangle + 2\mathrm{Re}\langle f|g\rangle + \langle g|g\rangle$$

$$\overset{(i)}{\leq} \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2. \qquad \square$$

4.27 Lemma (Bessel-Ungleichung)

Sei $f \in \mathcal{R}[0,2\pi]$ mit den FK $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Dann gilt

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\|f - F_n[f]\|_2^2 = \|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

(ii) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

Bessel-Ungl: die Quadratsumme der FK $\leq$ dem Quadrat der L^2-Norm

Beweis [Hat einen starken Linearen-Algebra-Geschmack!]

(i) Wir setzen $f_n = F_n[f] = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$. Dann gilt

$$\langle f|f_n\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k \underbrace{\langle f|e_k\rangle}_{c_k} = \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2}_{\in\mathbb{R}!} = \overline{\langle f|f_n\rangle} \overset{4.22(iii)}{=} \langle f_n|f\rangle \qquad (*)$$

und

$$\langle f_n|f_n\rangle = \sum_{k,l=-n}^{n} c_k \bar{c}_l \underbrace{\langle e_k|e_l\rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2. \qquad (**)$$

Daher

$$\|f-f_n\|_2^2 = \langle f-f_n|f-f_n\rangle = \langle f|f\rangle - \underbrace{\langle f_n|f\rangle - \langle f|f_n\rangle}_{\overset{(*)}{=} 2\langle f|f_n\rangle} + \langle f_n|f_n\rangle$$

$$\overset{(*),(**)}{=} \|f\|_2^2 - 2\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

(ii) folgt aus (i) denn (i) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \le \|f-f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \Rightarrow \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \le \|f\|_2^2$$

$$\overset{[1]\,2.28}{\Longrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \|f\|_2^2 \qquad \square$$

[Jetzt endlich:]

4.28 DEF (Konvergenz im quadratischen Mittel)

Sei $f \in \mathcal{R}[0,2\pi]$ und $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{R}[0,2\pi]$.
Wir sagen f_n konvergiert gegen f im quadratischen Mittel, falls

$$\|f-f_n\|_2 \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Man sagt auch, f_n konvergiert gegen f in der 2-Norm — vgl. auch 1.13(iii).

4.29 BEM ($\|\ \|_2$-Konv vs $\|\ \|_\infty$-Konvergenz)

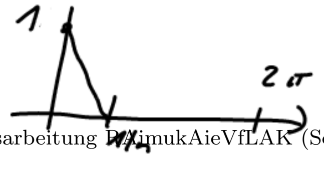
Sei $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{C}[0,2\pi]$, dann gilt

$$\boxed{f_n \to f \text{ glm} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; f_n \to f \text{ im quadr. Mittel}}$$

Tatsächlich gilt $f_n \to f$ glm $\Rightarrow |f_n-f|^2 \to 0$ glm

$$\Longrightarrow \lim \|f-f_n\|_2^2 = \lim \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n-f|^2 \overset{1.20}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim |f_n-f|^2 = 0.$$

Und ein Bsp einer Fktionenfolge mit $\|f_n\|_2 \to 0$ aber $\|f_n\|_\infty \not\to 0$ ist:



$$\|f_n\|_\infty = 1 \;\forall n \text{ aber } 2\pi \|f_n\|_2^2 = \int_0^{1/n} (1-nx)^2\,dx$$
$$= -\frac{1}{3n}(1-nx)^3\Big|_0^{1/n} = 1/3n \to 0$$

4.30 BEM (Konv. von FR)

Aus 4.28 können wir nun ein nützliches Kriterium für die $\|\,\|_2$-Konvergenz von FR ableiten

4.28(i): $\|f - F_n[f]\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$

$$\Rightarrow \|f - F_n[f]\|_2^2 \to 0 \iff \|f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

$$\iff \|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Parseval-Gleichung

Mit anderen Worten: Die FR von f konvergiert im quadratischen Mittel gegen f genau dann, wenn in der Bessel-Ungleichung Gleichheit eintritt. [d.h. die Bessel-Ungl zur Parseval-Gleichung wird.]

Jetzt sind wir endlich in der Lage, die Frage nach der Konvergenz von FR erschöpfend zu beantworten:

4.31 THM (FR konv. im quadr. Mittel)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und R-intbar auf $[0, 2\pi]$. Dann konvergiert die FR von f im quadr. Mittel gegen f. D.h. im Sinne der $\|\,\|_2$-Konvergenz gilt

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f | e_k \rangle e_k$$

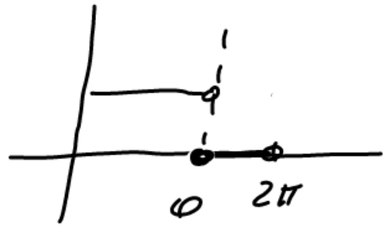
und für die Fourier-Koeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ von f gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2$$

die Quadratsumme der FK ist genauso endlich für f wie $\|\,\|_2$

Beweis. (1) Das Thm gilt für charakteristische Fkt der Form $(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$

$$f(x) = \chi_{[0,\alpha)}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \alpha \\ 0 & \alpha \leq x < 2\pi \end{cases}$$



mit 2π-peridische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$.

Wir berechnen die FK von f.

