Eine Verallgemeinerung von Prikrys Forcing

-Diplomarbeit-

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

eingereicht von Gunter Fuchs
geb. am 19.10.1972 in Västanfors/Schweden
Betreuer: Prof. Dr. Ronald Jensen
Berlin, den 21. Juli 1998

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In seiner Dissertation „Changing measurable into accessible cardinals“ von 1970 führte Karel L. Příkrý eine Forcing-Ordnung ein, die, ausgehend von einem Modell mit einer meßbaren Kardinalzahl (und einem entsprechenden normalen Ultrafilter), eine generische Erweiterung produziert, in der die Kofinalität dieser Zahl auf ω kollabiert wird, aber alle Kardinalitäten erhalten bleiben.

Bald wurde von Mathias [Mathias73]eine Charakterisierung für Prikry-Generizität gefunden: Eine $\omega-$Folge unterhalb einer in einem Modell meßbaren Zahl ist Prikry-generisch über diesem Modell, wenn sie in jeder Menge von Maß eins bezüglich dem fixierten normalen Ultrafilter fast ganz, also bis auf endlich viele Ausnahmen, enthalten ist.

Unter Verwendung dieser Charakterisierung entdeckten Dodd und Jensen eine interessante Universalitätseigenschaft von Prikry-Sequenzen: Wenn $0^\dagger$ nicht existiert, dann hat entweder das Kernmodell K die Überdeckungseigenschaft, oder es existiert ein inneres Modell mit einer meßbaren Kardinalzahl. Sei dann κ minimal, so daß ein inneres Modell existiert, in dem κ meßbar ist. Dann existiert ein U, so daß $L[U] \models$ „U ist ein normaler Ultrafilter auf κ“. Entweder hat $L[U]$ die Überdeckungseigenschaft, oder es existiert eine Prikry-Sequenz S über $L[U]$. In diesem Falle hat $L[U,S] = L[S]$ die Überdeckungseigenschaft.

Seitdem wurden einige Variationen dieses Forcings betrachtet. Schon in seiner Dissertation analysierte Prikry Verallgemeinerungen der als Prikry-Forcing bekannt gewordenen Konstruktion.

Menachem Magidor verwendete in [Magidor76] iteriertes Prikry-Forcing unter anderem, um alle meßbaren Kardinalzahlen unterhalb einer stark kompakten Zahl zu kollabieren, ohne die starke Kompaktheit zu zerstören und befaßte sich in [Magidor78] mit einer Variation von Prikrys Forcing, die die Kofinalität einer meßbaren Kardinalzahl κ auf ein kleineres α kollabiert, ohne Kardinalitäten zu verändern (dies funktioniert allerdings nur unter zusätzlichen Annahmen über die Existenz großer Kardinalzahlen, z.B. wenn κ $2^\kappa-$superkompakt ist).

Für einen Überblick über einige Verallgemeinerungen sei auf [Kanamori94, S.238ff.] verwiesen.

In dieser Arbeit wird eine neue Verallgemeinerung eingeführt und untersucht. Die Konstruktion dieses Forcings ist sehr variabel. Im Gegensatz zu den meisten anderen Variationen geht es hier nicht nur darum, die Kofinalitäten bestimmter Kardinalzahlen zu verändern, sondern man kann auch gezielt Gegenbeispiele zum Überdeckungssatz für das Kernmodell adjungieren, ohne Kofinalitäten oder Kardinalitäten zu verändern.

In Kapitel 1 werden die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen aufgeführt. Es handelt sich um eine Zusammenstellung der wichtigsten Fakten über Filter, Forcing und Ultraprodukte, die nicht als Einführung in diese Gebiete zu verstehen ist, sondern vor allem für spätere Referenzen gedacht ist. Die Standardwerke [Jech78],[Kunen80] und [Kanamori94] decken den Großteil der benötigten Resultate ab, und Ausnahmen werden hier mit Beweis angegeben.

Das zweite Kapitel befaßt sich mit der Einführung und Analyse der neuen Verallgemeinerung von Prikrys Forcing, die im Zentrum dieser Arbeit steht. Die Hauptergebnisse sind der Charakterisierungssatz, der eine Verschärfung der offensichtlichen Verallgemeinerung von Mathias' Kriterium für Prikry-Generizität ist, und das Maximalitätsprinzip, das in der hier gegebenen Form anscheinend selbst für den Spezialfall von Prikrys Forcing in der Literatur noch nicht bekannt ist.

Im dritten Kapitel geht es um die Konstruktion eines Modells, in dem es einen regulären Limes von meßbaren Kardinalzahlen gibt, in dem das Kernmodell nicht die Überdeckungseigenschaft hat, es aber keine uniforme Prikry-Sequenz gibt. Dies zeigt, daß die Voraussetzung über die Nichtexistenz eines regulären Limes von meßbaren Kardinalzahlen in Mitchells Version des Überdeckungssatzes 3.2.3 nicht abgeschwächt werden kann.

Im vierten Kapitel wird ein anderer Zugang zu Prikry-Sequenzen dargestellt, indem gezeigt wird, daß die Folge der kritischen Punkte gewisser Iterationen von Ultraprodukten Prikry-generisch ist über dem Zielmodell. Dies wird auch einen alternativen Beweis des Maximalitätsprinzips für das verallgemeinerte Prikry-Forcing liefern.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Professor Ronald Jensen bedanken, der diese Arbeit sehr engagiert betreut hat und immer für Fragen und Gespräche offen war. Auch Dr. Achim Ditzen sei gedankt für Anregungen, die für die Fertigstellung dieser Arbeit hilfreich waren.

Notation

Die verwendete Notation orientiert sich stark an [Kanamori94]. Kleine griechische Buchstaben bezeichnen Ordinalzahlen, M und N sind für Modelle reserviert, φ und ψ für logische Formeln, V bezeichnet das mengentheoretische Universum und κ ist immer eine Kardinalzahl, zumindest in einem aus dem Zusammenhang erkennbaren Modell. Funktionen werden mit ihrem Graphen identifiziert, wobei hier die erste Komponente eines Paares aus dem Graphen der Funktion f ein Element des Definitionsbereichs, und die zweite Komponente der zugehörige Funktionswert aus dem Bild von f ist. Das Entsprechende gilt für Relationen. Die Bezeichnung der mengentheoretischen Operationen ist standard, wie auch die der prädikatenlogischen Konnektoren, Operatoren und Quantoren. Wenn x eine Menge ist, so ist $\dot{x}$ meist entweder ein Prädikatensymbol, das durch x interpretiert wird (in einem aus dem Zusammenhang erkennbaren Modell, in dem x eine Klasse sein kann), oder ein Forcing-Name, der in einer generischen Erweiterung zu x ausgewertet wird. Einige weitere Notationen werden in tabellarischer Form angegeben:

Notation	Bedeutung
On	Die Klasse der Ordinalzahlen.
Card	Die Klasse der Kardinalzahlen.
$\|x\|$	Die Kardinalität von x.
$x \times y$	Das Cartesische Produkt aus x und y.
$\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle$	Das geordnete $n-$tupel der Mengen $x_0, \ldots, x_{n-1}$.
${}^y x$	Die Menge der Funktionen von y nach x.
$\mathrm{dom}(f)$	Der Definitionsbereich der Funktion f.
$\mathrm{ran}(f)$	Der Wertebereich von f.
$f \restriction x$	Die Einschränkung der Funktion f auf x.
$f``x$	Das Bild von x unter f.
$\mathcal{P}(x)$	Die Potenzmenge von x.
$[x]^\alpha$	Die Menge der $\alpha-$elementigen Teilmengen von x.
$[x]^{<\alpha}$	$\bigcup_{\nu<\alpha}[x]^\nu$.
$\mathrm{cf}(\alpha)$	Die Kofinalität von α.
$\mathrm{otp}(x)$	Der Ordnungstyp von x für $x \subseteq \mathrm{On}$.
$\min(x)$, $\max(x)$	Minimum bzw. Maximum von x für $\emptyset \neq x \subseteq \mathrm{On}$.
$\sup(x)$	Das Supremum von x für $x \subseteq \mathrm{On}$, also $\bigcup x$.
$\mathrm{lub}(x)$	Die kleinste obere Schranke von x für $x \subseteq \mathrm{On}$, also $\sup(\{\nu+1 \mid \nu \in x\})$. Folglich $\sup(\emptyset) = \mathrm{lub}(\emptyset) = 0$.
$\prec \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \succ$	Der Wert der Gödelschen Paarfunktion an der Stelle $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \rangle$.
φ^M	Das Ergebnis der Relativierung von φ nach M.
$M \models \varphi$	M ist ein Modell von φ.

Weitere Notationen werden an der Stelle ihres ersten Auftretens definiert.

Kapitel 1

Grundlegende Konzepte

In diesem Kapitel wird versucht, eine Zusammenstellung der in späteren Kapiteln benötigten Grundlagen zu geben. Es werden nur Resultate bewiesen, die nicht in [Kunen80], [Kanamori94] oder [Jech78] zu finden sind, oder deren Beweise für diese Arbeit wichtige Argumente beinhalten.

1.1 Filter und Ultrafilter

Die Begriffe „Filter“ und „Ultrafilter“ sind für viele Teile der Mengentheorie im Allgemeinen und diese Arbeit im Speziellen von wesentlicher Bedeutung. Sie treten in den verschiedensten Zusammenhängen auf; daher wird die erste Definition sehr allgemein gehalten. Sei $\mathbb{P} = \langle |\mathbb{P}|, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung mit maximalem Element $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$.

1.1.1 DEFINITION. Ein *Filter* in $\mathbb{P}$ ist eine Teilmenge F von $|\mathbb{P}|$ mit

(a) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in F$.

(b) $q \geq p \in F \longrightarrow q \in F$.

(c) $\forall p, q \in F \, \exists r \in F \quad r \leq p \wedge r \leq q$.

Für eine Boolesche Algebra $\mathbb{B} = \langle |\mathbb{B}|, +_{\mathbb{B}}, \cdot_{\mathbb{B}}, -_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{B}}, \mathbb{1}_{\mathbb{B}}, \leq_{\mathbb{B}} \rangle$ ist U ein *Ultrafilter in* $\mathbb{B}$, wenn U ein Filter ist in $\langle |\mathbb{B}|, \leq_{\mathbb{B}} \rangle$ und

(d) $\forall p \in |\mathbb{B}| \quad (p \in F \vee -p \in F)$.

Für eine Menge x ist U ein *(Ultra-) Filter auf* x, wenn U ein (Ultra-) Filter in der Booleschen Algebra $\langle \mathcal{P}(x), \cup \restriction (\mathcal{P}(x))^2, \cap \restriction (\mathcal{P}(x))^2, \setminus \restriction (\mathcal{P}(x))^2, \emptyset, x, \subseteq \restriction (\mathcal{P}(x))^2 \rangle$ ist. Ein Filter F auf einer $\lambda-$vollständigen, Booleschen Algebra $\mathbb{B}$ ist $\lambda-$*vollständig,* wenn für $X \in {}^{<\lambda}F$ gilt:

$$\prod_{i \in \mathrm{dom}(X)} X(i) \in F.$$

$\square$

Der am häufigsten auftretende Fall ist, daß U ein Ultrafilter auf einer Menge, meist einer Kardinalzahl, ist. Die kanonische Boolesche Algebra auf einer Potenzmenge ist natürlich vollständig, daher ist ein Filter auf einer Menge $\lambda-$vollständig, wenn er unter Schnitten der Länge $< \lambda$ abgeschlossen ist.

Wenn U ein $\aleph_1-$vollständiger Ultrafilter in einer $\sigma-$Algebra $\mathfrak{A}$ ist, so liefert dieser ein $\sigma-$additives, zweiwertiges Maß μ_U, definiert durch $\mu_U = \chi_U \restriction \mathfrak{A}$, wo χ_U die charakteristische Funktion von U ist. Daher werden manchmal maßtheoretische Sprechweisen angewandt werden, wie „fast überall (bzw. nirgends)“, was zu verstehen ist als „auf einer Menge von Maß eins (bzw. null)“.

1.1.2 Lemma. *Für einen Ultrafilter U auf x sind äquivalent:*

(a) U ist $\lambda-$vollständig.

(b) Es gibt keine Partition von x in weniger als λ viele Teilmengen, von denen keine Element von U ist.

(c) Es gibt keine Partition eines Elements $a \in U$ in weniger als λ viele Teilmengen, von denen keine Element von U ist.

□

1.1.3 Definition. Ein Ultrafilter U auf x ist ein *Hauptultrafilter* oder *trivialer Ultrafilter,* wenn ein $y \in x$ existiert, so daß $U = \{z \subseteq x \mid y \in z\}$. Ein Ultrafilter, der kein Hauptultrafilter ist, heißt *nichttrivial.* □

Wenn es eine Kardinalzahl mit einem $\aleph_1-$vollständigen, nichttrivialen Ultrafilter gibt, dann existiert auch eine Kardinalzahl κ mit einem $\kappa-$vollständigen, nichttrivialen Ultrafilter auf κ : Sei κ minimal, so daß ein $\aleph_1-$vollständiger, nichttrivialer Ultrafilter U auf κ existiert. Wenn U nicht $\kappa-$vollständig wäre, dann existierte eine Partition $f : \kappa \longrightarrow \kappa' < \kappa$ von κ in Teilmengen, die keine Elemente von U sind. Dann wäre das Bildmaß von μ_U nach f ein *sigma*$-$additives Maß auf κ', und der assoziierte Ultrafilter auf κ' nichttrivial und $\aleph_1-$vollständig, im Widerspruch zur Minimalität von κ'. Dabei ist das Bildmaß $f\mu_U$ wie in der Maßtheorie definiert: $f\mu_U(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_U(f^{-1}“X)$. Dies mag die nächste Definition motivieren:

1.1.4 Definition. Eine Kardinalzahl κ ist *meßbar,* wenn ein nichttrivialer, $\kappa-$vollständiger Ultrafilter auf κ existiert. □

Es stellte sich bald heraus, daß eine meßbare Kardinalzahl unerreichbar ist, sogar, daß es κ viele unerreichbare Kardinalzahlen unterhalb einer meßbaren Zahl κ gibt. Für Beweise sei auf [Jech78] verwiesen.

1.1.5 Definition. Für Folgen $\langle X_\nu \mid \nu < \kappa \rangle$ bzw. $\langle Y_a \mid a \in [\kappa]^{<\omega} \rangle$ von Teilmengen einer Kardinalzahl κ ist deren *diagonaler Durchschnitt* definiert, wie folgt:

$$\triangle_{\nu<\kappa} X_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{\nu < \kappa \mid \forall \mu < \nu \quad \nu \in X_\mu\} \quad \text{und}$$

$$\bigtriangleup_{a\in[\kappa]^{<\omega}} Y_a \stackrel{\text{def}}{=} \{\nu < \kappa \mid \forall b \in [\nu]^{<\omega} \quad \nu \in Y_b\}.$$

□

Es wurde von Fodor gezeigt, daß der *club*-Filter auf einer regulären Kardinalzahl die erste Eigenschaft des nächsten Satzes hat, weshalb der Satz nach ihm benannt wird:

1.1.6 Satz (Fodor). *Für einen $\kappa-$vollständigen, nichttrivialen Ultrafilter auf κ sind äquivalent:*

(a) Wenn $f : A \longrightarrow \kappa$ regressiv ist für ein $A \in U$ (d.h., f ist eine Auswahlfunktion), dann existiert $B \subseteq A$, so daß $B \in U$ und $f``B = \{\nu_0\}$ für ein $\nu_0 < \kappa$.

(b) Wenn $f : A \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}$ die Eigenschaft hat, daß $\forall \nu \in A \quad f(\nu) \in [\nu]^{<\omega}$ und $A \in U$, dann existiert $B \in U$, so daß $B \subseteq A$ und $f``B = \{b_0\}$ für ein $b_0 \in [\kappa]^{<\omega}$.

(c) Für eine Folge $\langle X_\nu \mid \nu < \kappa \rangle \in {}^\kappa U$ ist $\bigtriangleup_{\nu<\kappa} X_\nu \in U$.

(d) Für eine Folge $\langle Y_a \mid a \in [\kappa]^{<\omega} \rangle \in {}^{[\kappa]^{<\omega}} U$ ist $\bigtriangleup_{a\in[\kappa]^{<\omega}} Y_a \in U$.

Beweis. Daß (a) und (b), bzw. (c) und (d) äquivalent sind, ist leicht zu sehen, und die Äquivalenz zwischen (a) und (c) ergibt sich via Kontraposition aus der Definition des diagonalen Schnitts. □

An dieser Stelle sei noch eine Variation des Fodorschen Satzes angegeben:

1.1.7 Lemma. *Sei $Y \subseteq$ On unbeschränkt und abgeschlossen, sowie $f : Y \longrightarrow$ On eine regressive Funktion. Dann existiert δ, so daß $f^{-1}``\{\delta\}$ unbeschränkt in den Ordinalzahlen ist.*

Beweis. Die Annahme des Gegenteils wird zum Widerspruch geführt. Es wird eine Folge $\langle \delta_n \mid n < \omega \rangle$ definiert, wie folgt:

Sei $\delta_0 \in \mathrm{ran}(f)$ beliebig. Wenn δ_n bereits definiert ist, so sei $\bar{\delta}_{n+1} = \min(\mathrm{ran}(f) \setminus (\delta_n + 1))$ (dies ist möglich, da nach Widerspruchsannahme das Bild von f unbeschränkt ist.)

Setze dann: $\delta_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sup f^{-1}``(\bar{\delta}_{n+1} + 1)$ (existent nach Widerspruchsannahme).

Nach Konstruktion ist die definierte Folge streng monoton wachsend.

Sei $\delta_\omega = \sup_{n<\omega} \delta_n$. Dann ist δ_ω ein Limespunkt von Y, also nach Abgeschlossenheit auch ein Element von Y. $f(\delta_\omega) < \delta_\omega$, da f regressiv ist. Sei $n < \omega$ mit $f(\delta_\omega) < \delta_n$. Das heißt: $\delta_\omega \in f^{-1}``\delta_n \subseteq \sup(f^{-1}``\delta_n) < \delta_{n+1} < \delta_\omega$, ein Widerspruch. □

1.1.8 Definition. Ein nichttrivialer, $\kappa-$vollständiger Ultrafilter auf κ ist *normal,* wenn er eine (also alle) der äquivalenten Eigenschaften (a)-(d) aus Satz 1.1.6 hat. □

Es folgt eine Definition, die für spätere kombinatorische Argumente wichtig sein wird:

1.1.9 DEFINITION.

(a) Sei $f : [A]^n \longrightarrow B$. Eine Teilmenge H von A ist *homogen* für f, wenn $|f``[H]^n| = 1$.

(b) Sei $f : [A]^{<\omega} \longrightarrow B$. Eine Teilmenge H von A ist *homogen* für f, wenn H für alle $n < \omega$ homogen ist für $f \restriction [A]^n$.

□

Der folgende Satz erinnert an Ramseys Theorem, welches besagt, daß die Partitionsrelation $\omega \longrightarrow (\omega)^m_n$ für alle $m, n \in \omega$ gilt, das heißt, daß zu jeder Partition der $m-$elementigen Teilmengen von ω in n Teile eine unendliche, homogene Menge existiert, also eine, deren $m-$elementige Teilmengen allesamt in dem gleichen Teil der Partition liegen:

1.1.10 SATZ (ROWBOTTOM). *Sei κ meßbar, U ein normaler Ultrafilter auf κ, $B \in U$ und $f : [B]^{<\omega} \longrightarrow \lambda$ für ein $\lambda < \kappa$. Dann existiert eine Menge $A \in U$, $A \subseteq B$, die homogen ist für f.*

Beweis. Es wird per Induktion auf $n \in \omega$ gezeigt:

Wenn $g : [B]^n \longrightarrow \lambda$, dann existiert eine Menge $A \in U$, $A \subseteq B$, die homogen ist für g.

Damit ist der Satz bewiesen, denn wenn für $n < \omega$ eine für $f \restriction [B]^n$ homogene Menge $A_n \subseteq B$ mit $A_n \in U$ gegeben ist, so ist $A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n<\omega} A_n$ homogen für f, und $A \in U$ nach $\kappa-$Vollständigkeit von U.
Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen.
$\boxed{n = 1}$ Gäbe es keine für g homogene Teilmenge von B, die in U liegt, so wäre g, bzw. genaugenommen die Funktion $\tilde{g} : B \longrightarrow \lambda$, die durch $\tilde{g}(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} g(\{\nu\})$ definiert ist, eine Partition von B in weniger als κ viele Nicht-Filterelemente, im Widerspruch zu Teil (c) von Lemma 1.1.2, da U nach Voraussetzung $\kappa-$vollständig ist.

$\boxed{n \longrightarrow n+1}$ Sei $g : [B]^{n+1} \longrightarrow \lambda$. Für $a \in [B]^n$ sei $g_a : B \longrightarrow \lambda$ definiert durch

$$g_a(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g(a \cup \{\xi\}) & \text{wenn } a \subseteq \xi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie im Fall $n = 1$ sei $X_a \subseteq B$ homogen für g_a, also g_a konstant auf X_a und $X_a \in U$. Nach der Charakterisierung (d) aus Satz 1.1.6 ist $X \in U$, wo

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \underset{a \in [B]^n}{\triangle} X_a.$$

Sei $b \in [X]^n$, $\mu, \nu \in X$ und $b \subseteq \mu, \nu$. Dann ist $g(b \cup \{\mu\}) = g(b \cup \{\nu\})$, denn $\mu \in X_b$ und $\nu \in X_b$ nach Definition des diagonalen Durchschnitts, also

$$g(b \cup \{\nu\}) = g_b(\nu) = g_b(\mu) = g(b \cup \{\mu\}).$$

Definiere also $\tilde{g} : [X]^n \longrightarrow \lambda$ durch

$$\tilde{g}(a) \stackrel{\text{def}}{=} g(a \cup \{\xi\}) \quad \text{für ein (und somit für alle) } \xi \in X \text{ mit } a \subseteq \xi$$

(ein solches ξ existiert immer, da $X \in U$, also insbesondere unbeschränkt in κ ist).

Nach Induktionsvoraussetzung existiert $A \subseteq X$ mit $A \in U$, so daß A homogen ist für $\tilde{g}$. Dann ist A auch homogen für g :

Seien a und b $(n+1)-$elementige Teilmengen von A, $\alpha = \max(a)$, $\beta = \max(b)$ und $\tilde{a} = a \setminus \{\alpha\}$, $\tilde{b} = b \setminus \{\beta\}$. Dann ist

$$g(a) = g(\tilde{a} \cup \{\alpha\}) = \tilde{g}(\tilde{a}) = \tilde{g}(\tilde{b}) = g(\tilde{b} \cup \{\beta\}) = g(b),$$

weil A homogen ist für $\tilde{g}$. Da a und b beliebige Elemente von $[A]^{n+1}$ waren, ist A homogen für g. □

1.2 Forcing

Dieser Abschnitt dient dazu, die wichtigsten Fakten aus der Theorie des Forcing zusammenzustellen. Wenn nichts anderes gesagt wird, ist mit M immer ein transitives, abzählbares Modell von ZFC gemeint, und $\mathbb{P} = \langle |\mathbb{P}|, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle \in M$ eine partielle Ordnung mit einem maximalen Element $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$. Wie üblich, wird sowohl auf den notationellen Unterschied zwischen $\mathbb{P}$ und $|\mathbb{P}|$, als auch auf den Index $_{\mathbb{P}}$ verzichtet, wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, was gemeint ist. Elemente von $\mathbb{P}$ werden oft als *Bedingungen* bezeichnet, und wenn $p \leq q$, ist p eine *Erweiterung* von q. Für Bedingungen p und q heißt $p \perp q$ (p und q sind *inkompatibel*), daß es keine gemeinsame Erweiterung von p und q gibt, oder äquivalent, daß es keinen Filter gibt, der sowohl p, als auch q enthält. Wenn p und q nicht inkompatibel sind, so wird dafür $p \parallel q$ geschrieben.

1.2.1 DEFINITION. Sei $A \subseteq \mathbb{P}$.

(a) A ist *offen (in $\mathbb{P}$)*, wenn $\forall p \in A\ \forall q \leq p \quad q \in A$.

(b) A ist *dicht (in $\mathbb{P}$)*, wenn $\forall p \in \mathbb{P}\ \exists q \leq p \quad q \in A$.

Ein Filter $F \subseteq \mathbb{P}$ in $\mathbb{P}$ ist $\mathbb{P}-$*generisch* über M, wenn er jede dichte Teilmenge $D \in M$ von $\mathbb{P}$ schneidet.

Seien $\mathbb{Q} = \langle |\mathbb{Q}|, \leq_{\mathbb{Q}}, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \rangle \in M$ eine weitere partielle Ordnung und $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ mit $i \in M$. i ist eine *dichte Einbettung,* wenn

(1) $\forall p_1 \leq p_2 \in \mathbb{P} \quad i(p_1) \leq i(p_2)$.

(2) $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P} \quad p_1 \perp p_2 \longrightarrow i(p_1) \perp i(p_2)$.

(3) $i``\mathbb{P}$ ist dicht in $\mathbb{Q}$.

$\square$

1.2.2 SATZ. *Es gibt bis auf Isomorphie genau eine $M-$vollständige, Boolesche Algebra $\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} \text{B.A.}(\mathbb{P})$ mit einer dichten Einbettung $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{B}$, $i \in M$.*

Bemerkung: Auch wenn die Bezeichnung dies suggeriert, ist die dichte Einbettung i im Allgemeinen nicht injektiv. Sie wird injektiv sein, wenn $\mathbb{P}$ *separativ* ist, das heißt, wenn $\mathbb{P}$ erfüllt:

$$\forall p, q \in \mathbb{P} \quad (p \not\leq q \longrightarrow \exists r \leq p \quad (r \perp q)).$$

Für Details sei auf [Jech78, S.153f.] verwiesen.

Man kann die Boolesche Algebra aus 1.2.2 darstellen als die Menge der regulär offenen Mengen in $\mathbb{P}$ bezüglich der Topologie aus Definition 1.2.1, also der Teilmengen A von $\mathbb{P}$ mit $A = \text{int}(\text{cl}(A))$. Die Einbettung $i : \mathbb{P} \longrightarrow \text{B.A.}(\mathbb{P})$ ist dann gegeben durch $i(p) \stackrel{\text{def}}{=} \text{int}(\text{cl}(\{p\}))$.

Bevor die Forcing-Relation definiert werden kann, wird die Forcing-Sprache eingeführt. Sie besteht aus den üblichen Symbolen der mengentheoretischen Sprache, $\in$ und $=$, sowie einem Prädikat $\dot{A}$, das auch in die über M verwendete Sprache aufgenommen wird und dort durch $A \subseteq M$ interpretiert wird (die Verallgemeinerung auf mehrere Prädikate ist problemlos), und Konstanten, sogenannten *Namen,* die rekursiv definiert werden, wie folgt:

1.2.3 DEFINITION. τ ist ein $\mathbb{P}-$*Name* genau dann, wenn τ eine Relation ist und

$$\forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau \quad (\sigma \text{ ist ein } \mathbb{P}\text{-Name und } p \in \mathbb{P}).$$

Die Klasse der $\mathbb{P}-$Namen in V ist

$$V^{\mathbb{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \mid \sigma \text{ ist ein } \mathbb{P}-\text{Name}\},$$

und analog ist die $M-$Klasse der $\mathbb{P}-$Namen definiert durch

$$M^{\mathbb{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in M \mid M \models (\sigma \text{ ist ein } \mathbb{P}-\text{Name})\}.$$

Für einen über M $\mathbb{P}-$generischen Filter G und τ in $M^{\mathbb{P}}$ ist die $G-$*Interpretation* von τ rekursiv definiert durch

$$\tau^G \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma^G \mid \exists p \in G \quad \langle \sigma, p \rangle \in \tau\}.$$

Für $x \in M$ ist der *kanonische Name* $\check{x}$ für x :

$$\check{x} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle \check{y}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle \mid y \in x\}.$$

$\square$

Anhand der Klasse der $\mathbb{P}-$Namen läßt sich zu einem Filter, der $\mathbb{P}-$generisch ist über M, die generische Erweiterung $M[G]$ konstruieren:

$$M[G] \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau^G \mid \tau \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

Offenbar ist $M \subseteq M[G]$, da $\check{x}^G = x$ für jedes $x \in M$. Außerdem ist $M[G]$ transitiv und hat die gleichen Ordinalzahlen wie M.

Nun kann bald die Forcing-Relation eingeführt werden. Die genauen Details ihrer Definition sind unwesentlich; man kann den Umweg über die Boolesche Algebra B.A.($\mathbb{P}$) gehen, was die Definition vereinfacht, oder man definiert die Relation direkt aus der partiellen Ordnung $\mathbb{P}$, wodurch die Definition komplizierter wird, man sich aber die Behandlung Boolescher Algebren erspart. Den ersteren Weg wählte Jech in [Jech78], während Kunen den letzteren beschritt; siehe [Kunen80]. Hier wird eher der von Kunen gewählte Ansatz verfolgt, jedoch ist es manchmal hilfreich, mit Booleschen Algebren zu argumentieren. Deshalb sei kurz angedeutet, wie man Kunens Ansatz in Jechs Methode übersetzen kann. Der Hauptunterschied besteht in den Definitionen von Namen. Bei Kunen sind es Relationen, während es bei Jech Funktionen sind, die Werte in $\mathbb{B}$ =B.A.($\mathbb{P}$) annehmen. Wenn aber $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ gegeben ist, so erhält man durch die Setzung

$$\tau(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{\mathbb{B}} \{i(p) \mid \langle \sigma, p \rangle \in \tau\}$$

eine Funktion von $\mathrm{dom}(\tau)$ nach $\mathbb{B}$ und kann die Definition, die man bei Jech nachlesen kann, anwenden. Dabei ist $i : \mathbb{P} \longrightarrow B.A.(\mathbb{P})$ die Einbettung aus 1.2.2.

Hier wird also der Ansatz von Kunen gewählt, und es fällt auf, daß es bei jenem keine zusätzlichen Prädikate gibt. Die Definition der Forcing-Relation bei Kunen erfolgt per Induktion auf dem Aufbau der Formeln der Forcing-Sprache. Hier wird diese Definition übernommen (aber nicht wiederholt) und erweitert für den Fall der Atomformeln der Gestalt $\dot{A}\sigma$, wobei σ ein $\mathbb{P}-$Name ist, und $\dot{A}$ das zusätzliche Prädikatensymbol. Die Intention ist, daß die Interpretation von $\dot{A}$ über $M[G]$ mit derjenigen über M übereinstimmen soll. In den Anwendungen wird das zusätzliche Prädikat mit $\dot{M}$ bezeichnet und durch M interpretiert, so daß gewährleistet ist, daß man in der generischen Erweiterung Aussagen über das Grundmodell formulieren kann. Man kann dies auch ohne zusätzliches Prädikat erreichen, die hier gewählte Vorgehensweise ist aber der sichere Weg des „logischen Puristen", vgl. [Jech78, S.262].

1.2.4 Definition. Die *Forcing-Relation* $\Vdash$ $(= \Vdash_{\mathbb{P}})$ ist in M definiert wie in [Kunen80, S.195f., Definition 3.3], mit dem Zusatz

$$p \Vdash \dot{A}\sigma \stackrel{\text{def}}{\iff} \{q \leq p \mid \exists x \quad \dot{A}x \ \wedge \ q \Vdash \sigma = \check{x}\} \text{ ist dicht unter } p.$$

Dabei ist $p \in \mathbb{P}$ und $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. □

Durch diese Erweiterung der Definition der Forcing-Relation behält offenbar das folgende Lemma, für dessen Beweis auf [Kunen80, S.197, Lemma 3.4] verwiesen sei, seine Gültigkeit:

1.2.5 Lemma. *Für $p \in \mathbb{P}$ und eine Forcing-Aussage φ sind äquivalent:*

(1) $p \Vdash \varphi$.

(2) $\forall q \leq p \quad q \Vdash \varphi$.

(3) $\{q \leq p \mid q \Vdash \varphi\}$ *ist dicht unter* p.

□

1.2.6 SATZ (FORCING-THEOREM). *Sei* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *eine Formel in der mengentheoretischen Sprache mit zusätzlichem Prädikat* $\dot{A}$, *deren freie Variablen allesamt angegeben sind. Seien* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$. *Sei* G *ein* $\mathbb{P}-$*generischer Filter über* M. *Dann*

(1) Wenn $p \in G$ *und* $M \models p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, *dann* $M[G] \models \varphi(\tau_1^G, \ldots, \tau_n^G)$.

(2) Wenn $M[G] \models \varphi(\tau_1^G, \ldots, \tau_n^G)$, *dann existiert* $p \in G$ *mit* $M \models p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Beweis. Der Beweis für Formeln, in denen das Prädikat $\dot{A}$ nicht vorkommt, kann in [Kunen80, S.198f.] nachgelesen werden. Nun wird zunächst gezeigt, daß die Behauptung erfüllt ist für Atomformeln der Gestalt $\dot{A}\sigma$ unter Verwendung der Tatsache, daß sie für alle anderen Atomformeln zutrifft.

Zu (1): Sei $p \in G$, $M \models p \Vdash \dot{A}\sigma$. Nach Definition heißt dies, daß $D = \{q \leq p \mid \exists x \quad Ax \ \wedge \ q \Vdash \sigma = \check{x}\}$ dicht ist unter p. Da G generisch ist, folgt $G \cap D \neq \emptyset$ (Denn $D \cup \{r \in \mathbb{P} \mid r \perp p\}$ ist dicht in $\mathbb{P}$). Sei also $q \in D \cap G$, das heißt $M \models \dot{A}x$ und $q \Vdash \sigma = \check{x}$ für ein $x \in M$. Da (1) für die Atomformel $\sigma = \check{x}$ zutrifft, folgt: $M[G] \models \sigma^G = \check{x}^G = x$. Aber $M \models \dot{A}x$, also $x \in A$, das heißt, da $\dot{A}$ auch über $M[G]$ durch A interpretiert wird: $M[G] \models \dot{A}\sigma^G$.

Zu (2): Sei $M[G] \models \dot{A}\sigma^G$ vorausgesetzt. Dann existiert $x \in M$ mit $\sigma^G = x$, da $A \subseteq M$. Also $M[G] \models \sigma_G = \check{x}^G$. Da (2) für diese Atomformel gilt, existiert $p \in G$ mit $p \Vdash \sigma = \check{x}$. Also ist

$$\tilde{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{q \leq p \mid (M \models \dot{A}x) \text{ und } (q \Vdash \sigma = \check{x})\}$$

dicht unter p. Somit ist auch

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{q \leq p \mid M \models (\exists x \quad \dot{A}x \ \wedge \ q \Vdash \sigma = \check{x})\}$$

dicht unter p, da $D \supseteq \tilde{D}$. Dies heißt aber nach Definition von $\Vdash$ gerade, daß $p \Vdash \dot{A}\sigma$.

Der Rest des Beweises erfolgt per Induktion auf dem Formelaufbau genau wie in [Kunen80, S.197ff., Theorem 3.5] unter Verwendung der Gültigkeit des Satzes für alle Atomformeln.

□

1.2.7 SATZ. $M[G] \models \text{ZFC}$.

Beweis. Trotz der Erweiterung der Forcing-Sprache läßt sich der Beweis aus [Kunen80, S.201, Theorem 4.2] *verbatim* übernehmen. □

Im Beweis des vorigen Satzes war das Argument, das die Gültigkeit des Auswahlaxioms in $M[G]$ zeigte, die einzige Stelle, an der das Auswahlaxiom in M benötigt wurde. Somit erhält man:

1.2.8 KOROLLAR. *Wenn* N *ein ZF-Modell ist,* $\mathbb{P} \in N$ *eine partielle Ordnung und* G *ein* $\mathbb{P}-$*generischer Filter über* N, *dann ist auch* $N[G]$ *ein ZF-Modell.* □

1.2.9 SATZ. *Seien N und N' transitive ZF-Modelle, $\mathbb{P} \in N$ und G sei $\mathbb{P}-$generisch über N. Sei weiterhin $G \in N'$, sowie $N \subseteq N'$. Dann gilt auch $N[G] \subseteq N'$.*

Beweis. Es gilt: $N^{\mathbb{P}} \subseteq N \subseteq N'$, also ist für $\tau \in N^{\mathbb{P}}$ die $G-$Interpretation τ^G von τ, gebildet in N', da definierbar, ein Element von N' nach Aussonderung in N'. Aber τ^G ist absolut für transitive ZF-Modelle, also $\tau^G = (\tau^G)^{N'} \in N'$, das heißt $N[G] \subseteq N'$. □

Den Beweis des nächsten Satzes findet man in [Kunen80, S.221, Theorem 7.11].

1.2.10 SATZ. *Seien i, $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ Elemente von M und $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ eine dichte Einbettung zwischen partiellen Ordnungen. Für $H \subseteq \mathbb{P}$ sei $\tilde{\imath}(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists p \in H \quad i(p) \leq q\}$ (also falls H ein Filter ist, so ist $\tilde{\imath}(H)$ der von $i``H$ in $\mathbb{Q}$ erzeugte Filter). Dann gelten*

(a) Wenn $H \subseteq \mathbb{Q}$ ein $\mathbb{Q}-$generischer Filter über M ist, so ist $i^{-1}``H$ ein $\mathbb{P}-$generischer Filter über $M$ und $H = \tilde{\imath}(i^{-1}``H)$.

(b) Wenn $G \subseteq \mathbb{P}$ ein $\mathbb{P}-$generischer Filter über M ist, so ist $\tilde{\imath}(G)$ ein $\mathbb{Q}-$generischer Filter über M und $G = i^{-1}``\tilde{\imath}(G)$.

(c) Wenn in (a) bzw. (b) $G = i^{-1}``H$ bzw. $H = \tilde{\imath}(G)$, dann ist $M[G] = M[H]$.

□

Also erhält man durch Erzwingung mit $\mathbb{P}$ oder $\mathbb{Q}$ die gleichen generischen Erweiterungen, falls eine dichte Einbettung zwischen diesen partiellen Ordnungen existiert. Nach 1.2.2 läßt sich zu einer beliebigen partiellen Ordnung $\mathbb{P}$ eine vollständige Boolesche Algebra $\mathbb{B}$ zusammen mit einer dichten Einbettung von $\mathbb{P}$ in $\mathbb{B}$ finden. Nach dem soeben angegebenen Satz heißt dies, daß man sich theoretisch auf Forcing mit vollständigen Booleschen Algebren beschränken kann, was manche Beweise vereinfacht.

An dieser Stelle werden noch die Definitionen von - und grundlegenden Resultate über - Produkt-Forcing und iteriertes Forcing gebracht. Es werden nur Produkte und Iterationen der Länge zwei benötigt, so daß kein großer theoretischer Aufwand betrieben werden muß, und auch taucht nicht die Frage auf, wie man Produkte und Iterationen von Limeslänge behandelt. Zunächst wird wiederholt, was unter dem Produkt zweier partieller Ordnungen mit maximalem Element zu verstehen ist:

1.2.11 DEFINITION. Seien $\mathbb{P}_0 = \langle |\mathbb{P}_0|, \leq_0, \mathbb{1}_0\rangle$ und $\mathbb{P}_1 = \langle |\mathbb{P}_1|, \leq_1, \mathbb{1}_1\rangle$ zwei partielle Ordnungen. Deren Produkt ist:

$$\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle |\mathbb{P}_0| \times |\mathbb{P}_1|, \leq, \mathbb{1}\rangle,$$

wobei $\leq$ definiert ist durch

$$\langle p_0, p_1\rangle \leq \langle q_0, q_1\rangle \stackrel{\text{def}}{\iff} p_0 \leq_0 q_0 \ \wedge \ p_1 \leq_1 q_1$$

und $\mathbb{1} = \langle \mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1\rangle$. □

1.2.12 SATZ. *Seien $\mathbb{P}_0$ und $\mathbb{P}_1$ partielle Ordnungen in M, sowie $G_0 \subseteq \mathbb{P}_0$ und $G_1 \subseteq \mathbb{P}_1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $G_0 \times G_1$ ist $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1-$generisch über M.

(2) G_0 ist $\mathbb{P}_0-$generisch über M und G_1 ist $\mathbb{P}_1-$generisch über $M[G_0]$.

(3) G_1 ist $\mathbb{P}_1-$generisch über M und G_0 ist $\mathbb{P}_0-$generisch über $M[G_1]$.

Wenn eine (und somit alle) der Aussagen (1)-(3) zutreffen, dann ist

$$M[G_0 \times G_1] = M[G_0][G_1] = M[G_1][G_0].$$

□

Der Beweis steht in [Kunen80, S.253, Theorem 1.4].

Die Grundidee des iterierten Forcing ist, zunächst mit einer partiellen Ordnung, die im Grundmodell liegt, zu erzwingen, und dann eine Ordnung zu verwenden, die in der generischen Erweiterung, aber eventuell außerhalb des Grundmodells liegt. Wenn ein Name für die zweite Ordnung gegeben ist, der in jeder Erweiterung bezüglich der ersten Ordnung als eine partielle Ordnung interpretiert wird (und es existiert immer ein solcher, zumindest für eine zur zweiten Ordnung isomorphen Ordnung; siehe [Kunen80, S.268f.]), so kann man aus diesem und der ersten Ordnung eine „produktähnliche Ordnung“ konstruieren, die die gleichen generischen Erweiterungen liefert, wie die zweistufige Iteration.

1.2.13 DEFINITION. Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung in M und seien π, $\leq_\pi$ und $\mathbb{1}_\pi$ Namen aus $M^{\mathbb{P}}$ und $\mathbb{1}_\pi \in \mathrm{dom}(\pi)$. Es gelte

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \leq_\pi \text{ ordnet } \pi \text{ partiell, mit maximalem Element } \mathbb{1}_\pi$$

(Diese Voraussetzungen werden zusammengefaßt durch die Aussage „π ist ein $\mathbb{P}-$Name für eine partielle Ordnung“). Dann ist der Träger der partiellen Ordnung $\mathbb{P} * \pi$

$$\{\langle p, \tau\rangle \mid \tau \in \mathrm{dom}(\pi) \ \wedge \ p \Vdash \tau \in \pi\},$$

und für $\langle p, \tau\rangle, \langle q, \sigma\rangle \in \mathbb{P} * \pi$ ist

$$\langle p, \tau\rangle \leq \langle q, \sigma\rangle \ \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ p \leq q \ \wedge \ p \Vdash \tau \leq_\pi \sigma.$$

Das maximale Element $\mathbb{1}$ von $\mathbb{P} * \pi$ ist definiert als $\mathbb{1} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_\pi\rangle$. □

Der nächste Satz ist das Analogon von Satz 1.2.12 für Iterationen in zwei Schritten.

1.2.14 SATZ. *Seien $\mathbb{P}$ und π wie in Definition 1.2.13.*

(a) Seien G_0 ein $\mathbb{P}-$generischer und G_1 ein $\pi^{G_0}-$generischer Filter über M bzw. $M[G_0]$. Setze

$$G_0 * G_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle p, \tau\rangle \mid p \in G_0 \ \wedge \ \tau \in \mathrm{dom}(\pi) \ \wedge \ \tau^{G_0} \in G_1\}.$$

Dann ist $G_0 * G_1$ ein $\mathbb{P} * \pi-$generischer Filter über M und $M[G_0][G_1] = M[G_0 * G_1]$.

(b) Sei umgekehrt G $\mathbb{P} * \pi-$generisch über M. Setze

$$\begin{aligned} G_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P} \mid \exists \tau \quad \langle p, \tau\rangle \in G\}, \text{ und} \\ G_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{\tau^{G_0} \mid \exists p \quad \langle p, \tau\rangle \in G\}. \end{aligned}$$

Dann ist G_0 $\mathbb{P}-$generisch über M, G_1 $\pi^{G_0}-$generisch über $M[G_0]$ und $G = G_0 * G_1$. Also nach (a) $M[G_0][G_1] = M[G]$.

□

Für einen Beweis von (a) sei wieder auf [Kunen80, S.270f., Theorem 5.5] verwiesen; Teil (b) findet man in [Jech78, S.234f., Lemma 23.4(b)].

Die Bildung des Produkts $\mathbb{P} * \pi$ hat im Kontext von vollständigen Booleschen Algebren folgende Form: Wenn $\mathbb{B}_1$ eine vollständige Boolesche Algebra in M ist und

$$\mathbb{1}_{\mathbb{B}_1} \Vdash \dot{\mathbb{B}}_2 \text{ ist eine vollständige Boolesche Algebra}$$

für ein $\dot{\mathbb{B}}_2 \in M^{\mathbb{B}_1}$, dann ist $\mathbb{B}_1 * \mathbb{B}_2$ eine vollständige Boolesche Algebra in M, in der ein homomorphes Bild von $\mathbb{B}_1$ eine vollständige Subalgebra ist. Nach Identifikation von $\mathbb{B}_1$ mit diesem Bild erhält man, daß $\mathbb{B}_1$ eine vollständige Boolesche Subalgebra von $\mathbb{B}_1 * \mathbb{B}_2$ ist. Wenn G ein $\mathbb{B}_1 * \mathbb{B}_2-$generischer Filter ist, so ist $G \cap \mathbb{B}_1$ $\mathbb{B}_1-$generisch. Für die Einzelheiten der Konstrukion sei auf [Jech78, S.232f.] verwiesen. Die Bildung dieses Produkts läßt sich umkehren:

1.2.15 LEMMA. *Sei $\mathbb{B}_1$ in M eine vollständige Subalgebra der vollständigen Booleschen Algebra $\mathbb{D}$. Dann existiert $\dot{\mathbb{B}}_2 \in M^{\mathbb{B}_1}$, so daß $\mathbb{1}_{\mathbb{B}_1} \Vdash \dot{\mathbb{B}}_2$ ist eine vollständige Boolesche Algebra und*

$$\mathbb{D} \cong \mathbb{B}_1 * \dot{\mathbb{B}}_2.$$

$\dot{\mathbb{B}}_2$ wird mit $(\mathbb{D} : \mathbb{B}_1)$ bezeichnet, also $D \cong \mathbb{B}_1 * (D : \mathbb{B}_1)$.

□

Die Konstruktion von $(\mathbb{D} : \mathbb{B}_1)$ kann in [Jech78, S.237] nachgelesen werden.

Für die beiden folgenden Sätze reicht es zu verlangen, daß M ein abzählbares, transitives ZF-Modell ist, wie man sich anhand der Beweise überzeugen kann.

1.2.16 SATZ. *Seien $\mathbb{R}$ eine partielle Ordnung in M, G ein $\mathbb{R}-$generischer Filter über M, sowie N ein transitives ZFC-Modell mit $M \subseteq N \subseteq M[G]$. Dann existieren eine partielle Ordnung $\mathbb{P} \in M$ und $\mathbb{P}-$Namen $\pi, \leq_\pi$ und $\mathbb{1}_\pi \in M^{\mathbb{P}}$, so daß die in Definition 1.2.13 gemachten Voraussetzungen erfüllt sind mit*

$$\mathbb{R} \cong \mathbb{P} * \pi \text{ und } N = M[G_0],$$

wo G_0 und G_1 nach Identifikation von $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{P} * \pi$ definiert sind, wie in Satz 1.2.14. Dabei ist die Konstruktion von $\mathbb{P}$ und π unabhängig von G.

Beweis. Zunächst kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen werden, daß es sich bei allen beteiligten partiellen Ordnungen um vollständige Boolesche Algebren handelt; vgl. die Bemerkung nach 1.2.10. Setze für eine Forcing-Aussage φ :

$$\|\varphi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum\{p \in \mathbb{R} \mid p \Vdash \varphi\}.$$

Dann ist $\|\varphi\|$ die schwächste Bedingung, die φ erzwingt, genannt der Boolesche Wahrheitswert von φ. Sei

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{P}(\mathbb{R}))_N.$$

Da ZFC-Modelle durch die in ihnen als Elemente existenten Mengen von Ordinalzahlen determiniert sind, gibt es eine Menge $S \subseteq \mathrm{On}$ mit $S \in N$, so daß $Z \in M[S]$, wo $M[S]$ das kleinste transitive ZF-Modell bezeichne mit $S \in M[S]$, $M \subseteq M[S]$ und $\mathrm{On}_M = \mathrm{On}_{M[S]}$.

Für eine beliebige Menge X von Ordinalzahlen, $X \in M[G]$, sei

$$A_X \stackrel{\text{def}}{=} \text{Die in } M \text{ von } \{\|\check{\alpha} \in \dot{X}\| \mid \alpha \in \mathrm{On}_M\} \text{ erzeugte, vollständige Subalgebra von } \mathbb{R},$$

wo $\dot{X} \in M^{\mathbb{R}}$ ein Name für X sei. Dann ist $G \cap A_X \in M[X]$ und $X \in M[G \cap A_X]$, zu verifizieren ist, also $M[X] = M[G \cap A_X]$; vgl. [Jech78, S.265ff.].

Es gilt: $N = M[G \cap A_S]$. Um dies zu beweisen, reicht es zu zeigen, daß jede Menge $X \in N$ von Ordinalzahlen auch in $M[S] = M[G \cap A_S]$ liegt. Aber wenn $X \in N$ eine Menge von Ordinalzahlen ist, dann ist $G \cap A_X \in Z$, also $X \in M[Z] \subseteq M[S]$. Also ist $N = M[S] = M[G \cap A_S]$.

Da A_S eine vollständige Subalgebra von $\mathbb{R}$ ist, ist $A_S * (\mathbb{R} : A_S) \cong \mathbb{R}$, und die gewünschte Zerlegung von $\mathbb{R}$ ist gefunden.

Bei der Konstruktion von A_S wurde nicht auf G Bezug genommen, also ist das Ergebnis unabhängig von G. □

1.2.17 Satz. *Sei $G \times H$ ein $\mathbb{R} \times \mathbb{R}-$generischer Filter über M. Dann*

$$M[G] \cap M[H] = M.$$

Beweis. Die Inklusion von rechts nach links ist trivial, da sowohl $M[G]$, als auch $M[H]$ Erweiterungen von M sind. Zur anderen Richtung:

Sei $x \in M[G] \cap M[H]$ und $N = M[x]$ das kleinste ZFC-Modell mit $M \cup \{x\} \subseteq N$, das die gleichen Ordinalzahlen hat, wie M (Existenz dieses Modells ergibt sich aus [Jech78, S.265]). Nach Satz 1.2.16 ist $\mathbb{R} \cong \mathbb{P} * \pi$ für geeignetes $\mathbb{P} \in M$ und $\pi \in M^{\mathbb{P}}$, so daß

$$\begin{aligned} M[G] &= M[G_1][G_2], \qquad M[G_1] = N \text{ und} \\ M[H] &= M[H_1][H_2], \qquad M[H_1] = N \end{aligned}$$

für $\mathbb{P}-$generische G_1, H_1 und $\pi^{G_1}-$ bzw. $\pi^{H_1}-$generische G_2 bzw. H_2, so daß $G = G_1 * G_2$ und $H = H_1 * H_2$.

Da $(G_1 * G_2) \times (H_1 * H_2)$ $(\mathbb{P} * \pi) \times (\mathbb{P} * \pi)-$generisch über M ist, ist H_1 $\mathbb{P}-$generisch über $M[G_1][G_2]$. Da weiterhin $\mathbb{P} \in M[G_1]$, ist H_1 erst recht $\mathbb{P}-$generisch über $M[G_1]$. Aber $M[G_1] = M[H_1] = N$, also ist $H_1 \in M[G_1]$. Für die weitere Argumentation sei eine

Bezeichnung fixiert: $p \in \mathbb{P}$ ist ein *Atom,* wenn alle $q_1, q_2 \leq p$ kompatibel sind.

(1) H_1 enthält ein Atom.

Beweis von (1). Sei das Gegenteil angenommen. Da $H_1 \in M[G_1]$, ist $\mathbb{P} \setminus H_1 \in M[G_1]$, also $\mathbb{P} \setminus H_1$ nicht dicht nach Generizität von H_1. Sei also $z \in \mathbb{P}$ so, daß

$$\forall y \leq z \quad y \notin \mathbb{P} \setminus H_1,$$

also $\forall y \leq z \quad y \in H_1$. Insbesondere ist dann $z \in H_1$ ein Atom, da es in H_1 keine inkompatiblen Bedingungen gibt. $\square_{(1)}$

Für ein Atom a sei F_a definiert, wie folgt:

$$F_a \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq a \quad \vee \quad a \leq p\}.$$

Da a ein Atom ist, ist F_a ein Filter, und offensichtlich ist F_a generisch. Es gilt:

(2) Wenn ein generischer Filter F ein Atom a enthält, so ist $F = F_a$.

Beweis von (2). Es reicht zu zeigen, daß $F_a \subseteq F$ ist, denn nach der Maximalitätseigenschaft generischer Filter folgt daraus schon die Identität von F und F_a; vgl. [Kunen80, S.221, Lemma 7.10].

Sei also $p \in F_a$. Wenn $p \geq a$, dann $p \in F$, da $a \in F$ und F als Filter nach oben abgeschlossen ist.

Andernfalls ist $p \leq a$. Sei angenommen, daß $p \notin F$. Setze:

$$D = \{r \in \mathbb{P} \mid r \leq p \quad \vee \quad r \perp p\}.$$

Offenbar ist D dicht in $\mathbb{P}$. Sei also nach Generizität von F eine Bedingung $r \in F \cap D$. Da $a \in F$, ist $a \parallel r$, also auch $p \parallel r$ (um Letzteres zu sehen sei $s \leq a, r$. Da $p \leq a,\ s \leq a$ und a Atom ist, ist $p \parallel s$. Sei $t \leq p, s$. Dann ist $t \leq s \leq r$ und $t \leq p$, also $p \parallel r$.) Da aber $r \in D$ ist, folgt $r \leq p$. Somit ist $r \in F$ und $r \leq p$, also $p \in F$, da F nach oben abgeschlossen ist, ein Widerspruch. $\square_{(2)}$

Sei also $a \in H_1$ derart, daß

$$H_1 = F_a = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq a \quad \vee \quad a \leq p\}.$$

Da $(F_a)^{M[G_1]} = (F_a)^M$, und da $\mathbb{P} \in M$, folgt, daß $F_a = H_1 \in M$. Also $x \in N = M[H_1] = M$. Da x ein beliebiges Element von $M[G] \cap M[H]$ war, ist also die zu beweisende Inklusion gezeigt. $\square$

Am Ende dieses Abschnitts werden noch die grundlegenden Erhaltungssätze aufgeführt. Zunächst wird eine Definition gebraucht:

1.2.18 DEFINITION. Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung.

Eine Teilmenge A von $\mathbb{P}$ ist eine *Antikette in* $\mathbb{P}$, wenn ihre Elemente paarweise inkompatibel sind.

$\mathbb{P}$ erfüllt die $\theta-$*Kettenbedingung* oder $\theta-$*chain condition* (im folgenden als $\theta - c.c.$ abgekürzt), wenn die Mächtigkeit jeder Antikette in $\mathbb{P}$ kleiner ist als θ.

$\mathbb{P}$ ist $\lambda-$abgeschlossen, wenn es für jede Folge $\langle p_\nu \mid \nu < \beta \rangle$ in $\mathbb{P}$ der Länge $\beta < \lambda$ mit $\nu \leq \mu \longrightarrow p_\mu \leq p_\nu$ eine Bedingung $p \in \mathbb{P}$ gibt, so daß $p \leq p_\nu$ für alle $\nu < \beta$. □

Die im folgenden Satz verwendete Terminologie ist eigentlich selbsterklärend; Unklarheiten können aber bei Bedarf in [Kunen80, S.212, Definition 6.4] ausgeräumt werden.

1.2.19 Satz. *Sei $\mathbb{P} \in M$ und θ eine Kardinalzahl in M.*

(a) Wenn $\mathbb{P}$ die $\theta-c.c.$ in M erfüllt, dann erhält $\mathbb{P}$ Kofinalitäten $\geq \theta$ über M. Wenn θ regulär ist in M, dann erhält $\mathbb{P}$ Kardinalzahlen $\geq \theta$.

(b) Wenn $\mathbb{P}$ $\theta-$abgeschlossen ist, dann erhält $\mathbb{P}$ Kofinalitäten und Kardinalzahlen $\leq \theta$.

□

Für Beweise sei auf [Kunen80, S.213, Lemma 6.9 und S.215, Corollary 6.15] verwiesen.

1.3 Ultraprodukte

Da in Kapitel 4 Bezug genommen wird auf die aus der Modelltheorie stammende Ultraprodukt-Konstruktion, werden deren grundlegende Eigenschaften hier zusammengestellt. Man kann alles hier Aufgeführte sehr gut bei [Kanamori94] nachlesen. Im ursprünglichen, modelltheoretischen Kontext geht man aus von einem Ultrafilter auf einer Indexmenge I, und von Modellen M_i für $i \in I$. In den hier betrachteten Anwendungen werden alle M_i das mengentheoretische Universum V sein, also sollte man eigentlich genauer von Ultrapotenzen sprechen, was jedoch unüblich ist.

Sei κ eine meßbare Kardinalzahl und U ein normaler Ultrafilter auf κ. Es wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ eingeführt zwischen Funktionen aus ${}^\kappa V$, definiert durch:

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{\nu < \kappa \mid f(\nu) = g(\nu)\} \in U.$$

Das heißt, $f \sim g$ genau dann, wenn f fast überall mit g übereinstimmt. Die Äquivalenzklasse von f wird mit $[f]$ bezeichnet, wobei man durch bekannte Methoden dafür sorgen kann, daß dies keine echte Klasse ist, indem man sich z.B. nur auf zu f äquivalente Funktionen von minimalem Rang beschränkt. Dann ist

$${}^\kappa V/U \overset{\text{def}}{=} \{[f] \mid f \in {}^\kappa V\}.$$

Zwischen diesen Äquivalenzklassen wird eine Pseudo-Epsilonrelation E_U definiert durch:

$$[f] E_U [g] \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{\nu < \kappa \mid f(\nu) \in g(\nu)\} \in U.$$

Das Ultraprodukt wird dann definiert als

$$\mathrm{Ult}(V,U) \stackrel{\text{def}}{=} \langle {}^{\kappa}V/U, E_U\rangle.$$

Es gilt der Satz von Łoś, der per Induktion auf dem Formelaufbau bewiesen wird; vgl.[Jech78, S.306, Lemma 28.1].