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha dx = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha e^{-ikx} dx = \frac{-1}{2\pi i k} e^{-ikx} \Big|_0^\alpha = \frac{i}{2\pi k} \left(e^{-ik\alpha} - 1\right) \quad (k \neq 0)$$

$$\Longrightarrow \underline{|c_k|^2} = \frac{1}{4k^2\pi^2} \left(e^{-ik\alpha} - 1\right)\left(e^{ik\alpha} - 1\right)$$

$$(*) \qquad = \frac{1}{4k^2\pi^2} \underbrace{\left(2 - e^{ik\alpha} - e^{-ik\alpha}\right)}_{2\left(1 - \frac{e^{ik\alpha} + e^{-ik\alpha}}{2}\right) = 2(1 - \cos(k\alpha)) \; [\boxed{2}\, 3.16]} = \frac{1 - \cos(k\alpha)}{2k^2\pi^2} \quad (k \neq 0)$$

$$\Longrightarrow \underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2} \overset{(*)}{=} \frac{\alpha^2}{4\pi^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(k\alpha)}{2k^2\pi^2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k^2}$$

$$\overset{[7.8, 7.10]}{=} \frac{\alpha^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{(\alpha - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right)$$

$$= \cancel{\frac{\alpha^2}{4\pi^2}} + \cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{\alpha^2}{4\pi^2}} + \frac{\alpha\pi}{2\pi^2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{12}} = \underline{\frac{\alpha}{2\pi}}$$

Andererseits gilt

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi}1\,dx = \frac{\varphi}{2\pi}$$

Also gilt $\|f\|_2^2 = \frac{\varphi}{2\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2$

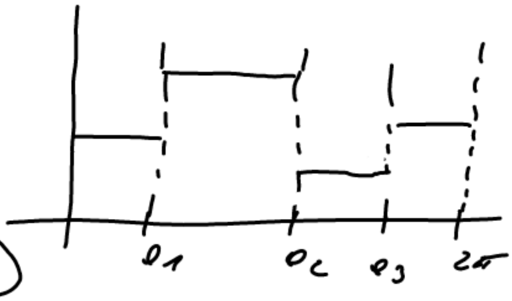
$$\overset{4.30}{\Longrightarrow} \|F_n[f]-f\|_2 \to 0$$

(2) Das Thm gilt für Treppenfkt mit 2π-periodischer Fortsetzung.

Sei genauer $N\in\mathbb{N}$ und $0\le x_1 < x_2 < \dots < x_N \le 2\pi$ eine Zerlegung von $[0,2\pi]$. Seien $\gamma_j\in\mathbb{R}$ $(1\le j\le N)$ und sei schließlich $(x\neq\varphi_j)$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N}\gamma_j\,\chi_{[0,\varphi_j)}$$

Bausteine wie in (1)



Nun gilt $F_n[f] = F_n\left[\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\,\chi_{[0,\varphi_j)}\right] = \sum_{j=1}^{N}\gamma_j\,F_n\left[\chi_{[0,\varphi_j)}\right]$

nur endl. Summen

und daher

$$\|f-F_n[f]\|_2 = \Big\|\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\left(\chi_{[0,\varphi_j)} - F_n[\chi_{[0,\varphi_j)}]\right)\Big\|_2$$

$$\overset{4.26(ii)}{\le} \sum_{j=1}^{N}|\gamma_j|\,\|\chi_{[0,\varphi_j)} - F_n[\chi_{[0,\varphi_j)}]\|_2 \overset{(1)}{\longrightarrow} 0$$

(3) Schließlich beweisen wir den allg. Fall.
Sei oBdA f reellwertig (sonst betrachte Re & Im separat)
und $|f(x)| \leq 1$ (sonst Division durch $\|f\|_\infty$)

Sei $\varepsilon > 0 \overset{[4]\ 1.13}{\Longrightarrow} \exists$ Treppenfkt $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[0, 2\pi]$ die wir 2π-periodisch fortsetzen mit

Einzwicken von R-intbaren Fkt zwischen Treppenfkt

(a) $-1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$

(b) $\int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \leq \frac{\pi}{4} \varepsilon^2$

Wir setzen $g := f - \varphi \Longrightarrow F_n[f] = F_n[g] + F_n[\varphi]$ (*)

und $|g|^2 = |f - \varphi|^2 \leq |\psi - \varphi|^2 = \underbrace{(\psi - \varphi)}_{0 \leq \dots \leq 2}(\psi - \varphi) \leq 2(\psi - \varphi)$ (**)

Weiters haben wir

$(2) \Longrightarrow \exists N_0\ \forall n \geq N_0\ \ \|\varphi - F_n[\varphi]\|_2 \leq \varepsilon/2$ (***)

und

$4.27(i) \Longrightarrow \|g - F_n[g]\|_2^2 \leq \|g\|_2^2$ (****)

Damit gilt nun

$$\|g - F_n[g]\|_2^2 \overset{(****)}{\leq} \|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2\, dx$$

$$\overset{(**)}{\leq} \frac{1}{2\pi}\, 2 \int_0^{2\pi} (\psi - \varphi)(x)\, dx \overset{(b)}{\leq} \frac{1}{\pi}\, \frac{\pi}{4} \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^2}{4} \quad (1)$$

Fassen wir zusammen, so erhalten wir

$$\|f - F_n[f]\|_2 \overset{(*)}{=} \|g + \varphi - F_n[g] - F_n[\varphi]\|_2$$

$$\overset{4.26(ii)}{\leq} \|g - F_n[g]\|_2 + \|\varphi - F_n[\varphi]\|_2$$

$$\overset{(1),(***)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Somit $\|F_n[f] - f\|_2 \to 0$.

(4) Die Parseval-Gleichung

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

folgt sofort aus Bem 4.27(i). $\square$