1.3.1 Satz (Łoś). *Für eine Formel $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ und Funktionen $f_1,\ldots,f_n$ aus ${}^{\kappa}V$ gilt:*

$$\mathrm{Ult}(V,U) \models \varphi[[f_1],\ldots,[f_n]] \iff \{\nu<\kappa \mid \varphi[f_1(\nu),\ldots,f_n(\nu)]\} \in U$$

□

Da U $\kappa-$vollständig ist, ist $\mathrm{Ult}(V,U)$ fundiert ($\aleph_1-$Vollständigkeit würde schon ausreichen), und E_U ist mengenähnlich. Also kann man nach dem Mostowskischen Isomorphiesatz ein transitives Modell finden, das isomorph zu $\mathrm{Ult}(V,U)$ ist. Hier wird einfach das Ultraprodukt mit seinem transitiven Kollaps identifiziert.

Schließlich wird eine elmentare Einbettung j von V in das Ultraprodukt definiert durch:

$$j(x) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathrm{const}_x],$$

wo $\mathrm{const}_x : \kappa \longrightarrow \{x\}$ die konstante Funktion mit Funktionswert x ist. Daß dies eine elementare Einbettung definiert, folgt aus dem Satz von Łoś. Weiterhin ist der kritische Punkt von j, also die kleinste Ordinalzahl, die nicht auf sich selbst abgebildet wird, gerade κ.

Im Kontext von Ultraprodukten ergibt sich eine neue, äquivalente Formulierung von Normalität (vgl.[Jech78, S.316, Lemma 28.10]):

1.3.2 Lemma. *Folgende Aussagen sind äquivalent für einen $\kappa-$vollständigen Ultrafilter auf $\kappa > \omega$:*

(a) U ist normal.

(b) $[\mathrm{id}] = [\mathrm{id}]_U = \kappa$, wo id *die identische Funktion von κ in κ ist.*

In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß wenn $\tilde{U}$ ein $\kappa-$vollständiger, nichttrivialer Ultrafilter auf κ ist, es einen normalen Ultrafilter auf κ gibt: Wenn $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ eine Funktion ist, die in dem Ultraprodukt nach $\tilde{U}$ κ repräsentiert, also $[f]_{\tilde{U}} = \kappa$, dann leistet der von dem Bildmaß $f\mu_{\tilde{U}}$ abgeleitete Filter das Verlangte. Ein Beweis hierfür ist in [Jech78, S.317, Lemma 28.11] zu finden.

Abschließend sei noch kurz auf die Iteration der Ultraproduktkonstruktion eingegangen. Den Ausgangspunkt bildet eine Struktur $\langle M,U\rangle$, so daß $M \models \mathrm{ZFC} + U$ ist ein normaler Ultrafilter auf κ. In den Anwendungen in dieser Arbeit wird $U \in M$, und die Fundiertheit der durch Iteration entstehenden Modelle gewährleistet sein.

1.3.3 Definition. Die Iteration von $\langle M, U\rangle$ der Länge τ besteht aus Ordinalzahlen κ_α, Strukturen $\langle M_\alpha, U_\alpha\rangle$ mit

$$M_\alpha \models U_\alpha \quad \text{ist ein normaler Ultrafilter auf } \kappa_\alpha$$

und elementaren Einbettungen $j_\alpha^\beta : M_\alpha \longrightarrow M_\beta$ zwischen diesen Strukturen für $\alpha < \beta < \tau$, und wird definiert, wie folgt:
Setze: $M_0 \stackrel{\text{def}}{=} M$, $\quad U_0 \stackrel{\text{def}}{=} U$ und $\kappa_0 \stackrel{\text{def}}{=} \kappa$.
Wenn $\langle M_\alpha, U_\alpha\rangle$ schon definiert ist, $\alpha + 1 < \tau$, so sei

$$M_{\alpha+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Ult}(M_\alpha, U_\alpha).$$

Sei $j_\alpha^{\alpha+1} : M_\alpha \longrightarrow M_{\alpha+1}$ die zugehörige kanonische Einbettung. Setze dann:

$$U_{\alpha+1} \stackrel{\text{def}}{=} j_\alpha^{\alpha+1}(U_\alpha) \quad \text{und} \quad \kappa_{\alpha+1} \stackrel{\text{def}}{=} j_\alpha^{\alpha+1}(\kappa_\alpha).$$

Für $\gamma < \alpha$ definiere: $j_\gamma^{\alpha+1} \stackrel{\text{def}}{=} j_\alpha^{\alpha+1} \circ j_\gamma^\alpha$.

Wenn für eine Limeszahl $\beta < \tau$ schon alles unterhalb von β definiert ist, so sei

$$M_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \text{dir}\lim(\langle M_\alpha \mid \alpha < \beta\rangle, \langle j_\gamma^\delta \mid \gamma < \delta < \beta\rangle)$$

der gerichtete Limes der Vorgängerstrukturen samt Einbettungen; vgl.[Kanamori94, S.9f.]. Seien j_α^β die dazugehörigen Einbettungen, $U_\beta = j_0^\beta(U)$ und $\kappa_\beta = j_0^\beta(\kappa)$. Die Konstruktion wird nur solange fortgeführt, wie man fundierte Strukturen erhält. Folgende Schreibweise ist nützlich:

$$M_\alpha = \mathrm{Ult}^\alpha(M, U)$$

für $\alpha < \tau$. □

1.3.4 Lemma. *Sei $\alpha < \beta \leq \tau$.*

(a) $\mathrm{crit}(j_\alpha^\beta) = \kappa_\alpha$ *und* $j_\alpha^\beta(\kappa_\alpha) = \kappa_\beta$ *(also $\kappa_\alpha < \kappa_\beta$).*

(b) $j_\alpha^\beta(x) = x$ *für* $x \in V_{\kappa_\alpha} \cap M_\alpha$, $V_{\kappa_\alpha} \cap M_\alpha = V_{\kappa_\alpha} \cap M_\beta$ *und* $\mathcal{P}(\kappa_\alpha) \cap M_\alpha = \mathcal{P}(\kappa_\alpha) \cap M_\beta$.

(c) Wenn β eine Limeszahl ist, dann ist $\kappa_\beta = \sup_{\nu<\beta} \kappa_\nu$.

□

Einen Beweis hierfür findet man in [Kanamori94, S.250, Lemma 19.4].

1.4 Innere Modelle

Dieser Abschnitt dient vor allem dazu, Schreibweisen zu fixieren.

Mit L wird die von Gödel eingeführte, konstruktible Hierarchie bezeichnet, $L(A)$ ist der konstruktible Abschluß von $\mathrm{TC}(\{A\})$ und $L[A]$ ist Lévys konstruktible Hierarchie relativ zu A. Definitionen dieser Modelle können bei [Devlin84] und [Jech78] nachgelesen werden. Weiterhin werden die Modelle OD der aus Ordinalzahlen definierbaren Mengen und HOD der hereditär ordinal definierbaren Mengen x mit $\mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathrm{OD}$ benötigt, sowie der hereditär ordinal definierbare Abschluß von A und B, $\mathrm{HOD}(A, B)$. Für eine genauere Behandlung von OD, HOD und HOD(A) sei auf [Kunen80, S.157ff.] und [Jech78, S.132ff.] verwiesen.

Konkrete Eigenschaften dieser und anderer innerer Modelle werden an den (wenigen) Stellen angegeben, an denen sie benötigt werden.

Kapitel 2

Prikry-ähnliches Forcing

Dieses Kapitel beinhaltet eine eingehende Untersuchung einer Verallgemeinerung der von Prikry eingeführten Forcing-Konstruktion, die tatsächlich ein Spezialfall der hier Betrachteten ist, so daß alle Ergebnisse auch als Aussagen über die Originalkonstruktion aufgefaßt werden können, die allerdings, bis auf das Maximalitätsprinzip 2.3.2, für diesen Sonderfall schon bekannt sind. Die Verallgemeinerungen der für Prikrys Forcing bekannten Ergebnisse sind jedoch in den brisanten Fällen Verschärfungen. Die volle Tragweite der bewiesenen Resultate kommt also erst zutage, wenn man sie nicht nur auf Prikrys Forcing bezieht.

Die Generalisierung wird darin bestehen, daß den Ausgangspunkt im Allgemeinen ein Modell mit vielen meßbaren Kardinalzahlen bilden wird, und daß via Forcing unterhalb jedem Element aus einer zu spezifizierenden Teilmenge dieser meßbaren Zahlen eine Menge von Ordnungstyp höchstens ω, der ebenfalls festzulegen ist, adjungiert wird.

Sei also $D = \{\kappa_i \mid i < \alpha\} \subseteq \mathrm{On}$ eine Menge von meßbaren Kardinalzahlen. Um sinnvolle Erhaltungssätze zu bekommen, ist es nötig zu verlangen, daß D diskret ist, also daß

$$\forall i < \alpha \quad \bigcup_{j<i} \kappa_j < \kappa_i,$$

wobei $\langle \kappa_i \mid i < \alpha \rangle$ die monotone Aufzählung, und somit α der Ordnungstyp von D ist. Weiterhin sei eine Folge $\mathbf{U} = \langle U_i \mid i < \alpha \rangle$ normaler Ultrafilter fixiert; für $i < \alpha$ sei U_i auf κ_i. Schließlich sei eine Folge $\langle \eta_i \mid i < \alpha \rangle \in {}^{\alpha}((\omega{+}1) \setminus \{0\})$ gegeben. Die gesamte Konstruktion der partiellen Ordnung $\mathbb{P}$ wird von der Wahl von D, $\mathbf{U}$ und $\langle \eta_i \mid i < \alpha \rangle$ abhängen, die ab jetzt als fixiert betrachtet werden, um zu vermeiden, $\mathbb{P}(D, \mathbf{U}, \langle \eta_i \mid i < \alpha \rangle)$ schreiben zu müssen, um sich auf $\mathbb{P}$ zu beziehen.

2.0.1 Definition. Der Träger der partiellen Ordnung $\mathbb{P} = \langle |\mathbb{P}|, \leq \rangle$ bestehe aus den Paaren $\langle h, H \rangle$ mit den Eigenschaften

1. $H \in \prod_{i<\alpha} U_i$ und $\mathrm{dom}(h) \in [\alpha]^{<\omega}$.

2. $\forall i \in \mathrm{dom}(h) \quad \emptyset \neq h(i) \in [\kappa_i]^{<(1+\eta_i)}$.

3. $\forall i \in \mathrm{dom}(h) \quad h(i) \subseteq \min\ H(i)$.

4. $\forall i \in \mathrm{dom}(h) \forall j < i \quad \kappa_j < \min\ h(i)$.

Für $\langle h, H\rangle \in I\!P$ sei

$$\underline{h}(i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h(i) & \text{wenn } i \in \mathrm{dom}(h) \\ \emptyset & \text{wenn } i \in \alpha \setminus \mathrm{dom}(h). \end{cases}$$

Die Ordnung auf $|I\!P|$ wird definiert, wie folgt:
Für $\langle f, F\rangle, \langle h, H\rangle \in |I\!P|$ sei

$$\langle f, F\rangle \leq \langle h, H\rangle \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lll} \text{(a)} & \forall i < \alpha & \underline{f}(i) \supseteq \underline{h}(i) \wedge \underline{f}(i) \setminus \underline{h}(i) \subseteq H(i) \\ \text{(b)} & \forall i < \alpha & |\underline{f}(i)| < \eta_i \longrightarrow F(i) \subseteq H(i). \end{array}$$

□

Bemerkung: Man beachte, daß (a) bedeutet, daß $\underline{h}(i)$ ein Anfangsstück[1] von $\underline{f}(i)$ ist. Dies ist eine Konsequenz von Bedingung 3. der Definition des Trägers von $I\!P$.

Bedingung 2. hat zur Folge, daß $h(i)$ für $i \in \mathrm{dom}(h)$ auch dann endlich ist, wenn $\eta_i = \omega$, da in diesem Fall $1 + \eta_i = \eta_i = \omega$. Da weiterhin nach Bedingung 1. $\mathrm{dom}(h)$ endlich ist, ist also $\bigcup_{i \in \mathrm{dom}(h)} h(i)$ endlich.

Die Idee hinter diesen Definitionen ist, daß eine Bedingung $\langle h, H\rangle \in |I\!P|$ an jeder Stelle $i < \alpha$ ein Anfangsstück $\underline{h}(i)$ einer Teilmenge von κ_i festlegt (wobei in dem Fall, daß $\eta_i < \omega$ ist, das Anfangsstück schon die ganze Teilmenge sein kann) und $H(i)$ die Möglichkeiten der Erweiterung des Anfangsstücks leicht einschränkt: Es sind nur Erweiterungen möglich, die in $H(i)$ liegen, was im Sinne des mit U_i assoziierten Maßes auf $\mathcal{P}(\kappa_i)$ keine starke Einschränkung bedeutet, da $H(i)$ Maß eins hat, also „fast alle“ Erweiterungen erlaubt sind (in diesem Zusammenhang ist Lemma 2.2.3 interessant, welches besagt, daß diese Einschränkung doch stark genug ist, um Forcing-Aussagen zu entscheiden). So leuchtet denn auch die Abschwächung der Forderung $F(i) \subseteq H(i)$ zu Teil (b) der obigen Definition der partiellen Ordnungsrelation ein, wo dies nur verlangt wird, wenn $|\underline{f}(i)| < \eta_i$, wenn also die Teilmenge von κ_i nicht schon vollständig festgelegt ist; eventuelle Erweiterungsmöglichkeiten sollten andernfalls irrelevant sein. Man beachte, daß folglich $I\!P$ nicht antisymmetrisch ist, falls ein $i < \alpha$ existiert mit $\eta_i < \omega$.

Wenn $\kappa = \kappa_0$ eine meßbare Kardinalzahl ist, $D = \{\kappa_0\}$, $\alpha = 1$ und $\eta_0 = \omega$, so ist die hier betrachtete Ordnung vermittels der Abbildung $\langle h, H\rangle \mapsto \langle h(0), H(0)\rangle$ zu Prikrys Forcing isomorph, womit gerechtfertigt ist, sie als Prikry-ähnlich zu bezeichnen; zur Definition von Prikrys Forcing siehe [Kanamori94, S.234].

2.0.2 Definition. Für $\langle h, H\rangle \in |I\!P|$, $\gamma \leq \delta \leq \alpha$ und $A \subseteq |I\!P|$ setze

$$\langle h, H\rangle_\gamma^\delta \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \langle h \restriction [\gamma, \delta), H \restriction [\gamma, \delta)\rangle \quad \text{und}$$

[1] Für $x, y \subseteq \mathrm{On}$ ist x ein Anfangsstück von y genau dann, wenn $x = y \cap \mathrm{lub}(x)$.

$$A^\delta_\gamma \overset{\text{def}}{=} \{p^\delta_\gamma \mid p \in A\}.$$

Für $\langle f, F\rangle \in \mathbb{P}^\delta_\gamma,\ \langle h, H\rangle \in \mathbb{P}^{\delta'}_{\gamma'}$ und $[\gamma, \delta) \cap [\gamma', \delta') = \emptyset$ setze

$$\langle f, F\rangle^\frown \langle h, H\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle f \cup h, F \cup H\rangle.$$

Wenn $a \subseteq \mathrm{On}$ und $\nu < \mathrm{otp}(a)$, so sei

$$(a)_\nu = \text{ das } \nu-\text{te Element von } a \text{ entsprechend der monotonen Aufzählung.}$$

□

Bemerkung: $\mathbb{P}^\delta_\gamma$ wird mit einer partiellen Ordnungsrelation versehen durch die Identifizierung

$$\mathbb{P}^\delta_\gamma = \mathbb{P}(\{\kappa_i \mid i \in [\gamma, \delta)\}, \mathbf{U} \restriction [\gamma, \delta), \langle \eta_{\gamma+i} \mid i < \mathrm{otp}([\gamma, \delta))\rangle).$$

Dann gilt offenbar für $\gamma < \alpha$:

$$\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^\gamma_0 \times \mathbb{P}^\alpha_\gamma\ .$$

2.0.3 Definition. Für eine Funktion f sei $f[i \mapsto a]$ definiert durch:

$$f[i \mapsto a](j) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(j) & \text{wenn } j \in \mathrm{dom}(f) \setminus \{i\} \\ a & \text{wenn } j = i \text{ und } a \neq \emptyset \\ \text{nicht def.} & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

2.1 Grundlegende Eigenschaften

Dieser Abschnitt widmet sich der Entwicklung der grundlegenden Eigenschaften von $\mathbb{P}$. Die Beweismethoden sind nicht sonderlich kompliziert und bei den bewiesenen Aussagen handelt es sich um relativ einfache und wenig überraschende Beobachtungen, die jedoch den Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen bilden.

(1) *Sei $\langle h, H\rangle \in \mathbb{P},\ i < \alpha$ und $n < \eta_i$. Dann existiert ein $\langle h', H'\rangle$ mit*

$$\langle h', H'\rangle \leq \langle h, H\rangle \quad \textit{und} \quad |h'(i)| > n.$$

Beweis. Sei $\mu \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j<i} \kappa_j \ \cup\ \bigcup \underline{h}(i)$ und setze:

$$b \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{die ersten } (n+1) - |\underline{h}(i)| \text{ Elemente von } H(i) \setminus (\mu + 1) & \text{wenn } n \geq |\underline{h}(i)| \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann leistet

$$\langle h', H'\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle h[i \mapsto \underline{h}(i) \cup b], H[i \mapsto H(i) \setminus \mathrm{lub}(\underline{h}(i) \cup b)]\rangle$$

das Verlangte. $\square_{(1)}$

(2) *Wenn $\mathfrak{G}$ $I\!\!P-$generisch ist, so sei die zu $\mathfrak{G}$ gehörige Funktion g definiert durch*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{dom}(g) &=& \alpha \quad \textit{und} \\ g(i) &\stackrel{\mathrm{def}}{=}& \bigcup\{\underline{h}(i) \mid \exists H \quad \langle h,H\rangle \in \mathfrak{G}\} \qquad (\textit{für alle } i<\alpha). \end{array}$$

Dann ist $g \in \prod_{i<\alpha}[\kappa_i \setminus \bigcup_{j<i}\kappa_j]^{\eta_i}$.

Beweis. Sei $i<\alpha,\ n<\eta_i$. Setze:

$$\Delta_{i,n} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\langle h,H\rangle \in I\!\!P \mid |\underline{h}(i)| > n\}$$

Nach Beobachtung (1) ist $\Delta_{i,n}$ dicht in $I\!\!P$, also

$$\mathfrak{G} \cap \Delta_{i,n} \neq \emptyset$$

Um zu sehen, daß $|g(i)| \leq \eta_i$, mache man sich klar, daß für $\langle s,S\rangle$ und $\langle t,T\rangle$ aus $I\!\!P$ gilt:

$$\langle s,S\rangle \parallel \langle t,T\rangle \to \forall i<\alpha \quad (\ \underline{s}(i) \text{ ist Anfangsstück von } \underline{t}(i) \quad \text{oder}$$

$$\underline{t}(i) \quad \text{ist Anfangsstück von } \underline{s}(i)\ ).$$

Daraus folgt:

$$\text{Wenn } \langle s,S\rangle \parallel \langle t,T\rangle,\ i \in \mathrm{dom}(s)\cap\mathrm{dom}(t) \text{ und } |s(i)| = |t(i)|,\ \text{dann } s(i)=t(i),$$

$$\text{und wenn } |s(i)| < |t(i)|,\ \text{dann ist } s(i) \text{ ein Anfangsstück von } t(i).$$

Man kann $g(i)$ schreiben als

$$g(i) = \bigcup_{n<1+\eta_i} \{\underline{h}(i) \mid \exists H \quad \langle h,H\rangle \in \mathfrak{G} \ \wedge\ |\underline{h}(i)| = n\},$$

woraus man unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $\Delta_{i,n}$ von $\mathfrak{G}$ geschnitten wird $(n < \eta_i)$ und alle Elemente von $\mathfrak{G}$ paarweise kompatibel sind, leicht sieht, daß $|g(i)| = \eta_i$. $\square_{(2)}$

(3) *Seien $\mathfrak{G}$, g wie in Beobachtung (2), und*

$$\mathfrak{G}^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\langle h,H\rangle \in I\!\!P \mid \forall i<\alpha \quad (\underline{h}(i) \text{ ist Anfangsstück von } g(i) \text{ und } g(i)\setminus \underline{h}(i) \subseteq H(i))\}.$$

Dann $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*$, das heißt, man kann $\mathfrak{G}$ aus g zurückgewinnen und umgekehrt. Dies rechtfertigt die gängige Praxis, g als $I\!\!P-$generisch zu bezeichnen. Man spricht auch von der zu $\mathfrak{G}$ gehörigen, Prikry-generischen Funktion oder Prikry-Sequenz.

Beweis. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt.

(a) $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{G}^*$

Beweis von (a). Sei $\langle h, H\rangle \in \mathfrak{G}$, $i < \alpha$. Dann ist $\underline{h}(i)$ ein Anfangsstück von $g(i)$; siehe Beweis von Beobachtung (2). Angenommen, $g(i) \setminus \underline{h}(i) \not\subseteq H(i)$. Sei dann $\xi \in g(i) \setminus (H(i) \cup \underline{h}(i))$. Nach Definition von g existiert dann ein $\langle h', H'\rangle \in \mathfrak{G}$ mit $\xi \in h'(i)$, was aber bedeutet: $\langle h, H\rangle \perp \langle h', H'\rangle$, denn für eine gemeinsame Erweiterung $\langle t, T\rangle$ müsste einerseits wegen $\langle t, T\rangle \leq \langle h', H'\rangle$ gelten: $\xi \in t(i)$, und andererseits wegen $\langle t, T\rangle \leq \langle h, H\rangle$ folgen: $t(i) \setminus \underline{h}(i) \subseteq H(i)$, also $\xi \notin t(i)$, ein Widerspruch. $\square_{(a)}$

(b) $\mathfrak{G}^*$ ist $I\!\!P-$ generischer Filter.

Beweis von (b). Generizität von $\mathfrak{G}^*$ ist klar nach (a), und die Filtereigenschaften ergeben sich direkt aus der Definition:

Wenn $\langle h', H'\rangle \geq \langle h, H\rangle \in \mathfrak{G}^*$, dann ist für $i < \alpha$ $\underline{h}'(i)$ ein Anfangsstück von $\underline{h}(i)$ und $\underline{h}(i)$ ein Anfangsstück von $g(i)$.

$$g(i) \setminus \underline{h}'(i) = (g(i) \setminus \underline{h}(i)) \cup (\underline{h}(i) \setminus \underline{h}'(i)).$$

Wenn $|\underline{h}(i)| < \eta_i$, dann ist $H(i) \subseteq H'(i)$, sowie $g(i) \setminus \underline{h}(i) \subseteq H(i)$ und $\underline{h}(i) \setminus \underline{h}'(i) \subseteq H'(i)$, also $g(i) \setminus \underline{h}'(i) \subseteq H'(i)$.

Andernfalls ist $g(i) \setminus \underline{h}'(i) = h(i) \setminus \underline{h}'(i) \subseteq H'(i)$. Also ist in beiden Fällen $\langle h', H'\rangle \in \mathfrak{G}^*$.

Wenn $\langle h_1, H_1\rangle, \langle h_2, H_2\rangle \in \mathfrak{G}^*$, so auch $\langle h, H\rangle$, wo $h(i) = \underline{h_1}(i) \cup \underline{h_2}(i)$ für $i \in \mathrm{dom}(h_1) \cup \mathrm{dom}(h_2)$ und $H(i) = H_1(i) \cap H_2(i)$ für $i < \alpha$, denn $\underline{h}(i)$ ist ein Anfangsstück von $g(i)$ und

$$g(i) \setminus \underline{h}(i) = \underbrace{(g(i) \setminus \underline{h_1}(i))}_{\subseteq H_1(i)} \cap \underbrace{(g(i) \setminus \underline{h_2}(i))}_{\subseteq H_2(i)} \subseteq H_1(i) \cap H_2(i) = H(i).$$

$\square_{(b)}$

Aus (a) und (b) folgt bekanntlich schon, daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*$, vgl. z.B.[Kunen80, S. 221, Lemma 7.10]. $\square_{(3)}$

Bemerkung: An Beobachtung (3) kann man sehen, daß Forcing mit $I\!\!P$ nichts ändert, wenn $\sum_{i<\alpha} \eta_i < \omega$, denn dann ist g, wie es in (2) definiert wurde, ein Element des Grundmodells. In den Anwendungen wird man also davon ausgehen können, daß $\sum_{i<\alpha} \eta_i \geq \omega$.

(4) *Sei* $\theta = \bigcup_{i<\alpha} \kappa_i$. *Dann erfüllt* $I\!\!P$ *die* $\theta^+ -$ *c.c.*

Beweis. Die Annahme Gegenteils wird zum Widerspruch geführt. Sei $A \subseteq I\!\!P$ eine Antikette von Mächtigkeit θ^+. Nach einem „Schubfachprinzip“ kann man o. B. d. A. annehmen, daß für alle $\langle h, H\rangle \in A$ gilt: $\mathrm{dom}(h) = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\}$, $\alpha_0 < \ldots < \alpha_{n-1}$, da $\mathrm{dom}(h) \in [\alpha]^{<\omega}$ und $\alpha^{<\omega} < \theta^+$. Somit ergibt sich

$$\forall \langle h, H\rangle \in A \quad h \in Z \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i \in \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\}} [\kappa_i]^{<(1+\eta_i)}.$$

Aber $|Z| = \kappa_{\alpha_{n-1}} \leq \theta < \theta^+$, also existieren wieder nach einem „Schubfachprinzip" eine Teilmenge A' von A, deren Mächtigkeit θ^+ ist, und eine Funktion c derart, daß $h = c$ für beliebiges $\langle h, H \rangle \in A'$. Somit ist A' keine Antikette, also erst recht nicht A, im Widerspruch zur Annahme. $\square_{(4)}$

Bemerkung: Das Ergebnis in Beobachtung (4) ist optimal, das heißt es existiert eine Antikette $A \subseteq I\!\!P$ von Mächtigkeit θ .

Beweis. Sei $X(i) = \{\nu < \kappa_i \mid \lim(\nu)\}$ für $i < \alpha$. Da U_i normal ist, ist $X(i) \in U_i$. Für die Konstruktion der Antikette spielt die genaue Wahl von $X(i)$ keine Rolle; es kommt nur darauf an, daß $X(i) \in U_i$, und daß $|\kappa_i \setminus X(i)| = \kappa_i$. Setze

$$Y(i) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_i \setminus (X(i) \cup \operatorname*{lub}_{j<i} \kappa_j).$$

Dann $Y_i \notin U_i$, und Y_i hat Mächtigkeit κ_i. Für $i < \alpha,\ j < \kappa_i$ setze

$$x^i_j \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle i, \{(Y_i)_j\}\rangle\}$$

und definiere

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x^i_j, X[i \mapsto X(i) \setminus ((Y_i)_j + 1)]\rangle \mid i < \alpha\ \wedge\ j < \kappa_i\}.$$

Offenbar ist A eine Antikette von Mächtigkeit θ. $\square_{(Bem.)}$

(5) *Sei M ein abzählbares, transitives ZFC-Modell, $I\!\!P \in M$, $\mathfrak{G}$ $\;I\!\!P-$ generisch über M und g die zu $\mathfrak{G}$ gehörige Funktion. Dann gilt:*

$$\text{Wenn } X \in (\prod_{i<\alpha} U_i) \cap M, \textit{ so ist} \bigcup_{i<\alpha} (g(i) \setminus X(i)) \textit{ endlich.}$$

Beweis. Setze $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle t, T\rangle \in I\!\!P \mid \forall i < \alpha \quad T(i) \subseteq X(i)\}_M$. Dann ist $\Delta \in M$ und dicht in $I\!\!P$, denn für $\langle t, T\rangle \in I\!\!P$ beliebig gilt mit $T'(i) \stackrel{\text{def}}{=} X(i) \cap T(i)$ (f. $i < \alpha$) : $\langle t, T\rangle \geq \langle t, T'\rangle \in \Delta$.
Sei nach Generizität $\langle t, T\rangle \in \Delta \cap \mathfrak{G}$. Dann gilt

$$\forall i < \alpha \quad g(i) \setminus \underline{t}(i) \subseteq T(i),$$

da $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*$ nach (3). Somit:

$$\bigcup_{i<\alpha} g(i) \setminus X(i) \subseteq \bigcup_{i<\alpha} g(i) \setminus T(i) \subseteq \bigcup_{i<\alpha} \underline{t}(i) = \bigcup_{i\in \mathrm{dom}(t)} t(i).$$

Wie schon in der auf die Definition von $I\!\!P$ folgenden Bemerkung betont, ist $\bigcup_{i\in\mathrm{dom}(t)} t(i)$ endlich, woraus die Behauptung folgt. $\square_{(5)}$

2.2 Erhaltungseigenschaften

In diesem Abschnitt wird das Ziel verfolgt festzustellen, wann $\mathbb{P}$ Kofinalitäten erhält, wann nicht, und was mit Kardinalzahlen passiert. Es wird sich herausstellen, daß keine Kardinalzahlen kollabiert werden, und daß die Erhaltung von Kofinalitäten stark von den η_i abhängt. Im Falle von Prikrys ursprünglicher Forcing-Konstruktion ist es bekannt, daß die Kofinalität der meßbaren Kardinalzahl auf ω kollabiert wird, woraus schon ersichtlich ist, daß die Kofinalität von κ_i nicht erhalten wird, wenn $\eta_i = \omega$. All dies wird in Satz 2.2.5 expliziert werden, doch zunächst wird ein etwas technisches Lemma gebraucht, das relativ allgemein formuliert ist, um breite Anwendbarkeit zu garantieren.

Seien von nun an M ein abzählbares, transitives Modell von ZFC, und $\mathbb{P} \in M$.

2.2.1 Lemma. *Sei $\dot{t} \in M^{\mathbb{P}}$, $\langle f, F\rangle \in \mathbb{P}$ und $\langle f, F\rangle \Vdash \dot{t} < \check{\delta}$ für ein $\delta < \kappa_i$. Dann existiert F' mit*

(a) $F' \restriction i = F$ *und* $\langle f, F'\rangle \leq \langle f, F\rangle$ *und*

(b) Wenn $\langle h, H\rangle \leq \langle f, F'\rangle$ *und* $\langle h, H\rangle \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$*, dann* $\langle h, H\rangle_0^i {}^\frown \langle f, F'\rangle_i^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$.

Beweis. Definiere induktiv eine Folge $\langle F_\mu \mid i \leq \mu \leq \alpha\rangle$ mit folgenden Eigenschaften.

(I) $\forall i \leq \nu \leq \mu \leq \alpha \quad \langle f, F_\mu\rangle \leq \langle f, F_\nu\rangle$ und $F_\mu \restriction \nu = F_\nu \restriction \nu$.

(II) Wenn $\langle h, H\rangle \leq \langle f, F_{\nu+1}\rangle$, $\langle h, H\rangle \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$ für ein $\eta < \kappa_i$ und $\nu = \max\{i \leq j < \alpha \mid \underline{h}(j) \supsetneqq \underline{f}(j)\}$, dann $\langle h, H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f, F_{\nu+1}\rangle_\nu^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$.

Setze $F_i \stackrel{\text{def}}{=} F$.
Wenn $\langle F_\mu \mid i \leq \mu \leq \nu\rangle$ schon definiert und $\nu + 1 \leq \alpha$ ist, so definiere $F_{\nu+1}$, wie folgt. Sei

$$\Gamma_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_0^\nu \mid p \leq \langle f, F_\nu\rangle_0^\nu\} \subseteq \mathbb{P}_0^\nu.$$

Da D diskret ist, ist die Mächtigkeit von $\mathbb{P}_0^\nu$ kleiner als κ_ν, denn mit $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j<\nu} \kappa_j < \kappa_\nu$ gilt $|\mathbb{P}_0^\nu| \leq (\gamma^{<\omega})^\nu \cdot (2^\gamma)^\nu < \kappa_\nu$, da κ_ν meßbar ist, also insbesondere unerreichbar, und da $\nu < \kappa_\nu$ (wieder nach Diskretheit: $\nu = \bigcup_{j<\nu}(j+1) \leq \bigcup_{j<\nu}(\kappa_j + 1) < \kappa_\nu$). Insbesondere ist die Mächtigkeit von Γ_ν kleiner als κ_ν, was zur Folge hat, daß von der $\kappa_\nu-$Vollständigkeit von U_ν Gebrauch gemacht werden kann; z. B. liegt der Schnitt von mit Elementen von Γ_ν indizierten Mengen, die allesamt Maß eins bezüglich U_ν haben, wieder in U_ν.
Für jedes Element q von Γ_ν wird nun eine Funktion

$$l_q^\nu : [F_\nu(\nu)]^{<(1+\eta_\nu)} \longrightarrow \delta$$

definiert, wie folgt :

$$l_q^\nu(a) = \begin{cases} \beta & \text{wenn } \beta \text{ das kleinste } \mu < \delta \text{ ist derart, daß es } \langle h, H\rangle \text{ gibt mit} \\ & \quad 1.\ \langle h,H\rangle_0^\nu = q \ \wedge \ \langle h,H\rangle \leq \langle f, F_\nu\rangle. \\ & \quad 2.\ \langle h,H\rangle \Vdash \dot{t} = \check{\mu}. \\ & \quad 3.\ \underline{h}(\nu) = \underline{f}(\nu) \cup a. \\ & \quad 4.\ h \restriction (\alpha \setminus (\nu+1)) = f \restriction (\alpha \setminus (\nu+1)). \\ \delta & \text{wenn es kein } \mu \text{ gibt mit obigen Eigenschaften.} \end{cases}$$

Wenn $l_q^\nu(a) < \delta$ ist, so sei $\langle h_{q,a}^\nu, H_{q,a}^\nu\rangle$ entsprechend gewählt, das heißt, $\langle h_{q,a}^\nu, H_{q,a}^\nu\rangle$ erfüllt 1. bis 4. aus obiger Definition bezüglich $l_q^\nu(a)$. Andernfalls sei $H_{q,a}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} F_\nu$.
Sei nach Rowbottoms Theorem $X_q^\nu \subseteq F_\nu(\nu)$ homogen für l_q^ν und $X_q^\nu \in U_\nu$. Nun zur oben versprochenen Definition von $F_{\nu+1}$:

$$F_{\nu+1}(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} F_\nu(\beta) & \text{wenn } \beta < \nu \\ \bigcap_{q\in\Gamma_\nu} (X_q^\nu \cap \triangle_{b\in[F_\nu(\nu)]^{<(1+\eta_\nu)}} H_{q,b}^\nu(\beta)) & \text{wenn } \beta = \nu \\ \bigcap_{q\in\Gamma_\nu} \bigcap_{b\in[F_\nu(\nu)]^{<(1+\eta_\nu)}} H_{q,b}^\nu(\beta) & \text{wenn } \nu < \beta < \alpha. \end{cases}$$

Offenbar erfüllt $\langle F_\mu \mid i \leq \mu \leq \nu+1\rangle$ Bedingung (I). Eine Hilfsbeobachtung wird helfen zu zeigen, daß auch Bedingung (II) erfüllt ist.

Seien dazu $\langle h,H\rangle \leq \langle f, F_{\nu+1}\rangle$, $i \leq \nu = \max\{j < \alpha \mid \underline{h}(j) \supsetneqq \underline{f}(j)\}$ und $\langle h,H\rangle \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$, also die Voraussetzungen von Eigenschaft (II) erfüllt.
Sei $\emptyset \neq a = h(\nu)\setminus\underline{f}(\nu)$. Da $\underline{f}(\nu) \subseteq \min F(\nu)$, gilt für $b \in [F_{\nu+1}(\nu)]^{|a|}$: $|h(\nu)| = |\underline{f}(\nu) \cup b|$.

(1) $\forall b \in [F_{\nu+1}(\nu)]^{|a|} \quad \langle h,H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f[\nu \mapsto \underline{f}(\nu)\cup b], F_{\nu+1}[\nu \mapsto F_{\nu+1}(\nu)\setminus \mathrm{lub}(b)]\rangle_\nu^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$.

Beweis von (1). Setze $q \stackrel{\text{def}}{=} \langle h,H\rangle_0^\nu \in \Gamma_\nu$. Wegen $\langle h,H\rangle \leq \langle f, F_{\nu+1}\rangle$ ist $a \subseteq F_{\nu+1}(\nu)$.

(a) $l_q^\nu(a) = \eta$

Man nehme das Gegenteil an, also $l_q^\nu(a) = \eta' \neq \eta$. Dann existiert nach Definition von l_q^ν ein $\langle h', H'\rangle = \langle h_{q,a}^\nu, H_{q,a}^\nu\rangle$ mit

1. $\langle h',H'\rangle_0^\nu = q = \langle h,H\rangle \wedge \langle h',H'\rangle \leq \langle f, F_\nu\rangle$.
2. $\langle h',H'\rangle \Vdash \dot{t} = \check{\eta}'$.
3. $\underline{h'}(\nu) = \underline{f}(\nu) \cup a$.

4. $h' \upharpoonright (\alpha \setminus (\nu+1)) = f \upharpoonright (\alpha \setminus (\nu+1)) = h \upharpoonright (\alpha \setminus (\nu+1))$.

Aus 1. - 4. folgt $h = h'$. Definiere $\tilde{H} \in \prod_{j<\alpha} U_j$ durch $\tilde{H}(j) \stackrel{\text{def}}{=} H(j) \cap H'(j)$. Dann ist $\langle h, \tilde{H}\rangle$ eine gemeinsame Erweiterung von $\langle h, H\rangle$ und $\langle h', H'\rangle$, das heißt, $\langle h, \tilde{H}\rangle \Vdash \check{\eta} = \dot{t} = \check{\eta}'$, also $\eta = \eta'$, im Widerspruch zur Annahme. $\square_{(a)}$

Sei nun $b \in [F_{\nu+1}(\nu)]^{|a|}$. $a \subseteq F_{\nu+1}(\nu) \subseteq X_q^\nu$, $|a| = |b|$ und X_q^ν ist homogen für l_q^ν, also

$$l_q^\nu(a) = l_q^\nu(b) = \eta.$$

Also erfüllt $\langle h_{q,b}^\nu, H_{q,b}^\nu\rangle$ 1. - 4. bezüglich η. Es gilt:

(b) $\langle h, H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f[\nu \mapsto \underline{f}(\nu) \cup b], F_{\nu+1}[\nu \mapsto F_{\nu+1}(\nu) \setminus \mathrm{lub}(b)]\rangle_\nu^\alpha \leq \langle h_{q,b}^\nu, H_{q,b}^\nu\rangle$,

denn: Die ersten Komponenten stimmen überein, für $j < \nu$ ist $H(j) = H_{q,b}^\nu(j)$, und für $\nu < j < \alpha$ ist $F_{\nu+1}(j) \subseteq H_{q,b}^\nu$ per Definition. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß

$$F_{\nu+1}[\nu \mapsto F_{\nu+1}(\nu) \setminus \mathrm{lub}(b)](\nu) = F_{\nu+1}(\nu) \setminus \mathrm{lub}(b) \subseteq H_{q,b}^\nu(\nu).$$

Sei dazu $\gamma \in F_{\nu+1}(\nu) \setminus \mathrm{lub}(b)$. Dann also $\gamma \geq \mathrm{lub}(b)$. Nach Definition von $F_{\nu+1}$ ist $F_{\nu+1}(\nu) \subseteq \triangle_{c \in [F_\nu(\nu)]^{<(1+\eta_\nu)}} H_{q,c}^\nu(\nu)$, also folgt nach Definition des diagonalen Schnitts $\gamma \in H_{q,b}^\nu(\nu)$. γ war beliebig in $F_{\nu+1}(\nu) \setminus \mathrm{lub}(b)$ gewählt, also ist obige Mengeninklusion gezeigt. $\square_{(b)}$

Da $\langle h_{q,b}^\nu, H_{q,b}^\nu\rangle \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$, folgt (1). $\square_{(1)}$

Für Behauptung (II) bleibt zu zeigen, daß $\langle h, H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f, F_{\nu+1}\rangle_\nu^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$. Mit Hilfe von (1) sieht man aber leicht, daß $\{p \mid p \Vdash \dot{t} = \check{\eta}\}$ dicht ist unter $\langle h, H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f, F_{\nu+1}\rangle_\nu^\alpha$, woraus schon folgt (vgl. [Kunen80, S. 197, Lemma 3.4]), daß letztere Bedingung in ersterer Menge liegt, also das Gewünschte leistet. $\square_{(II)}$

Sei nun $\lim(\lambda)$, $\lambda \leq \alpha$ und $\langle F_\mu \mid i \leq \mu < \lambda\rangle$ schon definiert. Setze :

$$F_\lambda(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} F_i(\beta) & \text{wenn } \beta < i \\ F_{\beta+1}(\beta) & \text{wenn } i \leq \beta < \lambda \\ \bigcap_{i \leq \gamma < \lambda} F_\gamma(\beta) & \text{wenn } \lambda \leq \beta < \alpha. \end{cases}$$

Offenbar erfüllt $\langle F_\mu \mid i \leq \mu \leq \lambda\rangle$ die Bedingungen (I) und (II).
Somit ist $\langle F_\mu \mid i \leq \mu \leq \alpha\rangle$ definiert. Damit folgt

(2) Wenn $i \leq \nu < \alpha$, $\langle h, H\rangle \leq \langle f, F_\alpha\rangle$, $\nu = \max\{\mu < \alpha \mid \underline{h}(\mu) \supsetneqq \underline{f}(\mu)\}$ und $\langle h, H\rangle \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$, dann $\langle h, H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f, F_\alpha\rangle_\nu^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$.

Beweis von (2). Es gilt

$$\langle h, H\rangle \leq \langle f, F_\alpha\rangle \leq \langle f, F_{\nu+1}\rangle.$$

Also nach (II)

$$\langle h, H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f, F_{\nu+1}\rangle_\nu^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}.$$

Aber nach (I)

$$\langle h, H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f, F_\alpha\rangle_\nu^\alpha \leq \langle h, H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f, F_{\nu+1}\rangle_\nu^\alpha.$$

$\square_{(2)}$

(3) Sei $\langle h, H\rangle \leq \langle f, F_\alpha\rangle$, $i \leq j < \alpha$, $|\underline{f}(j)| < \eta_j$ und $\langle h, H\rangle \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$.
Dann gilt: $\langle h, H\rangle_0^j {}^\frown \langle f, F_\alpha\rangle_j^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$.

Beweis von (3). Die Annahme des Gegenteils wird zum Widerspruch geführt. Sei also j gegeben mit $|f(j)| < \eta_j$, und für $\langle h, H\rangle$ gelte

(a) $\langle h, H\rangle \leq \langle f, F_\alpha\rangle$.

(b) $\langle h, H\rangle \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$.

(c) $\langle h, H\rangle_0^j {}^\frown \langle f, F_\alpha\rangle_j^\alpha \nVdash \dot{t} = \check{\eta}$.

(d) $|h(j)| > |\underline{f}(j)|$.

(e) $\nu = \max\{\mu < \alpha \mid \underline{h}(\mu) \supsetneqq \underline{f}(\mu)\}$ ist minimal in Bezug auf (a)-(d).

Bedingung (d) ist harmlos, denn wenn eine Bedingung (a)-(c) erfüllt, aber nicht (d), so verändere man sie an der Stelle j so, daß eine Erweiterung entsteht, für die (d) gilt. Offenbar bleiben (a)-(c) erhalten.
Nach (2) gilt:

$$\langle h', H'\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle h, H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f, F_\alpha\rangle_\nu^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}.$$

Wenn $\nu = j$, so ist der Beweis komplett. Nach (d) ist $\nu \geq j$, also bleibt noch der Fall $\nu > j$. Dann ist $\langle h', H'\rangle$ jedoch eine Bedingung, die (a)-(d) erfüllt, aber

$$\nu' = \max\{\mu < \alpha \mid \underline{h'}(\mu) \supsetneqq \underline{f}(\mu)\} < \nu$$

im Widerspruch zur Minimalität von ν. $\square_{(3)}$

(4) Sei $\langle h, H\rangle \leq \langle f, F_\alpha\rangle$ und $\langle h, H\rangle \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$. Dann $\langle h, H\rangle_0^i {}^\frown \langle f, F_\alpha\rangle_i^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$.

Beweis von (4). Sei $j \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu < \alpha \mid i \leq \mu \ \wedge \ |\underline{f}(\mu)| < \eta_\mu\}$, falls existent, sonst setze $j \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$. Dann folgt

$$(*) \quad \langle h, H\rangle_0^j {}^\frown \langle f, F_\alpha\rangle_j^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}.$$

Wenn $j < \alpha$, ist dies gerade Aussage (3), und wenn $j = \alpha$, ist obige Bedingung $\langle h, H\rangle$. Weiterhin gilt $|h(l)| = |f(l)| = \eta_l$ also $h(l) = f(l)$ für alle $l \in [i, j)$ nach Definition von j. Die partielle Ordnungsrelation $\leq$ ist aber gerade so definiert, daß die Werte der zweiten

Komponente an Stellen, an denen der Wert der ersten Komponente vollständig festgelegt ist, irrelevant ist. Also folgt

$$\langle h, H\rangle_0^i {}^\frown \langle f, F\rangle_i^\alpha \leq \langle h, H\rangle_0^j {}^\frown \langle f, F\rangle_j^\alpha.$$

Man könnte auch „$\leq$“ durch „$\geq$“ ersetzen, aber diese Richtung wird hier nicht gebraucht. Mit $(*)$ folgt die Behauptung. $\square_{(4),2.2.1}$

2.2.2 DEFINITION. Für $\langle f, F\rangle$ und $\langle h, H\rangle \in I\!\!P$ setze

$$\langle f, F\rangle \leq_* \langle h, H\rangle \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \langle f, F\rangle \leq \langle h, H\rangle \;\wedge\; f = h.$$

$\square$

2.2.3 LEMMA. *Sei φ eine Forcing-Aussage und $p \in I\!\!P$. Dann existiert ein q mit $q \leq_* p$ und $q \parallel \varphi$, das heißt, $q \Vdash \varphi$ oder $q \Vdash \neg\varphi$ („p entscheidet φ“).*

Beweis. Setze

$$\begin{array}{rcl} x & \stackrel{\text{def}}{=} & \{p \in I\!\!P \mid p \Vdash \varphi\}, \\ y & \stackrel{\text{def}}{=} & \{p \in I\!\!P \mid p \Vdash \neg\varphi\} \quad \text{und} \\ \dot{t} & \stackrel{\text{def}}{=} & \{\langle \check{0}, p\rangle \mid p \in x \cup y\} \cup \{\langle \check{1}, q\rangle \mid q \in y\}. \end{array}$$

Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} p \Vdash \dot{t} = \check{1} & \Longleftrightarrow & p \Vdash \varphi, \\ p \Vdash \dot{t} = \check{2} & \Longleftrightarrow & p \Vdash \neg\varphi \end{array}$$

und

$$p \Vdash (\dot{t} = \check{1} \;\vee\; \dot{t} = \check{2}), \text{ aber } (p \not\Vdash \dot{t} = \check{1} \text{ und } p \not\Vdash \dot{t} = \check{2})$$

genau dann, wenn $p \not\parallel \varphi$.

Also $\Vdash \dot{t} < \check{3}$. Sei nun $p \in I\!\!P$ fixiert. Offenbar kann also Lemma 2.2.1 auf $p = \langle f, F\rangle$, $i = 0$ und $\dot{t}$ angewandt werden, und man erhält $q = \langle f, F'\rangle \leq_* p$ mit den gewünschten Eigenschaften, denn wenn $r \leq \langle f, F'\rangle$ und $r \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$, dann schon $r_0^0 {}^\frown \langle f, F'\rangle_0^\alpha \Vdash \dot{t} = \check{\eta}$. Natürlich gibt es eine Bedingung, die $\langle f, F'\rangle$ erweitert und φ entscheidet (d. h. den Wert von $\dot{t}$ auf 1 oder 2 festlegt). Nach dem soeben Gesagten leistet ebendies auch q. $\square$

Die Tatsache, daß die soeben definierte Relation $\leq_*$ κ_0-abgeschlossen ist, ergibt, daß $I\!\!P$ keine beschränkten Teilmengen von κ_0 asjungiert. Es gilt sogar

2.2.4 LEMMA. *Sei $\mathfrak{G}_0^\nu \times \mathfrak{G}_\nu^\alpha$ ein $I\!\!P_0^\nu \times I\!\!P_\nu^\alpha-$generischer Filter über M. Sei $\lambda < \kappa_\nu$ und $A \in \mathcal{P}(\lambda) \cap M[\mathfrak{G}_0^\nu \times \mathfrak{G}_\nu^\alpha]$. Dann ist $A \in M[\mathfrak{G}_0^\nu]$. Das heißt, $I\!\!P_\nu^\alpha$ adjungiert keine neue, beschränkte Teilmenge von κ_ν über $M[\mathfrak{G}_0^\nu]$.*

Beweis. Sei $a : \lambda \longrightarrow 2$ die charakteristische Funktion von A und $p \in I\!\!P_0^\alpha$ $(= I\!\!P_0^\nu \times I\!\!P_\nu^\alpha$ im offensichtlichen Sinne), $p \in \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0^\nu \times \mathfrak{G}_\nu^\alpha$ so, daß $p \Vdash \dot{a} : \check{\lambda} \longrightarrow \check{2}$ und $\dot{a}^{\mathfrak{G}} = a$. Definiere in M :

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{q \leq p \mid \forall r \leq p \forall \gamma < \lambda \forall \xi \quad (r \Vdash \dot{a}(\check{\gamma}) = \check{\xi} \longrightarrow r {}^\frown q_\nu^\alpha \Vdash \dot{a}(\check{\gamma}) = \check{\xi})\}.$$

Dann folgt:

($*$) Δ ist dicht unter p.

Beweis von ($*$). Sei $q = \langle f, F\rangle \leq p$. Setze: $\dot{t}_\gamma \overset{\text{def}}{=} \dot{a}(\check{\gamma})$. Dann $q \Vdash \dot{t}_\gamma < \kappa_\nu$ (sogar $< \check{2}$). Sei also für $\gamma < \lambda$ nach Lemma 1 eine Bedingung $q_\gamma = \langle f, F_\gamma\rangle$ gegeben mit $q_\gamma \leq q$ und

(a) $F_\gamma \restriction \nu = F \restriction \nu$

(b) Wenn $r \leq q_\gamma,\ r \Vdash \dot{t}_\gamma = \check{\xi}$, dann $r_0^\nu{}^\frown (q_\gamma)_\nu^\alpha \Vdash \dot{t}_\gamma = \check{\xi}$.

Definiere nun $\bar{q} = \langle f, \bar{F}\rangle$ durch

$$\bar{F}(\eta) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} F(\eta) & \text{wenn}\, \eta < \nu \\ \bigcap\limits_{\gamma<\lambda} F_\gamma(\eta) & \text{wenn}\, \nu \leq \eta < \alpha. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $\gamma < \lambda :\ \bar{q} \leq q_\gamma \leq q$. Weiterhin ist $\bar{q} \in \Delta$: Wenn $r \leq \bar{q}$ und $r \Vdash \dot{t}_\gamma = \check{\xi}$ für ein $\gamma < \lambda$, dann $r \leq q_\gamma$, also $r_0^\nu{}^\frown (q_\gamma)_\nu^\alpha \Vdash \dot{t}_\gamma = \check{\xi}$. Aber $r_0^\nu{}^\frown \bar{q}_\nu^\alpha \leq r_0^\nu{}^\frown (q_\gamma)_\nu^\alpha$, also $r_0^\nu{}^\frown \bar{q}_\nu^\alpha \Vdash \dot{t}_\gamma = \check{\xi}$, das heißt, $\bar{q} \in \Delta$. $\square_{(*)}$

Da $p \in \mathfrak{G}$, folgt $\Delta \cap \mathfrak{G} \neq \emptyset$. Sei also $q \in \Delta \cap \mathfrak{G}$. Dann gilt für $\gamma < \lambda$:

(1) $a(\gamma) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \exists r \in \mathfrak{G}_0^\nu \quad r^\frown q_\nu^\alpha \Vdash \dot{t}_\gamma = \check{0}$.

(2) $a(\gamma) = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \exists r \in \mathfrak{G}_0^\nu \quad r^\frown q_\nu^\alpha \Vdash \dot{t}_\gamma = \check{1}$

Beweis von (1) und (2). Sei $a(\gamma) = m$, $m \in 2$. Sei $s \in \mathfrak{G}$, $s \leq q$ mit $s \Vdash \dot{a}(\check{\gamma}) = \dot{t}_\gamma = \check{m}$. Dann $s_0^\nu{}^\frown q_\nu^\alpha \Vdash \dot{t}_\gamma = \check{m}$. Offenbar ist $s \in \mathfrak{G}_0^\nu$.

Sei andererseits $r \in \mathfrak{G}_0^\nu$ mit $r^\frown q_\nu^\alpha \Vdash \dot{a}(\gamma) = \check{m}, m \in 2$. Dann $r^\frown q_\nu^\alpha \in \mathfrak{G}$, da $r \in \mathfrak{G}_0^\nu$, $q_\nu^\alpha \in \mathfrak{G}_\nu^\alpha$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0^\nu \times \mathfrak{G}_\nu^\alpha$. Also $(\dot{t}_\gamma)^{\mathfrak{G}} = (\dot{a}(\check{\gamma}))^{\mathfrak{G}} = a(\gamma) = m$. $\square_{(1),(2)}$

Da $q_\nu^\alpha \in M$, und a aus q_ν^α und $\mathfrak{G}_0^\nu$ definierbar ist, ist also $a \in M[\mathfrak{G}_0^\nu]$. $\square$

2.2.5 LEMMA. *$\mathbb{P} = \mathbb{P}_0^\alpha$ erhält alle Kardinalitäten und kollabiert die Kofinalität von γ genau dann, wenn $\mathrm{cf}(\gamma) = \kappa_i$ für ein $i < \alpha$ mit $\eta_i = \omega$. Wenn die Kofinalität von γ kollabiert wird, dann auf ω.*

Beweis. Man gehe vom Gegenteil aus. Sei β minimal, so daß die Aussage nicht auf $\mathbb{P}_0^\beta$ zutrifft. Sei $\mathfrak{G}$ $\mathbb{P}_0^\beta-$generisch über M. Im folgenden wird, wenn nichts anderes gesagt wird, in M argumentiert, das heißt, Begriffe wie Kardinalzahl, Kofinalität u.a. sind stets als relativiert nach M zu verstehen.

(1) β ist eine Limeszahl und $\beta > 0$.

Beweis von (1). Daß $\beta \neq 0$ ist, ist offensichtlich, da Forcing mit der leeren Menge nichts ändert. Sei also angenommen, daß β keine Limeszahl ist. Sei dann $\beta = \gamma + 1$.

Fall 1: $\eta_\gamma < \omega$.
Dann ist $M[\mathfrak{G}] = M[\mathfrak{G}_0^\gamma]$, da die zu $\mathfrak{G}$ gehörige, Prikry-generische Sequenz diejenige, die zu $\mathfrak{G}_0^\gamma$ gehört, nur um eine endliche Menge verlängert, also auch schon in $M[\mathfrak{G}_0^\gamma]$ liegt. Da nach Beobachtung 2.1.(3) die generischen Erweiterungen durch diese Sequenzen bestimmt werden, sind sie gleich. Also ist schon γ ein Gegenbeispiel, im Widerspruch zur Minimalität von β.

Fall 2: $\eta_\gamma = \omega$.
Es gilt $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_0^\gamma \times \mathbb{P}_\gamma^\beta$. $\mathbb{P}_0^\gamma$ verhält sich entsprechend der Aussage des Lemmas, da β minimales Gegenbeispiel ist.

Sei im folgenden τ eine Kardinalzahl. Wenn $\tau < \kappa_\gamma$ ist, so erhält $\mathbb{P}_\gamma^\beta$ Kofinalität und Kardinalität von τ über $M[\mathfrak{G}_0^\gamma]$, da $\mathbb{P}_\gamma^\beta$ nach Lemma 2.2.4 keine beschränkte Teilmenge von κ_γ adjungiert, während eine surjektive, bzw. kofinale Funktion von einer kleineren Ordinalzahl nach τ via Gödel-Paare als eine solche codiert werden könnte. Das heißt natürlich nicht, daß nicht $\mathbb{P}_0^\gamma$ etwas an der Kofinalität von τ geändert haben kann. Wenn $\tau > \kappa_\gamma$ ist, so erhält $\mathbb{P}_\gamma^\beta$ Kardinalität, und wenn $\mathrm{cf}(\tau) > \kappa_\gamma$, Kofinalität von τ, weil $\mathbb{P}_\gamma^\beta$ nach Beobachtung 2.1.(4) die κ_γ^+−c. c. erfüllt. Wenn $\tau = \kappa_\gamma$, dann ist τ meßbar, also insbesondere ein Limes von Kardinalzahlen. Diese bleiben sowohl durch $\mathbb{P}_0^\gamma$, als auch durch $\mathbb{P}_\gamma^\beta$ erhalten, also bleibt auch τ eine Kardinalzahl, denn sonst würde die Kardinalität von τ unter eine Kardinalzahl sinken, die erhalten bleibt, was nicht sein kann. Wenn $\mathrm{cf}(\tau) = \kappa_\gamma$, dann ist $\mathrm{cf}(\tau) = \kappa_\gamma > \theta' \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{i<\gamma} \kappa_i$. Da $\mathbb{P}_0^\gamma$ die θ'^+−c. c. erfüllt, ändert sich durch Forcing mit $\mathbb{P}_0^\gamma$ nichts an der Kofinalität von τ, aber $\mathbb{P}_\gamma^\beta$ kollabiert $\mathrm{cf}(\tau)$ auf ω:

Sei g die zu $\mathfrak{G}$ gehörige, generische Sequenz. Nach Beobachtung 2.1.(2) gilt: $|g(\gamma)| = \omega$. Weiterhin ist $g(\gamma)$ unbeschränkt in κ_γ (und somit die Kofinalität von τ in $M[\mathfrak{G}]$ gerade ω):

Natürlich ist $g(\gamma) \subseteq \kappa_\gamma$. Angenommen, es existiert ein $\nu \in \kappa_\gamma$ derart, daß $g(\gamma) \subseteq \nu$. Definiere dann $X \in \prod_{i<\beta} U_i$ durch:

$$X(i) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \kappa_i & \text{wenn } i \in \gamma \\ \kappa_\gamma \setminus (\nu + 1) & \text{wenn } i = \gamma \end{cases}$$

Dann ist nach Beobachtung 2.1.(5) $\bigcup_{i<\beta} g(i) \setminus X(i)$ endlich, da g generisch ist und $X \in M$, aber $\bigcup_{i<\beta} g(i) \setminus X(i) = g(\gamma)$ nach Definition von X, und $g(\gamma)$ ist unendlich, ein Widerspruch.

Also verhält sich $\mathbb{P}_0^\beta$ im Einklang mit der Aussage des Lemmas, während es als Gegenbeispiel gewählt war. $\square_{(1)}$

Sei nun $\bar{\theta} = \sup_{i<\beta} \kappa_i$ und $\tau \in \mathrm{Card}_M$ minimales Gegenbeispiel zur Aussage des Lemmas bezüglich $\mathbb{P}_0^\beta$, das heißt, für alle $\nu < \tau$ ändere sich nichts an der Kardinalität, und die Kofinalität werde nur abgeändert, wenn $\mathrm{cf}_M(\nu) = \kappa_i$ für ein $i < \beta$ mit $\eta_i = \omega$, und dann auf ω, während τ nicht als Kardinalzahl erhalten bleibt, oder die Kofinalität von τ kollabiert wird, ohne daß $\mathrm{cf}(\tau) = \eta_i$ für ein $i < \beta$ mit $\eta_i = \omega$, bzw. τ hat letztere Darstellung, wird aber nicht auf ω kollabiert.

Zunächst kann man ausschließen, daß τ nicht als Kardinalzahl erhalten bleibt; es werden drei Fälle unterschieden:

Fall 1.1: $\tau > \bar{\theta}$.
Dieser Fall kann nicht eintreten, da $\mathbb{P}_0^\beta$ die $\bar{\theta}^+-$c. c. erfüllt, also Kardinalität (und wenn $\mathrm{cf}_M(\tau) > \bar{\theta}$, also insbesondere wenn τ regulär ist in M, auch Kofinalität) von τ erhält.

Fall 1.2: $\tau < \bar{\theta}$.
Da nach (1) β eine Limesordinalzahl ist, gibt es ein $\nu < \beta$ derart, daß $\tau < \kappa_\nu$ ist. Nach Minimalität von β verhält sich $\mathbb{P}_0^\nu$ entsprechend der Aussage des Lemmas, und nach Korollar 2.2.4 fügt $\mathbb{P}_\nu^\beta$ keine beschränkte Teilmenge von κ_ν hinzu, verändert also weder Kardinalität noch Kofinalität von τ. Aber $\mathbb{P}_0^\beta \cong \mathbb{P}_0^\nu \times \mathbb{P}_\nu^\beta$, also $M[\mathfrak{G}_\circ^\beta] = M[\mathfrak{G}_0^\nu][\mathfrak{G}_\nu^\beta]$, das heißt, $\mathbb{P}_0^\beta$ ist kein Gegenbeispiel zum zu beweisenden Lemma. Fall 1.2 kann somit ausgeschlossen werden.

Fall 1.3: $\tau = \bar{\theta}$.
Da $\bar{\theta}$ eine Limeskardinalzahl ist, bleibt nach Minimalität von τ die Kardinalität von τ unberührt.

Nun bleibt noch zu überprüfen, daß sich die Kofinalität von τ verhält, wie behauptet. Da τ das minimale Gegenbeispiel zur zu beweisenden Behauptung ist, ist τ regulär in M:

Man nehme an, dies sei nicht der Fall. Sei dann $\gamma = \mathrm{cf}_M(\tau) < \tau$ und $f_0 : \gamma \longrightarrow \tau$ eine monotone, kofinale, in M gelegene Funktion. Da die Kardinalität von τ erhalten bleibt, τ aber ein Gegenbeispiel ist, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder ist (a) $\gamma = \kappa_i$ für ein $i < \beta$ mit $\eta_i = \omega$, aber $\mathrm{cf}_{M[\mathfrak{G}]}(\tau) > \omega$, oder (b) γ ist nicht von dieser Form, aber $\mathrm{cf}_{M[\mathfrak{G}]}(\tau) < \gamma$.

In Fall (a) ist klar, daß $\mathrm{cf}_{M[\mathfrak{G}]}(\gamma) = \omega$, da γ regulär ist in M und die Aussage des Lemmas für $\mathbb{P}_0^\beta$ unterhalb von τ gilt. Sei dann $f_1 : \omega \longrightarrow \gamma$ in $M[\mathfrak{G}]$ monoton und kofinal. Dann ist $(f_0 \circ f_1) : \omega \longrightarrow \tau$ ebenfalls in $M[\mathfrak{G}]$ auch kofinal, also $\mathrm{cf}_{M[\mathfrak{G}]}(\tau) = \omega$. Das heißt, Fall (a) kann nicht eintreten.

In Fall (b) ist $\delta \overset{\text{def}}{=} \mathrm{cf}_{M[\mathfrak{G}]}(\tau) < \gamma$. Sei $f_2 \in M[\mathfrak{G}]$, $f_2 : \delta \longrightarrow \tau$ monoton und kofinal. Definiere eine Funktion $f : \delta \longrightarrow \gamma$, wie folgt:

$$f(\xi) \overset{\text{def}}{=} \min\{\mu < \gamma \mid f_0(\mu) > f_2(\xi)\}.$$

f liegt in $M[\mathfrak{G}]$, da aus f_0 und f_2 definierbar, und $f : \delta \longrightarrow \gamma$ kofinal.

Da das Lemma unterhalb von τ gilt, γ unterhalb von τ liegt und es im momentan betrachteten Fall ausgeschlossen ist, daß ein $i < \beta$ existiert mit $\gamma = \kappa_i$ und $\eta_i = \omega$, bleibt die Kofinalität von γ beim Übergang von M nach $M[\mathfrak{G}]$ gleich, also γ regulär in $M[\mathfrak{G}]$. Dann kann aber f nicht in $M[\mathfrak{G}]$ liegen. Dies ist ein Widerspruch, folglich kann auch Fall (b) ausgeschlossen werden.

Zum Beweis, daß sich die Kofinalität von τ verhält, wie behauptet, werden wieder drei Fälle unterschieden:

Fall 2.1: $\tau > \bar{\theta}$.
Dieser Fall wurde in Fall 1.1 schon ausgeschlossen.

Fall 2.2: $\tau < \bar{\theta}$
Siehe Fall 1.2.

Fall 2.3: $\tau = \bar{\theta}$
τ ist regulär, also in diesem Fall unerreichbar in M, und es bleibt zu zeigen:
(2) τ ist regulr in $M[\mathfrak{G}]$.

Beweis von (2). Zunächst wird eine Hilfsbehauptung bewiesen, aus der (2) schnell folgen wird:

($*$) Sei $p = \langle f, F\rangle \in I\!P_0^\beta$, $p \Vdash \dot{\eta} < \check{\tau}$ für ein $\dot{\eta} \in M^{I\!P}$. Sei $i < \beta$. Dann existiert ein $q = \langle f, \bar{F}\rangle \leq p$ mit:

(a) $\bar{F} \restriction i = F \restriction i$

(b) Wenn $r \leq q$ und $r \Vdash \dot{\eta} < \check{\nu}$ für ein $\nu < \tau$, dann schon $r_0^\imath {}^\frown q_i^\beta \Vdash \dot{\eta} < \nu'$ für ein $\nu' < \tau$. Diese Eigenschaft wird verkürzend formuliert, wie folgt: Wenn $r \leq q$ und r *beschränkt* $\dot{\eta}$, dann wird $\dot{\eta}$ schon von $r_0^\imath {}^\frown q_i^\beta$ beschränkt.

Beweis von ($*$). Die Konstruktion von p' verläuft ähnlich wie diejenige im Beweis von Lemma 2.2.1. Es wird in M argumentiert und eine Folge $\langle F_\nu \mid i \leq \nu \leq \beta\rangle$ definiert mit

(I) $\forall i \leq \nu \leq \mu \leq \beta \quad \langle f, F_\mu\rangle \leq \langle f, F_\nu\rangle$ und $F_\mu \restriction \nu = F_\nu \restriction \nu$

(II) Wenn $\langle h, H\rangle \leq \langle f, F_{\nu+1}\rangle$, $\langle h, H\rangle$ beschränkt $\dot{\eta}$ und $\nu = \max\{j < \beta \mid \underline{h}(j) \supsetneqq \underline{f}(j)\}$, dann gilt: $\langle h, H\rangle_0^\nu {}^\frown \langle f, F_{\nu+1}\rangle_\nu^\beta$ beschränkt $\dot{\eta}$,

indem zunächst gesetzt wird: $F_i \stackrel{\text{def}}{=} F$, wo $p = \langle f, F\rangle$. Wenn $\langle F_\mu \mid i \leq \mu \leq \nu\rangle$ schon definiert ist, so definiere $F_{\nu+1}$, wie folgt. Sei wie in Lemma 2.2.1

$$\Gamma_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in I\!P_0^\nu \mid p \leq \langle f, F_\nu\rangle_0^\nu\} \subseteq I\!P_0^\nu.$$

Definiere für jedes $q \in \Gamma_\nu$ eine Funktion $l_q^\nu : [F_\nu(\nu)]^{<(1+\eta_\nu)} \longrightarrow 2$ durch

$$l_q^\nu(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \langle h, H\rangle \in I\!P_0^\beta \text{ existiert mit} \\ & \quad 1.\ \langle h, H\rangle_0^\nu = q \ \wedge\ \langle h, H\rangle \leq \langle f, F_\nu\rangle. \\ & \quad 2.\ \langle h, H\rangle \text{ beschränkt } \dot{\eta}. \\ & \quad 3.\ \underline{h}(\nu) = \underline{f}(\nu) \cup a. \\ & \quad 4.\ h \restriction (\beta \setminus (\nu+1)) = f \restriction (\beta \setminus (\nu+1)). \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn $l_q^\nu(a) = 0$, so sei $\langle h_{q,a}^\nu, H_{q,a}^\nu\rangle \in I\!P_0^\beta$ mit 1. - 4., sonst sei $H_{q,a}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} F_\nu$.

X_q^ν und $F_{\nu+1}$ werden nun genauso definiert, wie in Lemma 2.2.1: Nach Rowbottoms Theorem sei wieder $X_q^\nu \subseteq F_\nu(\nu)$ homogen für l_q^ν, $X_q^\nu \in U_\nu$ und

$$F_{\nu+1}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} F_\nu(\gamma) & \text{wenn } \gamma < \nu \\ \bigcap_{q\in\Gamma_\nu} (X_q^\nu \cap \underset{b\in[F_\nu(\nu)]^{<(1+\eta_\nu)}}{\triangle} H_{q,b}^\nu(\gamma)) & \text{wenn } \gamma = \nu \\ \bigcap_{q\in\Gamma_\nu} \bigcap_{b\in[F_\nu(\nu)]^{<(1+\eta_\nu)}} H_{q,b}^\nu(\gamma) & \text{wenn } \nu < \gamma < \beta. \end{cases}$$

Offensichtlich wird (I) erfüllt von $\langle F_\mu \mid i \le \mu \le \nu + 1\rangle$, also kann man an Limesstellen $\lambda \le \beta$ vorgehen, wie gehabt:

$$F_\lambda(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} F(\gamma) & \text{wenn } \gamma < i \\ F_{\gamma+1}(\gamma) & \text{wenn } i \le \gamma < \lambda \\ \bigcap_{\mu<\lambda} F_\mu(\gamma) & \text{wenn } \lambda \le \gamma < \beta. \end{cases}$$

Somit ist $\langle F_\mu \mid i \le \mu \le \beta\rangle$ definiert und erfüllt offenbar Bedingung (I).

Zu (II):

Sei $\langle h, H\rangle \le \langle f, F_{\nu+1}\rangle$, $\nu = \max\{\mu < \beta \mid \underline{h}(\mu) \supsetneqq \underline{f}(\mu)\}$ und $\langle h, H\rangle$ beschränke $\dot\eta$. Setze $a \stackrel{\text{def}}{=} h(\nu) \setminus \underline{f}(\nu)$, $q \stackrel{\text{def}}{=} \langle h, H\rangle_0^\nu$ und zeige:

(3) $\forall b \in [F_{\nu+1}(\nu)]^{|a|} \quad q^\frown\langle f[\nu \mapsto \underline{f}(\nu) \cup b], F_{\nu+1}[\nu \mapsto F_{\nu+1}(\nu) \setminus \text{lub}(b)]\rangle_\nu^\beta$ beschränkt $\dot\eta$.

Beweis von (3). Es gilt: $q \in \Gamma_\nu$. $\langle h, H\rangle$ erfüllt 1. - 4., also $l_q^\nu(a) = 0$. Da $|b| = |a|$, $b \subseteq F_{\nu+1}(\nu) \subseteq X_q^\nu$ und X_q^ν homogen ist für l_q^ν, ist $l_q^\nu(b) = 0$, also wird $\dot\eta$ von $\langle h_{q,b}^\nu, H_{q,b}^\nu\rangle$ beschränkt. Aber wie zuvor:

$$q^\frown\langle f[\nu \mapsto \underline{f}(\nu) \cup b], F_{\nu+1}[\nu \mapsto F_{\nu+1}(\nu) \setminus \text{lub}(b)]\rangle_\nu^\beta \le \langle h_{q,b}^\nu, H_{q,b}^\nu.\rangle$$

$\square_{(3)}$

Für $b \in [F_{\nu+1}(\nu)]^{|a|}$ sei nach (3) $\rho_b < \tau$ minimal, so daß

$$q^\frown\langle f[\nu \mapsto \underline{f}(\nu) \cup b], F_{\nu+1}[\nu \mapsto F_{\nu+1}(\nu) \setminus \text{lub}(b)]\rangle_\nu^\beta \Vdash \dot\eta < \check\rho_b.$$

Setze: $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{b\in[F_{\nu+1}(\nu)]^{|a|}} \rho_b$.

(4) $q^\frown\langle f, F_{\nu+1}\rangle_\nu^\beta \Vdash \dot\eta < \check\rho$.

Beweis von (4). Aus (3) folgt, daß $\{r \in I\!P_0^\beta \mid r \Vdash \dot\eta < \check\rho\}$ dicht ist unter $q^\frown\langle f, F_{\nu+1}\rangle_\nu^\beta$. $\square_{(4)}$

$|[F_{\nu+1}(\nu)]^{|a|}| \le \kappa_\nu < \tau$, also, da τ regulär ist in M: $\rho < \tau$. Also heißt (4) gerade: $q^\frown\langle f, F_{\nu+1}\rangle_\nu^\beta$ beschränkt $\dot\eta$. Da ν und $\langle h, H\rangle$ beliebige das *Antezedens* von (II) erfüllende

Elemente waren, ist somit (II) gezeigt. $\square_{(II)}$

Genau wie im Beweis von Lemma 2.2.1 erhält man *mutatis mutandis* Behauptung $(*)$. $\square_{(*)}$

Mit Hilfe von $(*)$ folgt nun leicht (2), also daß τ regulr ist in $M[\mathfrak{G}]$:
Sei das Gegenteil angenommen, also $M[\mathfrak{G}] \models \mathrm{cf}(\tau) = \gamma < \tau$. Dann existieren $\dot{f} \in M^{I\!\!P}$ und $p = \langle h, H\rangle \in I\!\!P$ mit

$$p \Vdash \dot{f} : \check{\gamma} \longrightarrow \check{\tau} \text{ kofinal.}$$

Also

$$\forall i < \delta \quad p \Vdash \dot{f}(\check{i}) < \check{\tau}.$$

β ist eine Limeszahl. Sei also $i < \beta$ minimal, so daß $\gamma < \kappa_i$. Nach dem Produktsatz ist $M[\mathfrak{G}] = M[\mathfrak{G}_0^i][\mathfrak{G}_i^\beta]$. Da β das minimale Gegenbeispiel zum zu beweisenden Lemma ist, ist τ regulär in $M[\mathfrak{G}_0^i.]$ Setze:

$$\Delta = \{q \leq p \mid \forall r \leq q \, \forall \mu < \gamma \quad r \text{beschränkt} \dot{f}(\check{\mu}) \longrightarrow r_0^i {}^\frown q_i^\beta \text{beschränkt} \dot{f}(\check{\mu})\}.$$

Eine nicht neue Argumentation zeigt, daß Δ dicht unter p ist:

Sei $\bar{p} = \langle h, H\rangle \leq p$. Für $\mu < \gamma$ sei $q_\mu = \langle h, H_\mu\rangle$ gegeben durch Anwendung von $(*)$ auf $\bar{p}$, i und $\dot{f}(\check{\mu})$. Definiere $\bar{H}$ durch:

$$\bar{H}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} H(\mu) & \text{wenn } \eta < i \\ \bigcap_{\xi < i} H_\xi(\eta) & \text{wenn } i \leq \eta < \beta. \end{cases}$$

Dann ist $\langle h, \bar{H}\rangle \leq \bar{p}$ und $\langle h, \bar{H}\rangle \in \Delta$.

Sei also $q \in \Delta \cap \mathfrak{G}$. Definiere eine Funktion g durch:

$$g(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \text{das minimale } \nu \text{ mit} \exists r \in \mathfrak{G}_0^i \quad r^\frown q_i^\beta \Vdash \dot{f}(\check{\mu}) < \check{\mu}$$

für $\mu < \gamma$. Dann ist g aus $\mathfrak{G}_0^i$ und Elementen aus M definierbar, also $g \in M[\mathfrak{G}_0^i]$.

Die Definition von g ist korrekt, und $g : \gamma \longrightarrow \tau$: Sei $\nu < \gamma$. Sei $s \in \mathfrak{G}$, $s \leq q$ mit $s \Vdash \dot{f}(\check{\nu}) < \check{\xi} < \check{\tau}$. Dann folgt, da $q \in \Delta$, daß $s_0^i {}^\frown q_i^\beta \Vdash \dot{f}(\check{\nu}) < \check{\xi}'$ für ein $\xi' < \tau$. Also ist g an der Stelle ν definiert, da $s_0^i \in \mathfrak{G}_0^i$, und $g(\nu) \leq \xi' < \tau$ nach Minimalität.

g ist kofinal in τ : Es reicht zu zeigen, daß g die kofinale Funktion f dominiert, da $g : \gamma \longrightarrow \tau$. Sei dazu $g(\mu) = \xi$. Dann existiert eine Bedingung $r \in \mathfrak{G}_0^i$ mit $r^\frown q_i^\beta \Vdash \dot{f}(\check{\mu} < \check{\xi}$. Aber $r^\frown q_i^\beta \in \mathfrak{G}$, da $r \in \mathfrak{G}_0^i$ und $q_i^\beta \in \mathfrak{G}_i^\beta$. Also $f(\mu) < \xi = g(\mu) < \tau$.

Da $g \in M[\mathfrak{G}_0^i]$, ist also τ nicht regulär in $M[\mathfrak{G}_0^i]$, im Widerspruch zur Minimalität von β. $\square_{(2)}$

Behauptung (2) war alles, was zur Vervollständigung des Beweises noch fehlte. $\square$

2.3 Charakterisierungssatz und Maximalitätsprinzip

Es folgt eine Charakterisierung der $I\!\!P-$generischen Sequenzen, die die Gegenrichtung zu dem in Beobachtung 2.1.(5) angegebenen Kriterium darstellt. Für den Spezialfall von

Prikrys Forcing, also $D = \{\kappa\}$ und $\eta_0 = \omega$, wurde sie von A. R. D. Mathias bewiesen (vgl. [Mathias73]) und besagt, daß eine Sequenz von Ordnungstyp ω Prikry-generisch ist über einem Modell M, wenn sie in jeder Menge aus M von Maß eins bezüglich dem normalen Ultrafilter auf κ fast ganz, das heißt bis auf endlich viele Ausnahmen, enthalten ist.

Dieses Ergebnis läßt sich erfreulicherweise für das hier betrachtete Forcing noch verschärfen. Das eben genannte Kriterium gilt nicht nur „lokal", d. h. komponentenweise, sondern „global":

2.3.1 SATZ. *Eine Funktion $g \in \prod_{i<\alpha}[\kappa_i \setminus \mathrm{lub}_{j<i}\,\kappa_j]^{\eta_i}$ ist $\mathbb{P}-$generisch über M genau dann, wenn für jedes $X \in (M \cap \prod_{i<\alpha} U_i)$ gilt:*

$$|\bigcup_{i<\alpha} g(i) \setminus X(i)| < \omega.$$

Dabei heißt $\mathbb{P}-$Generizität von g, daß $\mathfrak{G}$ $\mathbb{P}-$generisch ist über M, wo

$$\mathfrak{G} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle t, T\rangle \mid \forall i < \alpha \quad \underline{t}(i) \subseteq g(i) \ \wedge\ g(i) \setminus \underline{t}(i) \subseteq T(i)\}.$$

Beweis. Wenn g eine $\mathbb{P}-$generische Sequenz ist, so folgt die Behauptung nach Beobachtung 2.1.(5), wie oben angedeutet. Die andere Richtung erfordert eine etwas längere Argumentation.

Zunächst ist es klar, daß man o. B. d. A. davon ausgehen kann, daß $\sum_{i<\alpha} \eta_i \geq \omega$, denn wenn das nicht der Fall ist, gilt der Satz trivialerweise: Wenn g die obigen Eigenschaften hat (wobei die Bedingung $|\bigcup_{i<\alpha} g(i) \setminus X(i)| < \omega$ nichts aussagt, da $|\bigcup \mathrm{ran}(g)| < \omega$) und $\bar{\Delta} \in M$ dicht in $\mathbb{P}$ ist, so sei $\langle g, H\rangle \geq \langle t, T\rangle \in \bar{\Delta}$, wo $H \in (M \cap \prod_{i<\alpha} U_i)$ definiert ist durch $H(i) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_i \setminus (\max(g(i)) + 1)$. Dann $t = g$ und folglich $\langle t, T\rangle \in \mathfrak{G}$, also ist $\mathfrak{G}$ $\mathbb{P}-$generisch über M.

Sei nun $X \in (M \cap \prod_{i<\alpha} U_i)$ und $\Delta \in M$ dicht und offen in $\mathbb{P}$. Definiere $\bar{\theta}(X, \Delta)$ in M, wie folgt:

Für $\nu < \alpha,\ q = \langle f, F\rangle \in \mathbb{P}_0^\nu$ und $a \in [\kappa_\nu]^{<(1+\eta_\nu)}$ sei $Z^\nu_{q,a} \in (M \cap \prod_{\nu \leq i<\alpha} U_i)$ mit

- $\langle \emptyset, Z^\nu_{q,a}\rangle \leq \langle \emptyset, X\rangle^\alpha_\nu$ (im Sinne von $\mathbb{P}^\alpha_\nu$)
- $\langle f \cup \{\langle \nu, a\rangle\}, F \cup Z^\nu_{q,a}\rangle \in \Delta$, wenn möglich.

Definiere eine Funktion $X^0 \in (M \cap \prod_{i<\alpha} U_i)$ durch

$$X^0(i) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\nu<i} \bigcap_{q \in \mathbb{P}_0^\nu} \bigcap_{a \in [\kappa_\nu]^{<(1+\eta_\nu)}} Z^\nu_{q,a}(i) \cap \bigcap_{q \in \mathbb{P}_0^i} \mathop{\triangle}_{a \in [\kappa_i]^{<(1+\eta_i)}} Z^i_{q,a}(i).$$

Dann gilt:

(1) Wenn $\langle s,H\rangle \in \Delta$ und $\langle \emptyset, H\rangle \leq \langle \emptyset, X\rangle$, so sei $i \stackrel{\text{def}}{=} \max(\text{dom}(s))$, falls existent, $i \stackrel{\text{def}}{=} 0$ sonst. Dann ist

$$\langle s, H \restriction i \cup X^0 \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto X^0(i) \setminus \text{lub}(\underline{s}(i))]\rangle \in \Delta,$$

also wenn $s = \emptyset$, dann $\langle s, X^0\rangle \in \Delta$.

Beweis von (1). Sei $q = \langle s,H\rangle_0^i$, $a = \underline{s}(i)$. Da $\langle s,H\rangle \in \Delta$: $p \stackrel{\text{def}}{=} \langle s, H \restriction i \cup Z^i_{q,a}\rangle \in \Delta$ per Definition von $Z^\nu_{q,a}$. Sei $p' \stackrel{\text{def}}{=} \langle s, H \restriction i \cup X^0 \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto X^0(i) \setminus \text{lub}(\underline{s}(i))]\rangle$. Dann $p' \leq p$:

Einzig nicht offensichtlich ist, daß $X^0(i) \setminus \text{lub}(a) \subseteq Z^i_{q,a}(i)$. Sei dazu $\gamma \in X^0(i) \setminus \text{lub}(a)$. Es ist $q \in \mathbb{P}^i_0$ und $\text{lub}(a) \leq \gamma$, also $\gamma \in Z^\imath_{q,a}(i)$, da $\gamma \in \triangle_{a \in [\kappa_i]^{<(1+\eta_i)}} Z^i_{q,a}(i)$ nach Definition von $X^0(i)$.

Da Δ offen ist und $p' \leq p \in \Delta$, folgt $p' \in \Delta$. $\square_{(1)}$

Für $\nu < \alpha$, $q = \langle t, T\rangle \in \mathbb{P}^\nu_0$ und $a \in [\kappa_\nu]^{<(1+\eta_\nu)}$ wird eine Funktion $l^\nu_{q,a} : \kappa_\nu \longrightarrow 2$ definiert durch:

$$l^\nu_{q,a}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{wenn } a \subseteq \xi \text{ und} \\ & \langle t[\nu \mapsto a \cup \{\xi\}], T \cup X^0 \restriction (\alpha \setminus \nu)[\nu \mapsto X^0(\nu) \setminus (\xi+1)]\rangle \in \Delta \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei dann $X^\nu_{q,a} \subseteq X^0(\nu)$, $X^\nu_{q,a} \in U_\nu$ homogen für $l^\nu_{q,a}$, das heißt, $l^\nu_{q,a}$ konstant auf $X^\nu_{q,a}$. Nun wird eine Funktion $X^1 \in \prod_{i<\alpha} U_i$ definiert durch

$$\begin{aligned} X^1(\nu) &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{q \in \mathbb{P}^\nu_0} \mathop{\triangle}_{a \in [\kappa_\nu]^{<(1+\eta_\nu)}} X^\nu_{q,a}, \text{ und gesetzt:} \\ \theta(X,\Delta) &\stackrel{\text{def}}{=} X^1. \end{aligned}$$

Dann folgt

(2) Sei $\langle s,H\rangle \in \Delta$, $\langle \emptyset, H\rangle \leq \langle \emptyset, X^1\rangle$. Wenn $s = \emptyset$, dann ist $\langle s, X^1\rangle \in \Delta$.
Andernfalls sei $i = \max(\text{dom}(s))$, $\xi_0 = \max(s(i)) \in X^1(i)$ und $a = s(i) \cap \xi_0$. Dann gilt für alle $\xi_1 \in X^1(i) \setminus (\text{lub}(a) \cup \text{lub}_{j<i}\, \kappa_j)$:

$$\langle s[i \mapsto a \cup \{\xi_1\}], H \restriction i \cup X^1 \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto X^1(i) \setminus (\xi_1 + 1)]\rangle \in \Delta.$$

Beweis von (2). Wenn $s = \emptyset$, so folgt die Behauptung aus (1), da Δ offen ist. Sei $s \neq \emptyset$ und i, ξ_0, sowie a der Behauptung entsprechend. Nach (1) ist dann

$$\begin{aligned} \langle s, H \restriction i \cup X^0 \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto X^0(i) \setminus (\xi_0+1)]\rangle &= \\ \langle s[i \mapsto a \cup \{\xi_0\}], H \restriction i \cup X^0 \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto X^0(i) \setminus (\xi_0+1)]\rangle &\in \Delta, \end{aligned}$$

also mit $q = \langle s,H\rangle^i_0$, da $a \subseteq \xi_0$: $l^i_{q,a}(\xi_0) = 0$. Sei nun $\xi_1 \in X^1(i)$ und $\xi_1 \geq \text{lub}(a)$, sowie $\xi_1 \geq \text{lub}_{j<i}\, \kappa_j$ (letzteres, um sicherzustellen, daß eine zulässige Bedingung entsteht; vgl. Bedingung 4. aus der Definition von $\leq$.) Da $\text{lub}(a) \leq \xi_1$, gilt nach Definition von $X^1(i)$ und dem diagonalen Schnitt: $\xi_1 \in X^i_{q,a}$. Aber ebenso folgt: $\xi_0 \in X^i_{q,a}$,

da auch $\xi_0 \in X^1(i)$ und $\mathrm{lub}(a) \leq \xi_0$. Nach Homogenität von $X^i_{q,a}$ für $l^i_{q,a}$ folgt, daß $0 = l^i_{q,a}(\xi_0) = l^i_{q,a}(\xi_1)$, und die Behauptung ist eine direkte Konsequenz aus der Definition von $l^i_{q,a}$. $\square_{(2)}$

Die obige Konstruktion von $X^1 = \theta(X, \Delta)$ wird nun iteriert werden, allerdings in beiden Komponenten. Zu diesem Zweck wird, motiviert durch (2), induktiv eine Folge $\langle \Delta^n \mid n \in \omega \rangle$ von Teilmengen von $\mathbb{P}$ definiert, wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} \Delta^0 & \stackrel{\text{def}}{=} & \Delta \\ \langle s, H \rangle \in \Delta^{n+1} & \stackrel{\text{def}}{\iff} & \langle s, H \rangle \in \mathbb{P} \text{ und es existiert ein } i < \alpha \text{, so daß} \\ & & (*)_{n+1} \text{ für alle } \nu \in H(i) \text{ gilt:} \\ & & \quad \langle s[i \mapsto \underline{s}(i) \cup \{\nu\}], H[i \mapsto H(i) \setminus (\nu+1)] \rangle \in \Delta^n. \end{array}$$

(3) $\langle \Delta^n \mid n < \omega \rangle$ ist eine aufsteigende Folge dichter, offener Teilmengen von $\mathbb{P}$.

Beweis von (3). Es wird per Induktion auf $n \in \omega$ gezeigt:

$$\Delta^n \text{ ist offen und } \Delta^n \subseteq \Delta^{n+1}.$$

$\boxed{n = 0}$ $\Delta^0 = \Delta$ ist offen nach Voraussetzung. Sei $\langle s, H \rangle \in \Delta^0$. Da $\sum_{i<\alpha} \eta_i \geq \omega$, kann man $i < \alpha$ finden mit $|\underline{s}(i)| < \eta_i$. Dann

$$\forall \nu \in H(i) \quad \langle s[i \mapsto \underline{s}(i) \cup \{\nu\}], H[i \mapsto H(i) \setminus (\nu+1)] \rangle \leq \langle s, H \rangle \in \Delta^0,$$

also erfüllt $\langle s, H \rangle$ nach Offenheit von Δ^0 Bedingung $(*)_1$ bezüglich i, das heißt, $\langle s, H \rangle \in \Delta^1$. $\langle s, H \rangle$ war beliebig in Δ^0 gewählt, also ist die zu beweisende Mengeninklusion gezeigt.

$\boxed{n \to n+1}$ Δ^{n+1} ist offen: Sei $q = \langle s', H' \rangle \leq \langle s, H \rangle = p \in \Delta^{n+1}$. Sei dann $i < \alpha$ so, daß $(*)_{n+1}$ gilt bezüglich i und p.

Fall 1: $\underline{s'}(i) \supsetneq \underline{s}(i)$.
Dann sei $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \min(s'(i) \setminus \underline{s}(i))$. Da $\nu \in H(i)$, folgt nach $(*)_{n+1}$:

$$\langle s[i \mapsto \underline{s}(i) \cup \{\nu\}], H[i \mapsto H(i) \setminus (\nu+1)] \rangle \in \Delta^n.$$

Aber $\langle s', H' \rangle$ ist eine Erweiterung dieser Bedingung, und Δ^n ist offen, also $q \in \Delta^n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\Delta^n \subseteq \Delta^{n+1}$, also $q \in \Delta^{n+1}$, was zu zeigen war.

Fall 2: $\underline{s'}(i) = \underline{s}(i)$.
Dann

$$\begin{array}{rcl} \forall \nu \in H'(i) \quad \langle s'[i \mapsto \underline{s'}(i) \cup \{\nu\}], H'[i \mapsto H'(i) \setminus (\nu+1)] \rangle & \leq & \\ \langle s[i \mapsto \underline{s}(i) \cup \{\nu\}], H[i \mapsto H(i) \setminus (\nu+1)] \rangle & \in & \Delta^n. \end{array}$$

Δ^n ist offen, also erfüllt $\langle s', H' \rangle$ Bedingung $(*)_{n+1}$ bezüglich i, also ist auch in diesem Fall $\langle s', H' \rangle \in \Delta^{n+1}$.

Die Inklusion $\Delta^{n+1} \subseteq \Delta^{n+2}$ folgt genauso wie im Fall $n = 0$; man muß in der dortigen Argumentation nur „0" durch „$n+1$" ersetzen.

Da $\Delta_0 = \Delta$ dicht ist, folgt die Dichtheit von Δ_n für $0 < n < \omega$ aus der Tatsache, daß $\langle \Delta_m \mid m < \omega \rangle$ aufsteigend ist. $\square_{(3)}$

Nun kann endlich die eingangs angekündigte Definition des Operators $\bar{\theta}$ erfolgen:
Für $X \in \prod_{i<\alpha} U_i$ und eine dichte, offene Teilmenge Δ von $I\!\!P$ setze:

$$\begin{aligned}
\bar{X}^0 &\stackrel{\text{def}}{=} X \\
\bar{X}^{n+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \theta(\bar{X}^n, \Delta^n) \\
\bar{X}(i) &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n<\omega} \bar{X}^n(i) \text{ für } i < \alpha, \text{ und} \\
\bar{\theta}(X, \Delta) &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{X}.
\end{aligned}$$

Zunächst seien zwei direkte Konsequenzen aus den Eigenschaften (1) und (2) notiert.
Für $\langle s, H \rangle \in \Delta^n$ mit $\langle \emptyset, H \rangle \leq \langle \emptyset, \bar{X} \rangle$ gelten:

(1') Wenn $s = \emptyset$, dann $\langle s, \bar{X} \rangle \in \Delta^n$. Wenn $s \neq \emptyset$, so sei $i = \max(\operatorname{dom}(s))$ und $\nu = \max(s(i))$. Dann

$$\langle s, H \restriction i \cup \bar{X} \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\nu + 1)] \rangle \in \Delta^n.$$

(2') Wenn $s \neq \emptyset$, $i = \max(\operatorname{dom}(s))$ und $\nu = \max(s(i)) \in \bar{X}(i)$, dann gilt mit $a = s(i) \cap \nu$, sowie $\gamma = \operatorname{lub}(a) \cup \operatorname{lub}_{j<i} \kappa_j$:

$$\forall \mu \in \bar{X}(i) \setminus \gamma \quad \langle s[i \mapsto a \cup \{\mu\}], H \restriction i \cup \bar{X} \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\mu + 1)] \rangle \in \Delta^n.$$

Beweis von (1') und (2'). Die Behauptungen ergeben sich durch Anwendung von (1) bzw. (2) auf $\bar{X}^n$ und Δ^n, was einerseits dadurch ermöglicht wird, daß $\langle \emptyset, \bar{X} \rangle \leq \langle \emptyset, \bar{X}^n \rangle$, und andererseits Δ^n nach (3) offen ist. $\square_{(1'),(2')}$

(4) Seien X und Δ wie bisher, $\bar{X} = \bar{\theta}(X, \Delta)$, sowie $\langle s, \bar{X} \rangle \geq \langle s', H \rangle \in \Delta$ und $\langle \emptyset, \bar{X} \rangle \geq \langle \emptyset, H \rangle$. Dann gelten:

(a) Wenn $s = \emptyset$ und $|\bigcup \operatorname{ran}(s')| = n$, dann $\langle \emptyset, \bar{X} \rangle \in \Delta^n$.

(b) Wenn $s \neq \emptyset$, $i = \max(\operatorname{dom}(s))$ und $|\bigcup_{i \leq j < \alpha} (\underline{s'}(j) \setminus \underline{s}(j))| = n$, dann

$$\langle s' \restriction i[i \mapsto s(i)], H \restriction i \cup \bar{X} \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\max(s(i)) + 1)] \rangle \in \Delta^n.$$

Bemerkung: Diese Aussagen behalten ihre Gültigkeit auch, wenn die Forderung $\langle s, \bar{X} \rangle \geq \langle s', H \rangle \in \Delta$ ersetzt wird durch $\langle s, X^* \rangle \geq \langle s', H \rangle \in \Delta$ für ein X^* mit $\langle \emptyset, \bar{X} \rangle \geq \langle \emptyset, X^* \rangle$, was auf den ersten Blick offensichtlich scheint, aber der Erwähnung bedarf, da in diesem Falle gar nicht gesichert ist, daß $\langle s, \bar{X} \rangle$ überhaupt eine Bedingung ist. Für den Beweis von (b) ist nur relevant, daß $s'(i) \setminus s(i) \subseteq \bar{X}(i)$.

Beweis von (4).

(a) Es wird per Induktion auf n (simultan für alle m) gezeigt:

Wenn $\langle \emptyset, \bar{X}\rangle \geq \langle s', H\rangle \in \Delta^m$ und $|\bigcup \mathrm{ran}(s')| = n$, dann $\langle \emptyset, \bar{X}\rangle \in \Delta^{m+n}$.

$\boxed{n = 0}$ Dann $s' = \emptyset$ und $\langle \emptyset, \bar{X}\rangle \geq \langle \emptyset, H\rangle \in \Delta^m$, also nach (1'): $\langle \emptyset, \bar{X}\rangle \in \Delta^m = \Delta^{m+n}$.

$\boxed{n \to n+1}$ Sei $\langle \emptyset, \bar{X}\rangle \geq \langle s', H\rangle \in \Delta^m$ und $|\bigcup \mathrm{ran}(s')| = n+1$. Dann insbesondere: $s' \neq \emptyset$. Sei $i = \max(\mathrm{dom}(s'))$, $\nu = \max(s'(i))$ und $\tilde{s} = s'[i \mapsto s'(i) \setminus \{\nu\}]$. Dann $\nu \in \bar{X}(i)$, also folgt nach (2'):

$$\forall \mu \in \bar{X}(i) \setminus \nu \quad \langle \tilde{s}[i \mapsto \tilde{s}(i) \cup \{\mu\}], H \restriction i \cup \bar{X} \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\mu+1)]\rangle \in \Delta^m.$$

Also, da $\nu < \min H(i)$, $H(i) \subseteq \bar{X}(i)$ und nach Offenheit von Δ^m :

$$\forall \mu \in H(i) \quad \langle \tilde{s}[i \mapsto \tilde{s}(i) \cup \{\mu\}], H[i \mapsto H(i) \setminus (\mu+1)]\rangle \in \Delta^m.$$

Das bedeutet: $\langle \tilde{s}, H\rangle \in \Delta^{m+1}$. Da $|\bigcup \mathrm{ran}(\tilde{s})| = n$ und $\langle \emptyset, \bar{X}\rangle \geq \langle \tilde{s}, H\rangle \in \Delta^{m+1}$, kann die Induktionsannahme angewandt werden, die ja für alle $m \in \omega$ gilt, und man erhält: $\langle \emptyset, \bar{X}\rangle \in \Delta^{m+1+n}$. $\square_{(a)}$

(b) Ähnlich wie in (a) wird per Induktion auf n simultan für alle $m \in \omega$ gezeigt:

Wenn $\langle s, \bar{X}\rangle \geq \langle s', H\rangle \in \Delta^m$, $s \neq \emptyset$, $i = \max(\mathrm{dom}(s))$ und $|\bigcup_{i \leq j < \alpha}(\underline{s'}(j) \setminus \underline{s}(j))| = n$, dann

$$\langle s' \restriction i[i \mapsto s(i)], H \restriction i \cup \bar{X} \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\max(s(i))+1)]\rangle \in \Delta^{m+n}.$$

$\boxed{n = 0}$ In diesem Fall ist $i = \max(\mathrm{dom}(s)) = \max(\mathrm{dom}(s'))$, $s(i) = s'(i)$, also $s' \restriction i[i \mapsto s(i)] = s'$. $\langle s', H\rangle \in \Delta^m = \Delta^{m+n}$, also nach (1')

$$\underbrace{\langle s', H \restriction i \cup \bar{X} \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\max(s'(i))+1)]\rangle}_{=\langle s' \restriction i[i \mapsto s(i)], H \restriction i \cup \bar{X} \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\max(s(i))+1)]\rangle} \in \Delta^m = \Delta^{m+n}$$

nach dem soeben Gesagten.

$\boxed{n \to n+1}$ Sei $\langle s, \bar{X}\rangle \geq \langle s', H\rangle \in \Delta^m$, $s \neq \emptyset$, $i = \max(\mathrm{dom}(s))$ und $|\bigcup_{i \leq j < \alpha}(\underline{s'}(j) \setminus \underline{s}(j))| = n+1$. Sei weiterhin $l = \max(\mathrm{dom}(s'))$, $\nu = \max(s'(l))$ und $\tilde{s} \stackrel{\mathrm{def}}{=} s'[l \mapsto s'(l) \cap \nu]$. Dann $\nu \in \bar{X}(l)$, also nach (2'):

$$\forall \mu \in \bar{X}(l) \setminus (\nu+1) \quad \langle \tilde{s}[i \mapsto \tilde{s}(i) \cup \{\mu\}], H \restriction l \cup \bar{X} \restriction (\alpha \setminus l)[l \mapsto \bar{X}(l) \setminus (\mu+1)]\rangle \in \Delta^m.$$

Es ist $\min(H(l)) > \nu$, also nach Offenheit von Δ^m :

$$\forall \mu \in H(l) \quad \langle \tilde{s}[i \mapsto \tilde{s}(i) \cup \{\mu\}], H[l \mapsto H(l) \setminus (\mu+1)]\rangle \in \Delta^m,$$

d. h. $\langle \tilde{s}, H\rangle \in \Delta^{m+1}$.
$\langle s, \bar{X}\rangle \geq \langle \tilde{s}, H\rangle$ und $|\bigcup_{i\leq j<\alpha} \underline{\tilde{s}}(j) \setminus \underline{s}(j)| = n$, also kann die Induktionsvoraussetzung eingesetzt werden, die ja wieder für alle $m<\omega$ gilt:

$$\underbrace{\langle \tilde{s} \restriction i[i \mapsto s(i)], H \restriction i \cup \bar{X} \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus \max(s(i))+1]\rangle}_{=\langle s' \restriction i[i\mapsto s(i)], H\restriction i\cup \bar{X}\restriction(\alpha\setminus i)[i\mapsto \bar{X}(i)\setminus \max(s(i))+1]\rangle} \in \Delta^{m+1+n}.$$

$\square_{(4)}$

Es folgt eine grundlegende Eigenschaft der Sequenz $\langle \Delta^n \mid n<\omega\rangle$, die umständlich zu formulieren ist, inhaltlich aber nicht überrascht:

(5) Sei $\langle s, Z\rangle \in \Delta^n$, $g \in \prod_{i<\alpha}[\kappa_i \setminus \mathrm{lub}_{j<i}\,\kappa_j]^{\eta_i}$ mit

$$\forall i<\alpha \quad (\underline{s}(i) \text{ ist ein Anfangsstück von } g(i) \wedge g(i)\setminus \underline{s}(i) \subseteq Z(i)),$$

mit anderen Worten: $\langle s, Z\rangle$ liege in dem mit g assoziierten Filter.

Dann existieren ein $m<n\,(m=-1,$ wenn $n=0)$, Ordinalzahlen $i_0<i_1<\ldots<i_m<\alpha$, sowie von 0 verschiedene natürliche Zahlen $j_0, j_1, \ldots, j_m$ mit $\sum_{l=0}^m j_l = n$, so daß mit

$$\begin{aligned}
s_{\langle i,k\rangle} &\stackrel{\text{def}}{=} s[i \mapsto \underline{s}(i) \cup \bigcup_{l=0}^{k-1}\{(g(i)\setminus \underline{s}(i))_l\}],\\
s_{\langle \alpha_0,k_0\rangle,\ldots,\langle \alpha_r,k_r\rangle} &\stackrel{\text{def}}{=} (\ldots((s_{\langle \alpha_0,k_0\rangle})_{\langle \alpha_1,k_1\rangle})\ldots)_{\langle \alpha_r,k_r\rangle},\\
Z_{\langle i,k\rangle} &\stackrel{\text{def}}{=} Z[i\mapsto Z(i)\setminus((g(i)\setminus \underline{s}(i))_{k-1}+1)] \quad \text{und}\\
Z_{\langle \alpha_0,k_0\rangle,\ldots,\langle \alpha_r,k_r\rangle} &\stackrel{\text{def}}{=} (\ldots((Z_{\langle \alpha_0,k_0\rangle})_{\langle \alpha_1,k_1\rangle})\ldots)_{\langle \alpha_r,k_r\rangle}
\end{aligned}$$

(wobei $r\in\omega$, $\langle \alpha_t \mid t<r\rangle \in {}^r\alpha$ und $\langle k_t \mid t<r\rangle \in {}^r\omega$) gilt:

$$\langle s_{\langle i_0,j_0\rangle,\ldots,\langle i_m,j_m\rangle}, Z_{\langle i_0,j_0\rangle,\ldots,\langle i_m,j_m\rangle}\rangle \in \Delta.$$

Beweis von (5). Induktion auf n.
$\boxed{n=0}$ $\langle s, Z\rangle \in \Delta$, $m=-1$.

$\boxed{n\to n+1}$ Sei $\langle s, Z\rangle \in \Delta^{n+1}$. Im Prinzip muß man nur auf die Definition von Δ^{n+1} zurückgehen: Sei $i<\alpha$ mit

$$\forall \mu \in Z(i) \quad \langle s[i\mapsto \underline{s}(i)\cup\{\mu\}], Z[i\mapsto Z(i)\setminus(\mu+1)]\rangle \in \Delta^n.$$

$g(i)\setminus \underline{s}(i) \neq \emptyset$, da $|g(i)| = \eta_i$ und $|s(i)|<\eta_i$, nach Wahl von i. Nach Voraussetzung: $(g(i)\setminus \underline{s}(i))_0 \in Z(i)$. Also:

$$\langle s', Z'\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle s[i\mapsto \underline{s}(i)\cup\{(g(i)\setminus \underline{s}(i))_0\}], Z[i\mapsto Z(i)\setminus((g(i)\setminus \underline{s}(i))_0+1)]\rangle \in \Delta^n.$$

g erfüllt die Voraussetzungen von (5) in Bezug auf $\langle s', Z'\rangle$ und n, also existieren $\tilde{m}<n$ und $\langle \tilde{i}_0, \tilde{j}_0\rangle, \ldots, \langle \tilde{i}_{\tilde{m}}, \tilde{j}_{\tilde{m}}\rangle$ mit $\sum_{l=0}^{\tilde{m}} \tilde{j}_l = n$ wie oben, so daß

$$\langle s'_{\langle \tilde{i}_0,\tilde{j}_0\rangle,\ldots,\langle \tilde{i}_{\tilde{m}},\tilde{j}_{\tilde{m}}\rangle}, Z'_{\langle \tilde{i}_0,\tilde{j}_0\rangle,\ldots,\langle \tilde{i}_{\tilde{m}},\tilde{j}_{\tilde{m}}\rangle}\rangle \in \Delta.$$

Sei $i_0, \ldots, i_m$ die monotone Aufzählung von $\{\tilde{i}_0, \ldots, \tilde{i}_{\tilde{m}}, i\}$. Setze für $l \leq m$:

$$j_l = \begin{cases} \tilde{j}_k & \text{wenn } \tilde{i}_k = i_l \wedge i \neq i_l \\ \tilde{j}_k + 1 & \text{wenn } \tilde{i}_k = i = i_l \\ 1 & \text{wenn } i = i_l \wedge \forall k \leq \tilde{m} \quad \tilde{i}_k \neq i. \end{cases}$$

Dann gilt offenbar wegen $\langle s', Z' \rangle = \langle s_{\langle i,1 \rangle}, Z_{\langle i,1 \rangle} \rangle$:

$$\langle s_{\langle i_0,j_0 \rangle,\ldots,\langle i_m,j_m \rangle}, Z_{\langle i_0,j_0 \rangle,\ldots,\langle i_m,j_m \rangle} \rangle = \langle s'_{\langle \tilde{i}_0,\tilde{j}_0 \rangle,\ldots,\langle \tilde{i}_m,\tilde{j}_m \rangle}, Z_{\langle \tilde{i}_0,\tilde{j}_0 \rangle,\ldots,\langle \tilde{i}_{\tilde{m}},\tilde{j}_{\tilde{m}} \rangle} \rangle \in \Delta.$$

$\square_{(5)}$

Jetzt sind alle Mittel bereitgestellt, die benötigt werden, um die Aussage des Satzes zu beweisen:

(6) Sei $g \in \prod_{i<\alpha}[\kappa_i \setminus \mathrm{lub}_{j<i}\, \kappa_j]^{\eta_i}$ so, daß für alle $X \in M \cap \prod_{i<\alpha} U_i$ gilt: $\bigcup_{i<\alpha} g(i) \setminus X(i)$ ist endlich. Sei weiterhin $Z \in M \cap \prod_{i<\alpha} U_i$ und $\Delta \in M$ dicht und offen in $I\!P$. Dann existiert eine Bedingung $\langle s, X \rangle \in \Delta$ mit

(a) $\langle \emptyset, X \rangle \leq \langle \emptyset, Z \rangle$.

(b) $\forall i \in \mathrm{dom}(s) \quad s(i)$ ist ein Anfangsstück von $g(i)$.

(c) $\forall i < \alpha \quad g(i) \setminus \underline{s}(i) \subseteq X(i)$.

Bemerkung: Aus (b) und (c) folgt, daß $\langle s, X \rangle \in \mathfrak{G}$, wo $\mathfrak{G}$ der aus g definierte Filter ist, also $\mathfrak{G} = \{\langle t, T \rangle \in I\!P \mid \forall i < \alpha \quad \underline{t}(i)$ ist Anfangsstück von $g(i)$ und $g(i) \setminus \underline{t}(i) \subseteq T(i)\}$. Da außerdem $\langle s, X \rangle \in \Delta$, ist also $\mathfrak{G}$, und somit g, $I\!P-$generisch über M, was zu zeigen war.

Beweis von (6). Man nehme das Gegenteil an. Sei dann β minimal, so daß (6) nicht auf $I\!P_0^\beta$ zutrifft, und seien Δ und Z Gegenbeispiele für (6), also $Z \in M \cap \prod_{i<\beta} U_i$ und $\Delta \in M$ dicht und offen in $I\!P_0^\beta$. Wieder ist $\sum_{i<\beta} \eta_i \geq \omega$ (insbesondere $\beta > 0$), da sonst (6) trivialerweise erfüllt ist: eine in Δ liegende Erweiterung $\langle g, X \rangle$ von $\langle g, Z \rangle$, die (a) erfüllt, leistet das Gewünschte.

Setze: $\bar{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bar{\theta}(Z, \Delta)$, gebildet bezüglich $I\!P_0^\beta$. Sei $u = \{i < \beta \mid g(i) \not\subseteq \bar{X}(i)\}$.

(I) $u \neq \emptyset$.

Beweis von (I). Angenommen, u sei leer. Sei $\langle s, H \rangle \leq \langle \emptyset, \bar{X} \rangle$, $\langle \emptyset, H \rangle \leq \langle \emptyset, \bar{X} \rangle$ und $\langle s, H \rangle \in \Delta$ nach Dichtheit und Offenheit. Sei $n = |\bigcup \mathrm{ran}(s)|$. Dann gilt nach Teil (a) von (4):

$$\langle \emptyset, \bar{X} \rangle \in \Delta^n.$$

$\langle \emptyset, \bar{X} \rangle$ und g erfüllen die Voraussetzungen von (5), da nach Widerspruchsannahme für alle $i < \beta$ gilt: $g(i) \subseteq \bar{X}(i)$. Also existieren $m < n$, $i_0 < \ldots < i_m < \beta$, sowie positive natürliche Zahlen $j_0, \ldots, j_m$ mit $\sum_{l=0}^m j_l = n$ und

$$\langle f, F \rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \emptyset_{\langle i_0,j_0 \rangle,\ldots,\langle i_m,j_m \rangle}, \bar{X}_{\langle i_0,j_0 \rangle,\ldots,\langle i_m,j_m \rangle} \rangle \in \Delta.$$

Man überzeugt sich leicht, daß $\langle f, F\rangle$ die Bedingungen (a)-(c) erfüllt, da $\langle \emptyset, F\rangle \leq \langle \emptyset, \bar{X}\rangle \leq \langle \emptyset, Z\rangle$. Also waren $\Delta,\ Z$ und β kein Gegenbeispiel zur Behauptung, ein Widerspruch. $\square_{(I)}$

Da u nach (I) nicht leer und nach Voraussetzung an g endlich ist, kann man setzen: $i = \max(u)$.

Für $j \in u$ sei
$$\gamma_j \stackrel{\text{def}}{=} \max(g(j) \setminus \bar{X}(j)).$$
Definiere eine Bedingung $\langle \tilde{g}, \tilde{X}\rangle$ mit $\operatorname{dom}(\tilde{g}) = u$ durch:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(j) &\stackrel{\text{def}}{=} g(j) \cap (\gamma_j + 1) \quad \text{für } j \in u, \text{ und} \\ \tilde{X}(\delta) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \bar{X}(\delta) & \text{wenn } \delta \in \beta \setminus u \\ \bar{X}(\delta) \setminus (\gamma_j + 1) & \text{wenn } \delta \in u. \end{cases} \end{aligned}$$

Setze:

$$\begin{aligned} B &\stackrel{\text{def}}{=} \{p \in I\!\!P^i_0 \mid p \leq \langle \tilde{g}, \tilde{X}\rangle^i_0\}, \\ a &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{g}(i) \quad \text{und} \\ \Delta' &\stackrel{\text{def}}{=} \{\langle t, H\rangle \in I\!\!P^i_0 \mid \langle t \cup \{\langle i, a\rangle\}, H \cup \bar{X} \restriction (\beta \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\gamma_i + 1)]\rangle \in \bigcup_{n\in\omega} \Delta^n\}. \end{aligned}$$

(II) Δ' ist dicht in B.

Beweis von (II). Sei $\langle t, H\rangle \in B,\ \langle \emptyset, H\rangle \leq \langle \emptyset, \bar{X}\rangle^i_0$ (B ist offen in $I\!\!P^i_0$) und $\langle s, W\rangle \in \Delta$ mit
$$\langle s, W\rangle \leq \langle t \cup \{\langle i, a\rangle\}, H \cup \bar{X} \restriction (\beta \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\gamma_i + 1)]\rangle$$
nach Dichtheit von Δ. Dann

$$\begin{aligned} \langle s, W\rangle^i_0 &\leq \langle t, H\rangle \text{ und} \\ \langle s, W\rangle &\leq \langle t \cup \{\langle i, a\rangle\}, X^*\rangle, \end{aligned}$$

mit $X^* \stackrel{\text{def}}{=} H \cup \bar{X} \restriction (\beta \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\gamma_i + 1)]$. Dann $\langle \emptyset, X^*\rangle \leq \langle \emptyset, \bar{X}\rangle$. Also nach (4):

$$\langle s \restriction i[i \mapsto a], W \restriction i \cup \bar{X} \restriction (\alpha \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\gamma_i + 1)]\rangle \in \Delta^n,$$

wo $n = |\bigcup_{i\leq j<\beta} \underline{s}(j) \setminus \bar{t}(j)|$. Also $\langle s, W\rangle^i_0 \in \Delta'$ und $\langle s, W\rangle^i_0 \leq \langle t, H\rangle$. $\langle t, H\rangle$ war beliebig in B gewählt, somit ist Δ' dicht in B. $\square_{(II)}$

Setze nun: $\tilde{\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in I\!\!P^i_0 \mid p \perp \langle \tilde{g}, \tilde{X}\rangle^i_0\}$. Nach einem Standardargument ist $\Delta' \cup \tilde{\Delta}$ dicht und offen in $I\!\!P^i_0$. Da $i < \beta$, kann nach Minimalität von β Behauptung (6) angewandt werden auf $I\!\!P^i_0$, $\bar{X} \restriction i$ und $g \restriction i$. Sei also $\langle s, \bar{Z}\rangle \in \Delta' \cup \tilde{\Delta}$ mit

(a') $\langle \emptyset, \bar{Z}\rangle \leq \langle \emptyset, \bar{X}\rangle^i_0$.

(b') $\forall j < i \quad \underline{s}(j)$ ist ein Anfangsstück von $g(j)$.

(c') $\forall j < i \quad g(j) \setminus \underline{s}(j) \subseteq \bar{Z}(j)$.

$\langle s, \bar{Z}\rangle \parallel \langle \tilde{g}, \tilde{X}\rangle_0^i$, da $\underline{s}(j)$ und $\underline{\tilde{g}}(j)$ Anfangsstücke von $g(j)$ sind, $g(j) \setminus \underline{s}(j) \subseteq \bar{Z}(j)$ und $g(j) \setminus \underline{\tilde{g}}(j) \subseteq \tilde{X}(j)$ für $j < i$ nach Definition von $\tilde{g}$ und $\tilde{X}$.

Also $\langle s, \bar{Z}\rangle \notin \tilde{\Delta}$, das heißt, $\langle s, \bar{Z}\rangle \in \Delta'$.
Nach Definition von Δ' existiert ein $n < \omega$ mit

$$\langle f, F\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle s \cup \{\langle i, a\rangle\}, \bar{Z} \cup \bar{X} \upharpoonright (\beta \setminus i)[i \mapsto \bar{X}(i) \setminus (\gamma_i + 1)]\rangle \in \Delta^n.$$

Nach Definition von u und wegen (c') erfüllt diese Bedingung die Voraussetzungen von (5). Also existieren $m < n$, $i_0 < \ldots < i_m < \beta$ und positive natürliche Zahlen $j_0, \ldots, j_m$ mit $\sum_{l=0}^m j_l = n$ und

$$\langle f_{\langle i_0, j_0\rangle, \ldots, \langle i_m, j_m\rangle}, F_{\langle i_0, j_0\rangle, \ldots, \langle i_m, j_m\rangle}\rangle \in \Delta.$$

Aber diese Bedingung erfüllt (a)-(c), also waren Δ und Z kein Gegenbeispiel; dies ist ein Widerspruch. $\square_{(6),2.3.1}$

Der folgende Satz liefert eine interessante Maximalitätseigenschaft von $\mathbb{P}-$generischen Sequenzen, die selbst für Prikrys ursprüngliches Forcing neu ist, obwohl sie im allgemeineren Kontext viel stärker ist. Sie besagt, daß wenn in einer Erweiterung eines Modells um eine generische Sequenz eine weitere liegt, die letztere in der ersteren fast vollständig enthalten ist. In diesem Sinne ist die Sequenz, um die erweitert wurde, maximal in dem dazugehörigen Modell. Hier wird ein reiner Forcing-Beweis für dieses Resultat gegeben; eine andere Möglichkeit, die mit iterierten Ultraprodukten arbeitet, wird in Kapitel 4 demonstriert. Der alternative Beweis ist relativ kurz und elegant, verwendet aber den Charakterisierungssatz in der essentiellen Richtung, deren Beweis aufwendiger ist, während der folgende Beweis nur die leicht zu sehende Beobachtung 2.1.(5) braucht.

2.3.2 Satz (Maximalitätsprinzip). *Seien g und h $\mathbb{P}-$generische Sequenzen über M, und $h \in M[g]$. Dann ist $\bigcup_{i<\alpha}(h(i) \setminus g(i))$ endlich.*

Beweis. Die Behauptung ist natürlich trivialerweise erfüllt, wenn $\sum_{i<\alpha} \eta_i < \omega$, sei also wieder $\sum_{i<\alpha} \eta_i \geq \omega$. Es wird ein Widerspruchsbeweis geführt. Seien also g und h wie in der Behauptung, aber die *conclusio* treffe nicht zu. Sei $\mathfrak{G}$ der zu g gehörige, über M $\mathbb{P}-$generische Filter, $\dot{g}$ der kanonische Name für die generische Sequenz und $\dot{h} \in M^{\mathbb{P}}$ ein beliebiger Name für h, sowie $\langle f, F\rangle \in \mathfrak{G}$ mit:

$$\langle f, F\rangle \Vdash \dot{g} \text{ und } \dot{h} \text{ sind } \check{\mathbb{P}} - \text{generisch über } \dot{M} \text{ und } \bigcup_{i<\check{\alpha}} \dot{h}(i) \setminus \dot{g}(i) \text{ ist unendlich.}$$

Für $i + 1 < \alpha$ und $n < \eta_i$ gilt:

$$\langle f, F\rangle \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} < \check{\kappa}_i.$$

$\kappa_i < \kappa_{i+1}$, also existiert nach Lemma 2.2.1 eine Funktion $F^{i,n} \in M \cap \prod_{j<\alpha} U_j$ mit:

(a) $F^{i,n} \upharpoonright (i+1) = F \upharpoonright (i+1)$ und $\langle f, F^{i,n}\rangle \leq \langle f, F\rangle$.

(b) Wenn $q \leq \langle f, F^{i,n} \rangle$ und $q \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} = \check{\eta}$, dann
$q_0^{i+1} \frown \langle f, F^{i,n} \rangle_{i+1}^{\alpha} \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} = \check{\eta}$.

Falls $\alpha = i+1$, so sei $F^{i,n} = F$. Dann ist auch in diesem Fall gewährleistet, daß (a) und (b) erfüllt sind.

Definiere $\tilde{F}$ durch:

$$\tilde{F}(i) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{j<\alpha \\ n<\eta_j}} F^{j,n}(i) = \bigcap_{\substack{j\leq i \\ n<\eta_j}} F^{j,n}(i) \quad \text{nach (a).}$$

Somit:

(b') Wenn $q \leq \langle f, \tilde{F} \rangle$ und $q \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} = \check{\eta}$, dann
$q_0^{i+1} \frown \langle f, \tilde{F} \rangle_{i+1}^{\alpha} \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} = \check{\eta}$.

Seien nun $i_0 < \alpha$ und $n < \eta_{i_0}$ fest. Definiere eine Folge $\langle F_j^{i_0,n} \mid i_0 \leq j \leq \alpha \rangle$ mit

(I) Für $i_0 \leq \nu \leq \mu \leq \alpha$ gilt: $F_\mu^{i_0,n} \restriction \nu = F_\nu^{i_0,n} \restriction \nu$ und $\langle f, F_\mu^{i_0,n} \rangle \leq \langle f, F_\nu^{i_0,n} \rangle \leq \langle f, \tilde{F} \rangle$.

Setze: $F_{i_0}^{i_0,n} \overset{\text{def}}{=} \tilde{F}$.
Wenn $\langle F_j^{i_0,n} \mid i_0 \leq j \leq \nu \rangle$ schon definiert ist, so sei

$$\Gamma_\nu \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_0^\nu \mid p \leq \langle f, F_\nu^{i_0,n} \rangle_0^\nu\}$$

und für $q \in \Gamma_\nu$ sei eine Funktion

$$l_q^\nu : [F_\nu^{i_0,n}(\nu)]^{<\omega} \longrightarrow 2$$

definiert durch:

$$l_q^\nu(a) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \begin{array}{l} \text{Wenn } \min(a) \supseteq \underline{f}(\nu) \text{ oder } a = \emptyset \text{, und ein } \langle t, T \rangle \text{ existiert} \\ \text{mit} \\ \quad \text{(a)} \ \langle t, T \rangle \leq \langle f, F_\nu^{i_0,n} \rangle \text{ und } \langle t, T \rangle_0^\nu = q. \\ \quad \text{(b)} \ \exists \delta \quad \langle t, T \rangle \Vdash (\dot{h}(\check{i_0}))_{\check{n}} = \check{\delta}. \\ \quad \text{(c)} \ \underline{t}(\nu) = a \cup \underline{f}(\nu) \text{ und} \\ \qquad\ \ t \restriction (\alpha \setminus (\nu+1)) = f \restriction (\alpha \setminus (\nu+1)). \end{array} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn $l_q^\nu(a) = 0$, so sei $\langle t_{q,a}^\nu, T_{q,a}^\nu \rangle$ entsprechend (a)-(c) gewählt, ansonsten sei $T_{q,a}^\nu = F_\nu^{i_0,n}$.
Sei $X_q^\nu \in U_\nu$ homogen für l_q^ν, $X_q^\nu \subseteq F_\nu^{i_0,n}(\nu)$. Setze:

$$F_{\nu+1}^{i_0,n}(\mu) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} F_\nu^{i_0,n}(\mu) & \text{wenn } \mu < \nu \\ \bigcap_{q\in\Gamma_\nu} (X_q^\nu \cap \underset{b\in[\kappa_\nu]^{<\omega}}{\triangle} T_{q,b}^\nu(\nu)) & \text{wenn } \mu = \nu \\ \bigcap_{\substack{q\in\Gamma_\nu \\ b\in[\kappa_\nu]^{<\omega}}} T_{q,b}^\nu(\mu) & \text{wenn } \nu < \mu < \alpha. \end{cases}$$

Offenbar erfüllt $\langle F^{i_0,n}_\mu \mid i_0 \le \mu \le \nu+1\rangle$ Bedingung (I).

(1) Sei $i_0 \le \nu < \alpha$, $\langle t,T\rangle \le \langle f, F^{i_0,n}_{\nu+1}\rangle$, $\langle t,T\rangle \Vdash (\dot{h}(\check{i_0}))_{\check{n}} = \check{\delta}$ und $t \restriction (\alpha \setminus (\nu+1)) = f \restriction (\alpha\setminus(\nu+1))$. Dann gilt:

$$\langle t,T\rangle^{\nu}_0 {}^\frown \langle f[\nu \mapsto \underline{t}(\nu)], F^{i_0,n}_{\nu+1}[\nu \mapsto F^{i_0,n}_{\nu+1}(\nu)\setminus \mathrm{lub}(\underline{t}(\nu))]\rangle^{\alpha}_{\nu} \Vdash (\dot{h}(\check{i_0}))_{\check{n}} = \check{\delta}.$$

Beweis von (1). Wenn $\langle t,T\rangle$ wie in der Voraussetzung ist, so sei $q = \langle t,T\rangle^{\nu}_0$ und $a = \underline{t}(\nu)\setminus \underline{f}(\nu)$. Da $\langle t,T\rangle$ (a)-(c) erfüllt, ist $l^{\nu}_q(a) = 0$. Sei $\delta' < \kappa_\nu$ mit $\langle t^{\nu}_{q,a}, T^{\nu}_{q,a}\rangle \Vdash (\dot{h}(\check{i_0}))_{\check{n}} = \check{\delta}'$. Dann gilt:

$$\langle t,T\rangle^{\nu}_0 {}^\frown \langle f[\nu \mapsto \underline{t}(\nu)], F^{i_0,n}_{\nu+1}[\nu \mapsto F^{i_0,n}_{\nu+1}(\nu)\setminus \mathrm{lub}(\underline{t}(\nu))]\rangle^{\alpha}_{\nu} \le \langle t^{\nu}_{q,a}, T^{\nu}_{q,a}\rangle,$$

denn die ersten Komponenten stimmen überein, für $j < \nu$ ist $T(j) = T^{\nu}_{q,a}(j)$, für $\nu < j < \alpha$ ist $F^{i_0,n}_{\nu+1}(j) \subseteq T^{\nu}_{q,a}(j)$ und $F^{i_0,n}_{\nu+1}(\nu)\setminus\mathrm{lub}(\underline{t}(\nu)) \subseteq T^{\nu}_{q,a}(\nu)$ per Definition von $F^{i_0,n}_{\nu+1}$. $\langle t,T\rangle$ und $\langle t^{\nu}_{q,a}, T^{\nu}_{q,a}\rangle$ sind kompatibel, also $\delta = \delta'$, da kompatible Bedingungen keine widersprüchlichen Aussagen erzwingen können. $\square_{(1)}$

Sei nun $\lambda \le \alpha$ eine Limeszahl und $\langle F^{i_0,n}_\nu \mid i_0 \le \nu < \lambda\rangle$ schon definiert. Setze dann:

$$F^{i_0,n}_\lambda(\beta) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} F^{i_0,n}_{i_0}(\beta) & \text{wenn } \beta < i_0 \\ F^{i_0,n}_{\beta+1}(\beta) & \text{wenn } i_0 \le \beta < \lambda \\ \bigcup_{i_0 \le \gamma < \lambda} F^{i_0,n}_\gamma(\beta) & \text{wenn } \lambda \le \beta < \alpha. \end{cases}$$

Damit ist $\langle F^{i_0,n}_\nu \mid i_0 \le \nu \le \alpha\rangle$ definiert.

Setze nun für $i_0 \le \mu \le \alpha$ und $j < \alpha$:

$$F^{i_0}_\mu(j) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{n<\omega} F^{i_0,n}_\mu(j)$$

und definiere

$$\hat{F}(j) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{i<\alpha} F^{i}_\alpha(j) = \bigcap_{i\le j} F^{i}_\alpha(j) \quad \text{nach (I).}$$

Somit erfüllt $\langle f, \hat{F}\rangle$:

(2) Sei $\langle t,T\rangle \le \langle f,\hat{F}\rangle$, $\langle t,T\rangle \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} = \check{\eta}$, $\nu \ge i$ und $t\restriction(\alpha\setminus(\nu+1)) = f\restriction(\alpha\setminus(\nu+1))$. Dann gilt:

$$\langle t,T\rangle^{\nu}_0 {}^\frown \langle f[\nu\mapsto \underline{t}(\nu)], \hat{F}[\nu \mapsto \hat{F}(\nu)\setminus\mathrm{lub}(\underline{t}(\nu))]\rangle^{\alpha}_{\nu} \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} = \check{\eta}.$$

Beweis von (2). Dies folgt direkt aus (1). $\square_{(2)}$

(3) Wenn $\langle t,T\rangle \le \langle f,\hat{F}\rangle$ und $\langle t,T\rangle \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} = \check{\eta}$, dann

$$\langle t,T\rangle^{i}_0 {}^\frown \langle f[i\mapsto \underline{t}(i)], \hat{F}[i \mapsto \hat{F}(i)\setminus\mathrm{lub}(\underline{t}(i))]\rangle^{\alpha}_{i} \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} = \check{\eta}.$$

Beweis von (3). Nach (b'):

$$\langle t, T\rangle_0^{i+1} {}^\frown \langle f, \hat{F}\rangle_{i+1}^{\alpha} \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} = \check{\eta},$$

also nach (2)

$$\langle t, T\rangle_0^{i} {}^\frown \langle f[i \mapsto \underline{t}(i)], \hat{F}[i \mapsto \hat{F}(i) \setminus \mathrm{lub}(\underline{t}(i))]\rangle_i^{\alpha} \Vdash (\dot{h}(\check{i}))_{\check{n}} = \check{\eta}.$$

$\square_{(3)}$

Für $q \in I\!\!P_0^\nu,\ a \in [\kappa_\nu]^{<\omega}$ und ein festes $m < \omega$ definiere $\tilde{l}_{q,a}^{\nu,m} = \tilde{l}_{q,a}^{\nu} : \kappa_\nu \longrightarrow 4$ durch:

$$\tilde{l}_{q,a}^{\nu}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{Wenn } a \neq \emptyset,\ \max(a) < \xi,\ \min(a) \supseteq \underline{f}(\nu) \text{ und mit } \\ & \zeta = \max(a) \text{ gilt:} \\ & \exists \delta \quad q^\frown \langle f[\nu \mapsto \underline{f}(\nu) \cup a \cup \{\xi\}], \hat{F}[\nu \mapsto \hat{F}(\nu) \setminus (\xi+1)]\rangle_\nu^\alpha \Vdash \\ & (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} < \check{\zeta} \\ 1 & \text{Wenn } a \neq \emptyset,\ \max(a) < \xi,\ \min(a) \supseteq \underline{f}(\nu) \text{ oder} \\ & a = \emptyset, \text{ und mit } \zeta = \max(a) \text{ bzw. } \zeta = \emptyset, \text{ falls } a = \emptyset, \text{ gilt:} \\ & \\ & \exists \delta \quad q^\frown \langle f[\nu \mapsto \underline{f}(\nu) \cup a \cup \{\xi\}], \hat{F}[\nu \mapsto \hat{F}(\nu) \setminus (\xi+1)]\rangle_\nu^\alpha \Vdash \\ & (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} > \check{\xi} \\ 2 & \text{Wenn } a \neq \emptyset,\ \max(a) < \xi,\ \min(a) \supseteq \underline{f}(\nu) \text{ oder} \\ & a = \emptyset, \text{ und mit } \zeta = \max(a) \text{ bzw. } \zeta = 0, \text{ falls } a = \emptyset, \text{ gilt:} \\ & \\ & \exists \delta \quad q^\frown \langle f[\nu \mapsto \underline{f}(\nu) \cup a \cup \{\xi\}], \hat{F}[\nu \mapsto \hat{F}(\nu) \setminus (\xi+1)]\rangle_\nu^\alpha \Vdash \\ & \check{\zeta} < (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} < \check{\xi} \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\tilde{X}_{q,a}^\nu \subseteq \hat{F}(\nu),\ \tilde{X}_{q,a}^\nu \in U_\nu$ homogen für $\tilde{l}_{q,a}^\nu$. Wenn $\tilde{l}_{q,a}^\nu``\tilde{X}_{q,a}^\nu \in \{\{0\},\{1\},\{2\}\}$, so sei

$$\begin{aligned} \delta_{q,a}^\nu(\xi) &= \text{dasjenige } \delta \text{ aus obiger Definition} \\ \delta_{q,a}^\nu &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Es folgt eine Definition von Mengen $Y_{q,a}^\nu \in U_\nu$, deren Motivation relativ leicht nachvollziehbar wird, wenn man die nächste Behauptung (4) betrachtet:

Fall 1: $\forall \xi \in \tilde{X}_{q,a}^\nu \quad \tilde{l}_{q,a}^\nu(\xi) = 0.$
Dann ist $\delta_{q,a}^\nu``\tilde{X}_{q,a}^\nu \subseteq \zeta = \max(a)$. Sei $Y_{q,a}^\nu \subseteq \tilde{X}_{q,a}^\nu,\ Y_{q,a}^\nu \in U_\nu$ und $\bar{\delta}_{q,a}^\nu$ derart, daß

$$\delta_{q,a}^\nu``Y_{q,a}^\nu = \{\bar{\delta}_{q,a}^\nu\}.$$

Fall 2: $\forall \xi \in \tilde{X}_{q,a}^\nu \quad \tilde{l}_{q,a}^\nu(\xi) = 1.$
Dann $\forall \xi \in \tilde{X}_{q,a}^\nu \quad \delta_{q,a}^\nu(\xi) > \xi$. Setze: $Y_{q,a}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{X}_{q,a}^\nu \cap \triangle_{\beta<\kappa_\nu} \tilde{X}_{q,a}^\nu \setminus (\delta_{q,a}^\nu(\beta)+1)$.

Fall 3: $\forall \xi \in \tilde{X}^\nu_{q,a} \quad \tilde{l}^\nu_{q,a}(\xi) = 2$.
Dann ist $\delta^\nu_{q,a} \restriction \tilde{X}^\nu_{q,a}$ regressiv. Sei nach dem Satz von Fodor $\tilde{Y}^\nu_{q,a} \subseteq \tilde{X}^\nu_{q,a}$, $\tilde{Y}^\nu_{q,a} \in U_\nu$ und $\bar{\delta}^\nu_{q,a} \in (\zeta, \kappa_\nu)$ (wobei wieder $\zeta = \max(a)$) mit $\delta^\nu_{q,a}``\tilde{Y}^\nu_{q,a} = \{\bar{\delta}^\nu_{q,a}\}$. Setze dann

$$Y^\nu_{q,a} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{Y}^\nu_{q,a} \setminus \{\bar{\delta}^\nu_{q,a}\}.$$

Fall 4: $\forall \xi \in \tilde{X}^\nu_{q,a} \quad \tilde{l}^\nu_{q,a}(\xi) = 3$.
Dann setze $Y^\nu_{q,a} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{X}^\nu_{q,a}$.

Definiere nun: $Y^\nu_q \stackrel{\text{def}}{=} \triangle_{a \in [\kappa_\nu]^{<\omega}} Y^\nu_{q,a}$.

Während der vorangehenden Konstruktion war ein $m \in \omega$ fest gewählt, um die Notation nicht unnötig kompliziert zu gestalten. Genaugenommen handelt es sich bei $Y^\nu_{q,a}$ um ein $Y^{\nu,m}_{q,a}$, und man setzt:

$$Y^\nu_{q,a} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{m<\omega} Y^{\nu,m}_{q,a}.$$

Schließlich wird $\bar{F} \in M \cap \prod_{i<\alpha} U_i$ definiert durch:

$$\bar{F}(i) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{q \in \mathbb{P}^i_0} Y^i_q$$

für $i < \alpha$.

(4) Wenn $|\underline{f}(\nu)| < \eta_\nu$, dann

$$\langle f, \bar{F} \rangle \Vdash (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} \notin \dot{g}(\check{\nu}) \to (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} \notin \check{\bar{F}}(\check{\nu}).$$

Beweis von (4). Sei $\langle f, \bar{F} \rangle \in \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}$ $\mathbb{P}-$generisch über M. Da $\langle f, \bar{F} \rangle$ eine Erweiterung von $\langle f, F \rangle$ ist, gilt: $M[\mathfrak{H}] \models |\bigcup_{i<\alpha} h'(i) \setminus g'(i)| \geq \omega$, wo $h' = \dot{h}^{\mathfrak{H}}$ und $g' = \dot{g}^{\mathfrak{H}}$ die zu $\mathfrak{H}$ gehörige, generische Sequenz ist, denn $\dot{g}$ war der kanonische Name für diese Sequenz.

Sei $\nu < \alpha$ mit $|\underline{f}(\nu)| < \eta_\nu$, $m < \eta_\nu$ und $\delta = (h'(\nu))_m \notin g'(\nu)$.

Fall 1: $\forall n < \eta_\nu \quad (h'(\nu))_m > (g'(\nu))_n$.
Sei $\langle t, T \rangle \leq \langle f, \bar{F} \rangle$, $\langle t, T \rangle \Vdash (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} > \check{\xi}$, $\langle t, T \rangle \in \mathfrak{H}$, wo $|t(\nu)| > |\underline{f}(\nu)|$ und $\xi = \max(t(\nu))$. Sei $q = \langle t, T \rangle^\nu_0$. Nach (3):

$$q^\frown \langle f[\nu \mapsto t(\nu)], \hat{F}[i \mapsto \hat{F}(i) \setminus (\xi + 1)] \rangle^\alpha_\nu \Vdash (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} > \check{\xi}.$$

Sei $a = t(\nu) \setminus \{\xi\}$. Dann ist $\tilde{l}^\nu_{q,a}(\xi) = 1$. Da $a \subseteq \xi$, ist $\xi \in Y^\nu_{q,a}$, aber $\delta = \delta^\nu_{q,a}(\xi) \notin Y^\nu_{q,a}$, da $\delta^\nu_{q,a}(\xi) \notin \tilde{X}^\nu_{q,a} \setminus (\delta^\nu_{q,a}(\xi) + 1)$; siehe Definition von $Y^\nu_{q,a}$ in Fall 2. Daraus folgt aber, daß $\delta \notin Y^\nu_q$: Wäre dies der Fall, dann wäre $\delta \in Y^\nu_{q,a}$, da $a \subseteq \xi < \delta$. Also $\delta = (h'(\nu))_m \notin Y^\nu_q \supseteq \bar{F}(\nu)$.

Fall 2: $\exists n < \eta_\nu \quad (h'(\nu))_m < (g'(\nu))_n$.
Sei n minimal mit dieser Eigenschaft.

Fall 2.1: $n < |\underline{f}(\nu)|$.
Dann $(g'(\nu))_n = (f(\nu))_n < \min(\bar{F}(\nu))$ nach Definition von $I\!P$. $\delta = (h'(\nu))_m < (f(\nu))_n$, also insbesondere: $(h'(\nu))_m \notin \bar{F}(\nu)$.

Fall 2.2: $n \geq |\underline{f}(\nu)|$.
Sei $\zeta = (g'(\nu))_n$. Dann gilt:

$(*)$ Es gibt $\langle t, T\rangle \leq \langle f, \bar{F}\rangle$ mit $\langle t, T\rangle \in \mathfrak{H}$, $|t(\nu)| = n+1$ und $\langle t, T\rangle \Vdash (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} < \check{\zeta}$.

Beweis von $(*)$. Sei $\langle \tilde{t}, \tilde{T}\rangle \leq \langle f, \bar{F}\rangle$, $\langle \tilde{t}, \tilde{T}\rangle \in \mathfrak{H}$, $|\tilde{t}(\nu)| \geq n+1$ mit

$$\langle \tilde{t}, \tilde{T}\rangle \Vdash (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} < \check{\zeta},$$

wo $\zeta = (g'(\nu))_n = (\tilde{t}(\nu))_n$ und $|\tilde{t}(\nu)|$ minimal unter solchen Bedingungen.
Wenn $|\tilde{t}(\nu)| = n+1$, so ist nichts mehr zu zeigen, und man setzt: $\langle t, T\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{t}, \tilde{T}\rangle$. Andernfalls ist $|\tilde{t}(\nu)| > n+1$.
Setze dann:

$$\begin{aligned} \xi &\stackrel{\text{def}}{=} \max(\tilde{t}(\nu)), \\ a &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}(\nu) \setminus (\underline{f}(\nu) \cup \{\xi\}) \neq \emptyset \quad \text{und} \\ \zeta' &\stackrel{\text{def}}{=} \max(a). \end{aligned}$$

Es gilt: $\zeta \leq \zeta'$. Nach (3):

$$\langle \tilde{t}, \tilde{T}\rangle_0^{\nu} {}^\frown \langle f[\nu \mapsto \tilde{t}(\nu)], \hat{F}[\nu \mapsto \hat{F}(\nu) \setminus (\xi+1)]\rangle_{\nu}^{\alpha} \Vdash (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} < \check{\zeta} \leq \check{\zeta}'.$$

Setze: $q = \langle \tilde{t}, \tilde{T}\rangle_0^{\nu}$. Dann $\tilde{l}^{\nu}_{q,a}(\xi) = 0$. Da $n \geq |\underline{f}(\nu)|:\ \xi \in \bar{F}(\nu) \subseteq Y^{\nu}_{q}$. $\zeta' = \max(a) < \xi$, also $\xi \in Y^{\nu}_{q,a}$, das heißt $\delta^{\nu}_{q,a}(\xi) = \bar{\delta}^{\nu}_{q,a} = \delta$. Dies gilt für alle $\xi' \in Y^{\nu}_{q,a} \setminus (\zeta'+1) \subseteq \bar{F}(\nu) \setminus (\zeta'+1)$. Also nach Homogenität von $Y^{\nu}_{q,a}$, und da $\langle \emptyset, \bar{F}\rangle \leq \langle \emptyset, \hat{F}\rangle$:

$$\forall \xi' \in \bar{F}(\nu) \setminus (\zeta'+1) \quad q^\frown \langle f[\nu \mapsto \underline{f}(\nu) \cup a \cup \{\xi'\}], \bar{F}[\nu \mapsto \bar{F}(\nu) \setminus (\xi'+1)]\rangle_{\nu}^{\alpha} \Vdash (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} < \zeta'.$$

Aber $\delta < \zeta$, also ist

$$\{p \in I\!P \mid p \Vdash (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} < \check{\zeta}\}$$

dicht unter

$$\langle t', T'\rangle \stackrel{\text{def}}{=} q^\frown \langle f[\nu \mapsto \underline{f}(\nu) \cup a], \bar{F}[\nu \mapsto \bar{F}(\nu) \setminus (\zeta'+1)]\rangle_{\nu}^{\alpha},$$

das heißt

$$\langle t', T'\rangle \Vdash (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} < \zeta.$$

Aber $\langle \tilde{t}, \tilde{T}\rangle \leq \langle t', T'\rangle$, also $\langle t', T'\rangle \in \mathfrak{H}$ und $|t'(\nu)| < |\tilde{t}(\nu)|$ im Widerspruch zur Minimalität von $|\tilde{t}(\nu)|$. $\square_{(*)}$

Sei nun $\langle t, T\rangle$ eine Bedingung mit den Eigenschaften aus $(*)$. Setze

$$\begin{aligned} q &\stackrel{\text{def}}{=} \langle t, T\rangle_0^\nu, \\ \xi' &\stackrel{\text{def}}{=} \max(t(\nu)) = (t(\nu))_n = (g'(\nu))_n \quad \text{und} \\ a &\stackrel{\text{def}}{=} t(\nu) \setminus (\underline{f}(\nu) \cup \{\xi'\}). \end{aligned}$$

Nach (3) gilt:

$$q^\frown \langle f[\nu \mapsto t(\nu)], \hat{F}[\nu \mapsto \hat{F}(\nu) \setminus (\xi'+1)]\rangle_\nu^\alpha \Vdash (\dot{h}(\check{\nu}))_{\check{m}} = \check{\delta} < \check{\xi}'.$$

Also: $\tilde{l}^\nu_{q,a}(\xi') = 2$.

Da $\xi' \in \bar{F}(\nu) \subseteq Y^\nu_q$ und $\xi' \supsetneqq a$, ist $\xi' \in Y^\nu_{q,a}$. Nach der Definition von $Y^\nu_{q,a}$ in Fall 3 folgt, daß $\delta = \bar{\delta}^\nu_{q,a} \notin Y^\nu_{q,a}$. Wie in Fall 1 der aktuellen Fallunterscheidung folgt daraus aber: $\delta \notin Y^\nu_q$, denn $a \subsetneqq \delta$, also würde vermittels der Definition des diagonalen Durchschnitts aus $\delta \in Y^\nu_q = \triangle_{b\in[\kappa_\nu]^{<\omega}} Y^\nu_{q,b}$ folgen, daß $\delta \in Y^\nu_{q,a}$, was eben ausgeschlossen wurde. $\square_{(4)}$

Seien nun wieder $\mathfrak{H}$, h' und g' wie in (4), also insbesondere

$$(+) \quad M[\mathfrak{H}] \models |\bigcup_{i<\alpha} h'(i) \setminus g'(i)| \geq \omega.$$

Es gilt:
$$\bigcup_{i<\alpha} h'(i)\setminus g'(i) = \bigcup_{\substack{i<\alpha \\ |\underline{f}(i)|=\eta_i}} h'(i)\setminus g'(i) \cup \bigcup_{\substack{i<\alpha \\ |\underline{f}(i)|<\eta_i}} h'(i)\setminus g'(i) \subseteq \bigcup_{\substack{i<\alpha \\ |\underline{f}(i)|=\eta_i}} h'(i)\setminus g'(i) \cup \bigcup_{\substack{i<\alpha \\ |\underline{f}(i)|<\eta_i}} h'(i)\setminus \bar{F}'(i)$$
nach (4). Aber
$$|\bigcup_{\substack{i<\alpha \\ |\underline{f}(i)|=\eta_i}} h'(i) \setminus g'(i)| \leq \sum_{\substack{i<\alpha \\ |\underline{f}(i)|=\eta_i}} \eta_i < \omega,$$

da $|\bigcup \mathrm{ran}(f)| < \omega$ nach Definition von $I\!\!P$, und

$$|\bigcup_{\substack{i<\alpha \\ |\underline{f}(i)|<\eta_i}} h'(i) \setminus \bar{F}'(i)| < \omega$$

nach dem Charakterisierungssatz 2.3.1 für $I\!\!P-$Generizität, beziehungsweise nach Beobachtung 2.1.(5). Also ist $|\bigcup_{i<\alpha} h'(i) \setminus g'(i)| < \omega$ im Widerspruch zu (+); der Satz ist bewiesen. $\square$

Kapitel 3

Eine Anwendung

In diesem Kapitel wird es darum gehen, einen sehr natürlichen Beweis dafür anzugeben, daß der Überdeckungssatz in der Form, wie er z. B. für das Modell $L[U]$ gilt, nicht mehr zutrifft auf das Kernmodell, wenn es darin einen regulären Limes von meßbaren Kardinalzahlen gibt. Die bis hierhin verwendeten Begriffe werden in den nächsten beiden Abschnitten zunächst kurz erläutert werden, bevor der zu zeigende Satz formuliert und schließlich bewiesen werden kann. Im nächsten Kapitel wird ein alternativer Zugang zu Prikry-Sequenzen dargestellt werden, der weniger Gebrauch von Forcing-Techniken macht, dafür aber stark von iterierten Ultraprodukten abhängt. Auf diese Weise ist es auch möglich, zu diesem Ergebnis zu gelangen; dies ist der von Mitchell gewählte Weg, vgl. [Mitchell84/2].

3.1 Das Kernmodell

Es ist hinlänglich bekannt, daß es in L keine meßbare Kardinalzahl gibt, und der Beweis hierfür ist ziemlich einfach: Man nehme das Gegenteil an. Sei dann κ minimal, so daß $L \models$ „κ ist meßbar". Sei $U \in L$ mit $L \models$ „U ist ein normaler Ultrafilter auf κ". Sei $M = {}^{\kappa}L/U$ das Ultraprodukt von L nach U, und sei $j : L \longrightarrow M$ die kanonische Einbettung. Es ist bekannt, daß M ein inneres Modell ist, das nach Elementarität von j das Konstruktibilitätsaxiom erfüllt, und daß L absolut ist für innere Modelle. Zusammen mit der Tatsache, daß $\kappa = \mathrm{crit}(j)$, liefert dies einen Widerspruch:

$$M \models \text{„}j(\kappa) \text{ ist die kleinste meßbare Kardinalzahl in } L\text{"},$$

also $L_M = L \models$ „$j(\kappa)$ ist die kleinste meßbare Kardinalzahl". Aber $j(\kappa) > \kappa$.

Es lag also nahe, nach inneren Modellen zu suchen, in denen es nicht ausgeschlossen ist, daß meßbare Kardinalzahlen existieren, um auf diesem Wege relative Konsistenzresultate zu finden. Der erste Ansatz war, $L[U]$ zu betrachten, wo U ein normaler Ultrafilter auf κ ist. Es stellte sich heraus, daß dieses Modell zwar einige schöne Eigenschaften hat, wie z.B. GCH, daß aber keine sinnvolle Feinstrukturtheorie dafür entwickelt werden konnte.

Um diesem Problem zu begegnen, wurde zunächst das sogenannte Kernmodell „unterhalb einer meßbaren Kardinalzahl" mitsamt der dazugehörigen Feinstrukturtheorie entwickelt und untersucht. Bald folgten Bestrebungen, ein Kernmodell mit ähnlichen strukturellen Eigenschaften zu finden, in dem es eine meßbare Kardinalzahl, oder sogar Folgen von meßbaren Kardinalzahlen geben kann. In dieser Entwicklung war besonders Mitchell sehr engagiert.

Das Hauptproblem bei diesen Kernmodellen ist, daß man für eine sinnvolle Feinstruktur das Modell in einer kumulativen Hierarchie aufbauen muß, wobei aufeinanderfolgende Stufen auf eine „konstruktive“ Weise auseinander hervorgehen müssen. Große Objekte müssen also von unten approximiert werden, was sich um so schwieriger gestaltet, je höher der Konsistenzgrad der Objekte ist.

Im folgenden sei das Kernmodell für eine Folge meßbarer Kardinalzahlen mit K bezeichnet. Zwei Ergebnisse über die Absolutheit des Kernmodells, die noch gebraucht werden, werden ohne Beweis angegeben, da diese eine rigorose Darstellung der Feinstrukturtheorie für Kernmodelle unabdingbar machen würden, und das würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

3.1.1 SATZ.
(a) Falls M ein inneres Modell ist, und $K \subseteq M$, dann ist

$$K_M = K.$$

(b) Sei M ein abzählbares, transitives ZFC-Modell mit $M \models V = K$. Sei $\mathbb{Q} \in M$ eine partielle Ordnung und $\mathfrak{G}$ ein $\mathbb{Q}-$generischer Filter über M. Dann

$$K_{M[\mathfrak{G}]} = K_M.$$

□

3.2 Verschiedene Formen des Überdeckungssatzes

Die Originalform des Überdeckungssatzes, wie sie 1972 von Jensen bewisen wurde, lautet:

3.2.1 SATZ. *Sei X eine überabzählbare Menge von Ordinalzahlen. Wenn $0^{\#}$ nicht existiert (äquivalent: Wenn es keine nichttriviale elementare Einbettung von L in L gibt), dann gibt es eine Menge $Y \in L$ mit $X \subseteq Y$ und $|X| = |Y|$.* □

Der Beweis des Überdeckungssatzes macht Gebrauch von der ebenfalls von Jensen entwickelten Feinstrukturtheorie für L und kann zum Beispiel in [Devlin84] nachgelesen werden, auch wenn es inzwischen elegantere Beweismethoden gibt. Im folgenden wird die Eigenschaft eines inneren Modells, zu jeder überabzählbaren Menge von Ordinalzahlen eine gleichmächtige, diese enthaltende zu beinhalten, als die „Überdeckungseigenschaft“ bezeichnet.

Es erhob sich bald die Frage, ob ein ähnlicher Satz für ein „$L-$ähnliches“ Modell gilt, wenn $0^{\#}$ existiert. Dazu wurde das ursprüngliche Kernmodell K entwickelt. Dieses ist immernoch „klein“ in dem Sinne, daß es in ihm keine meßbare Kardinalzahl gibt. Es wird allerdings $0^{\#}$ und andere „Sharps“, beinhalten, sofern diese existieren. Für K gilt der Überdeckungssatz mit der abgeschwächten Voraussetzung, daß es kein inneres Modell mit einer meßbaren Zahl gibt; vgl.[Dodd/Jensen2].

Doch was passiert, wenn es ein inneres Modell mit einer meßbaren Kardinalzahl gibt? Um diese Frage zu beantworten, wandte man sich zunächst der Untersuchung des kleinsten solchen Modells zu, $L[U]$, wo $L[U] \models$ „U ist ein normaler Ultrafilter auf κ“. Es ergab sich, daß der Überdeckungssatz im allgemeinen nicht für $L[U]$ zutrifft, und daß sein Scheitern tatsächlich durch die Existenz einer maximalen Prikry-Sequenz verursacht ist. Die Voraussetzung „$0^{\#}$ existiert nicht “ muß im Kontext von $L[U]$ zu „$0^{\dagger}$ existiert nicht“ abgewandelt werden, was gerade die Nichtexistenz einer nichttrivialen Einbettung von $L[U]$ in $L[U]$ garantiert. Die Form des Überdeckungssatzes für $L[U]$ lautet also:

3.2.2 Satz. *Wenn $0^{\dagger}$ nicht existiert, dann hat entweder K die Überdeckungseigenschaft, oder es existiert ein inneres Modell mit einer meßbaren Kardinalzahl. Sei dann κ minimal, so daß ein inneres Modell existiert, in dem κ meßbar ist. Dann existiert ein U, so daß $L[U] \models$ „U ist ein normaler Ultrafilter auf κ“. Entweder hat $L[U]$ die Überdeckungseigenschaft, oder es existiert eine Prikry-Sequenz S über $L[U]$. In diesem Falle hat $L[U, S] = L[S]$ die Überdeckungseigenschaft.* □

Hier ist mit „Prikry-Sequenz“ natürlich eine über $L[U]$ $\mathbb{P}(\kappa, \{\langle 0, U\rangle\}, \{\langle 0, \omega\rangle\})$-generische Sequenz gemeint.

Die letzte für diese Arbeit relevante Form des Überdeckungssatzes wurde von Mitchell für das von ihm entwickelte, größere Kernmodell, in dem es durchaus meßbare Zahlen geben kann, bewiesen, wobei im folgenden immer dieses Modell mit K bezeichnet sei.

3.2.3 Satz. *Wenn es kein inneres Modell mit einem regulären Limes von meßbaren Kardinalzahlen gibt, K rigide ist und K nicht die Überdeckungseigenschaft hat, dann gibt es eine Klasse A von meßbaren Kardinalzahlen in K und eine uniforme Prikry-Sequenz S für A, so daß $K[S]$ die Überdeckungseigenschaft hat.* □

So stellt sich natürlich die Frage, was passiert, wenn es ein Modell mit einem regulären Limes von meßbaren Kardinalzahlen gibt. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß die Voraussetzungen des obigen Satzes gemacht werden müssen, indem ein Modell konstruiert wird, in dem K einen regulären Limes von meßbaren Kardinalzahlen hat, nicht die Überdeckungseigenschaft hat, und in dem es keine maximale, einfache Prikry-Sequenz über K gibt. Insbesondere wird es in diesem Modell keine volle Prikry-Sequenz geben, das heißt eine, die an jeder Stelle Ordnungstyp ω hat.

3.3 Die Konstruktion

In diesem Abschnitt wird es darum gehen, ein Modell zu konstruieren, in dem der Überdeckungssatz in der Form, wie er für $L[U]$ gilt, nicht erfüllt ist bezüglich K. Es wird also gezeigt, daß die Version des Überdeckungssatzes, die von Mitchell bewiesen wurde, nicht verschärft werden kann.

Den Ausgangspunkt bildet also ein inneres Modell $\mathfrak{M}$ mit einem regulären Limes von meßbaren Kardinalzahlen. Dann wird auch das Kernmodell, gebildet in $\mathfrak{M}$, einen regulären Limes von meßbaren Kardinalzahlen haben. Man kann problemlos zu einem abzählbaren

Modell M übergehen, das die gleichen Eigenschaften hat. Zusätzlich sei vorausgesetzt:

$$M \models V = K + \theta \text{ ist ein regulärer Limes von meßbaren Kardinalzahlen } + V = L(V_\theta).$$

Wenn ein Modell gegeben ist, das alle der oben aufgeführten Eigenschaften hat, mit Ausnahme der letzten, so heißt dies, daß es in diesem Modell normale Ultrafilter gibt, deren Träger oberhalb von θ liegen. Dieses Modell wird aber iterierbar sein nach diesen Ultrafiltern. Wenn man eine Iteration der Länge „On“ durchführt, bleibt die Struktur des Modells unterhalb von θ erhalten, da der kritische Punkt einer jeden in der Iteration auftretenden Einbettung größer als θ sein wird, und alle oberhalb von θ liegenden Ultrafilter werden aus dem Universum „wegiteriert“. Das entstehende Modell wird auch die letzte gewünschte Eigenschaft haben.

Das Modell, in dem der Überdeckungssatz nicht gilt, wird in drei Schritten konstruiert werden. Der erste Schritt ist der Übergang zu einer generischen Erweiterung von M. Dabei wird das Forcing aus Kapitel 2 verwendet. Sei in M

$$\begin{aligned} \tilde{D} &\stackrel{\text{def}}{=} \{\nu < \theta \mid \nu \text{ ist meßbar}\} \text{ und} \\ D &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{D} \setminus \{\nu \mid \nu \text{ ist Limespunkt von } \tilde{D}\}. \end{aligned}$$

Seien wieder $\langle \kappa_i \mid i < \alpha \rangle$ die monotone Aufzählung von D und $\mathbf{U} = \langle U_i \mid i < \alpha \rangle$ eine Folge von normalen Ultrafiltern in M; wie erwartet sei U_i auf κ_i. Setze: $\forall i < \alpha \quad \eta_i = 1$. Dies definiert $\mathbb{P} = \mathbb{P}(D, \mathbf{U}, \langle \eta_i \mid i < \alpha \rangle)$. Dann gilt:

(1) $\alpha = \theta$,

denn wie früher ist $\alpha \leq \theta$, und da $\langle \kappa_i \mid i < \alpha \rangle$ kofinal in θ ist, gilt: $\alpha \geq \mathrm{cf}(\theta) = \theta$ nach Regularität von θ. $\square_{(1)}$

Bevor mit der eigentlichen Konstruktion begonnen wird, sei noch eine Sprechweise fixiert:

3.3.1 DEFINITION. Eine (einfache) Prikry-Sequenz ist eine über M $\mathbb{P}-$generische Sequenz.

$\square$

Schritt 1:
Sei $\mathfrak{G}$ $\mathbb{P}-$generisch über M. Die zu $\mathfrak{G}$ gehörige Prikry-Sequenz sei mit S bezeichnet.

Schritt 2:
Definiere in $M[\mathfrak{G}]$:

$$M' = \mathrm{HOD}(M, \{S \upharpoonright \nu \mid \nu < \alpha\}).$$

3.3.2 LEMMA. $M' \models$ *„Es gibt keine Prikry-sequenz.“*

Beweis. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt.

(a) $S \notin M'$.

Beweis von (a). Man nehme das Gegenteil an. Sei $\dot{S} \in M^{I\!P}$ der kanonische Name für die Prikry-Sequenz, die durch $I\!P$ adjungiert wird. Sei $p \in \mathfrak{G}$ mit

$$p \Vdash \dot{S} \in M'.$$

Daß dies ohne weiteres möglich ist, bedarf vielleicht einer Erläuterung: Nach einer adäquaten Arithmetisierung der mengentheoretischen Sprache läßt sich „$x \in OD(M, \{S \restriction \nu \mid \nu < \alpha\})$“ ausdrücken durch eine Formel φ, die besagt:

$$\exists \alpha \in \mathrm{On}\, \exists z \in M\, \exists \beta, \gamma \in \mathrm{On}\, \exists \dot{\psi} \quad V_\beta \models (\forall y \quad y \in x \longleftrightarrow \dot{\psi}[\alpha, S \restriction \gamma, z](y)).$$

Dies ist möglich nach dem Relativierungssatz von Lévy, der besagt, daß jede definierbare Menge schon in einem Anfangsstück des Universums definierbar ist, und die Beschränkung in obiger Formel auf jeweils eine Ordinalzahl, ein Element aus M und eines aus $\{S \restriction \nu \mid \nu < \alpha\}$ ist möglich, da man endliche Folgen von Ordinalzahlen durch eine Ordinalzahl kodieren kann (via der Gödelschen Paarfunktion), da M unter endlichen, ungeordneten Paaren abgeschlossen ist, und letztlich, da $S \restriction \nu \subseteq S \restriction \mu$ für $\nu < \mu < \alpha$. Somit gilt in $M[\mathfrak{G}]$:

$$x \in \mathrm{HOD}(M, \{S \restriction \nu \mid \nu < \alpha\}) \longleftrightarrow \forall z \in \mathrm{TC}(\{x\}) \quad \varphi(z).$$

Es wurde also einfach ein $p \in \mathfrak{G}$ gewählt mit

$$p \Vdash \forall z \in \mathrm{TC}(\{\dot{S}\}) \quad \varphi(z).$$

An dieser Stelle wurde das als M interpretierte Prädikat $\dot{M}$ verwendet, das in die (Forcing-) Sprache aufgenommen wurde.

Im folgenden wird ein Widerspruch abgeleitet, indem zwei über M $I\!P-$generische Filter $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ konstruiert werden, die beide p enthalten, und deren zugehörige Prikry-Sequenzen S_1 und S_2 sich insgesamt unendlich oft unterscheiden, auf Anfangsstücken aber fast immer, das heißt mit endlich vielen Ausnahmen an allen Stellen, übereinstimmen. Dies hat zur Folge, daß

$$M'^{M[\mathfrak{G}_1]} = M'^{M[\mathfrak{G}_2]}.$$

Da $p \in \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$, folgt:

$$S_1, S_2 \in M'^{M[\mathfrak{G}_1]} \cap M'^{M[\mathfrak{G}_2]} \subseteq M[\mathfrak{G}_1] \cap M[\mathfrak{G}_2].$$

Dies ist aber ein Widerspruch zum Maximalitätsprinzip 2.3.2, wobei dieses Prinzip an dieser Stelle noch nicht nötig sein wird, um einen Widerspruch zu erhalten, wie man sehen wird.

Es werden die mit den beiden zu konstruierenden generischen Filtern assoziierten Prikry-Sequenzen, aus denen ja erstere eindeutig zu gewinnen sind, induktiv definiert, und zwar nach einem „Hin-und-Her-Verfahren“, indem beide Sequenzen schrittweise abwechselnd verlängert werden.

Für diese Konstruktion ist es angebracht, ein Stück zurückzutreten, und die Situation von außen, also von V aus, zu betrachten. Sei $\langle \Delta_n \mid n < \omega \rangle$ eine Aufzählung der dichten, offenen Teilmengen von $\mathbb{P}$ in M. Wähle eine Folge $\langle \lambda_n \mid n < \omega \rangle$ kofinal in θ. All dies ist möglich, da M abzählbar und transitiv ist.

Es werden zwei Folgen $\langle p_n \mid n < \omega \rangle$ und $\langle q_n \mid n < \omega \rangle$ aus ${}^{<\omega}\mathbb{P}$ definiert, deren Folgenglieder p_n bzw. q_n mit $\langle h_n, H_n \rangle$ bzw. $\langle t_n, T_n \rangle$ bezeichnet werden. Im Zuge dieser Konstruktion werden zusätzlich zwei Folgen $\langle \gamma_n \mid n < \omega \rangle$ und $\langle \delta_n \mid n < \omega \rangle$ definiert, wobei $\gamma_n = \max(\mathrm{dom}(h_n))$ und $\delta_n = \max(\mathrm{dom}(t_n))$. Es wird dafür gesorgt werden, daß sich S_1 und S_2 genau an den Stellen $\{\gamma_n \mid n < \omega\} \cup \{\delta_n \mid n < \omega\}$ unterscheiden, und daß die monotone Aufzählung dieser Stellen kofinal in θ sein wird. Sei $p = \langle h, H \rangle$ und o. B. d. A. $h \neq \emptyset$.

Wähle zunächst $p_0 = \langle h_0, H_0 \rangle \leq p$ mit

- $p_0 \in \Delta_0$ und
- $\gamma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max(\mathrm{dom}(h_0)) > \max\{\max(\mathrm{dom}(h)), \lambda_0\}$.

Wenn $\langle p_k \mid k \leq n \rangle$ und $\langle q_k \mid k < n \rangle$ schon definiert sind, nicht aber q_n, so sei $q_n = \langle t_n, T_n \rangle$ mit

- $t_n \upharpoonright (\mathrm{dom}(h_n) \setminus (\{\gamma_m \mid m \leq n\} \cup \{\delta_m \mid m < n\}))$.
  $= h_n \upharpoonright (\mathrm{dom}(h_n) \setminus (\{\gamma_m \mid m \leq n\} \cup \{\delta_m \mid m < n\}))$.
- $\gamma_n \in \mathrm{dom}(t_n)$ und $t_n(\gamma_n) \neq h_n(\gamma_n)$.
- $\delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \max(\mathrm{dom}(t_n)) > \max\{\gamma_n, \lambda_{2n+1}\}$.
- $q_n \leq q_{n-1}$ (wobei $q_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} p$).
- $q_n \in \Delta_n$.

Offenbar ist es immer möglich, ein solches q_n zu finden, da Δ_n dicht und offen ist.

Wenn $\langle p_k \mid k \leq n \rangle$ und $\langle q_k \mid k \leq n \rangle$ schon definiert sind, nicht aber p_{n+1}, so sei $p_{n+1} = \langle h_{n+1}, H_{n+1} \rangle$ mit

- $h_{n+1} \upharpoonright (\mathrm{dom}(t_n) \setminus (\{\gamma_m \mid m \leq n\} \cup \{\delta_m \mid m \leq n\}))$.
  $= t_n \upharpoonright (\mathrm{dom}(t_n) \setminus (\{\gamma_m \mid m \leq n\} \cup \{\delta_m \mid m \leq n\}))$.
- $\delta_n \in \mathrm{dom}(t_{n+1})$ und $h_{n+1}(\delta_n) \neq t_n(\delta_n)$.
- $\gamma_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \max(\mathrm{dom}(h_{n+1})) > \max\{\delta_n, \lambda_{2n+2}\}$.
- $p_{n+1} \leq p_n$.
- $p_{n+1} \in \Delta_{n+1}$.

Dies definiert $\langle p_n \mid n < \omega\rangle$ und $\langle q_n \mid n < \omega\rangle$.
Setze:

$$\begin{aligned} S_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n<\omega} h_n, \\ S_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n<\omega} t_n, \\ \mathfrak{G}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{r \in I\!P \mid \exists n < \omega \quad p_n \leq r\} \text{ und} \\ \mathfrak{G}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \{r \in I\!P \mid \exists n < \omega \quad q_n \leq r\}. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion sind S_1 und S_2 Prikry-Sequenzen. Definiere $\langle \xi_n \mid n < \omega\rangle$ durch:

$$\begin{aligned} \xi_{2n} &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma_n \quad \text{und} \\ \xi_{2n+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \delta_n. \end{aligned}$$

Offenbar ist $\langle \xi_n \mid n < \omega\rangle$ eine aufsteigende, in θ kofinale $\omega-$Folge, denn für $n < \omega$ ist $\lambda_n < \xi_n$. Weiterhin ist für jedes $\nu < \alpha$

$$D_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu < \nu \mid S_1(\mu) \neq S_2(\mu)\} = \{\xi_n \mid n < \omega\} \cap \nu.$$

Insbesondere ist D_ν also endlich. Das heißt aber gerade, daß $S_1 \restriction \nu$ aus $S_2 \restriction \nu$ und einer endlichen Menge von Ordinalzahlen definierbar ist und umgekehrt. Die oben dargestellte Zielsetzung, daß $M'^{\mathfrak{G}_1}$ mit $M'^{\mathfrak{G}_2}$ übereinstimmen soll, das heißt $(HOD(M, \{S_1 \restriction \nu \mid \nu < \alpha\}))^{M[\mathfrak{G}_1]} = (HOD(M, \{S_2 \restriction \nu \mid \nu < \alpha\}))^{M[\mathfrak{G}_2]}$, ist also erreicht. Man erhält nun, wie oben gezeigt, daß $S_1, S_2 \in M[\mathfrak{G}_1] \cap M[\mathfrak{G}_2]$. Dies ist einmal ein Verstoß gegen das Maximalitätsprinzip, widerspricht aber auch dem Erhaltungssatz 2.2.5, da man aus S_1 und S_2 die in θ kofinale Folge $\{\xi_n \mid n < \omega\}$ definieren kann, während $I\!P$ Kofinalitäten erhält und θ in M regulär ist. $\square_{(a)}$

(b) Es gibt in M' keine Prikry-Sequenz.

Beweis von (b). Man nehme das Gegenteil an. Sei $S' \in M'$ Prikry-Sequenz. Dann $S' \in M[\mathfrak{G}]$. Nach dem Maximalitätsprinzip ist $\{\nu < \alpha \mid S(\nu) \neq S'(\nu)\}$ endlich, also S aus S' unter Zuhilfenahme einer endlichen Menge von Ordinalzahlen definierbar. Das heißt: $S \in M'$ im Widerspruch zu (a). $\square_{(b)}$

Mit M' ist schon fast ein Modell mit den gewünschten Eigenschaften gefunden. Das Problem ist nur, daß nicht gewährleistet ist, daß das Auswahlaxiom in M' gilt. Um dieses Manko zu beseitigen, ist noch ein letzter Schritt vonnöten.

Da M mit der Eigenschaft $M \models V = L(V_\theta)$ gewählt wurde, wird dies auch in M' gelten. Das heißt, das Auswahlaxiom kann in M' höchstens an der Nichtexistenz einer Wohlordnung von V_θ scheitern. Um eine solche Wohlordnung zu M' zu adjungieren, wird noch ein letztes Forcing angewandt.

Schritt 3:
Sei in M'

$$\mathbb{Q} = \{p \mid p \text{ist eine Funktion } \wedge \ \mathrm{dom}(p) \subseteq \theta \ \wedge \ |\mathrm{dom}(p)| < \theta \ \wedge \ \mathrm{ran}(p) \subseteq 2\},$$

also eine Variante des bekannten Cohen-Forcing zur Adjunktion einer neuen Teilmenge von θ. $\mathbb{Q}$ ist $\theta-$abgeschlossen, fügt also keine neue, beschränkte Teilmenge von θ hinzu.

Sei F ein $\mathbb{Q}-$ generischer Filter über $M[\mathfrak{G}]$, also auch über M'.

(2) $M'[F] \models \mathrm{AC}$.

Beweis von (2). Es gilt:

$$M'[F] \models V = L(V_\theta^{M'}, F),$$

da

$$M' \models V = L(V_\theta).$$

Sei

$$B = \{\nu \mid \exists p \in F \quad p(\nu) = 1\}$$

die mit F assoziierte, neue Teilmenge von θ. Die folgende Argumentation findet in $M'[F]$ statt. Es wird gezeigt:

$$L(V_\theta^{M'}, F) = L(B),$$

bzw. daß diese Identität, relativiert nach $M'[F]$, gilt. Dafür muß nur gezeigt werden, daß $V_\theta^{M'}$ aus B konstruierbar ist. Dies läßt sich aber wiederum darauf reduzieren zu zeigen, daß $\mathrm{On} \cap V_\theta^{M'}$ aus B konstruierbar ist, denn $L(B)$ ist ein ZFC-Modell; vgl. [Kanamori94, 1.5.1(b) und S. 34]. Sei also $a \subseteq \gamma < \theta, \ a \in V_\theta^{M'}$. Dann

$(*) \quad \exists \xi < \theta \quad a = \{i < \alpha \mid \xi + i \in B\}.$

Beweis von $(*)$. Nach Generizität von F, beziehungsweise B:
Setze

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists \xi < \theta \forall i < \gamma \quad \xi + i \in \mathrm{dom}(p) \ \wedge \ i \in a \ \longleftrightarrow \ p(\xi + i) = 1\}.$$

Offenbar ist Δ dicht in $\mathbb{Q}$: Sei $p \in \mathbb{Q}$ beliebig. Sei $\delta = \mathrm{lub}(\mathrm{dom}(p)) < \theta$ nach Regularität. Definiere $\tilde{p} \in \mathbb{Q}$ durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\tilde{p}) &\stackrel{\text{def}}{=} [\delta, \delta + \gamma] \\ \tilde{p}(\delta + i) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \in a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist $q \stackrel{\text{def}}{=} p \cup \tilde{p} \in \mathbb{Q}$ eine Bedingung aus Δ. Offenbar ist $\Delta \in M'$, also ist der Schnitt von Δ und F nicht leer, was die Behauptung beweist. $\square_{(*)}$

Aus Behauptung $(*)$ folgt aber gerade, daß a aus B definierbar ist. Also gilt $L(B) = L(V_\theta^{M'}, F) = V^{M'[F]}$. Da B wohlgeordnet ist, läßt sich in $M'[F]$ eine Wohlordnung von

$V^{M'[F]}$ definieren; insbesondere gilt das Auswahlaxiom in $M'[F]$. $\square_{(2)}$

(3) Es gibt in $M'[F]$ keine Prikry-Sequenz.

Beweis von (3). Man nehme das Gegenteil an. Sei dann $p \in \mathbb{Q}$ mit

$$p \Vdash \text{„Es gibt eine Prikry-Sequenz“}.$$

Sei $B_1 \times B_2$ $\quad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}-$generisch über M', sei $p \in B_1 \cap B_2$ und seien $S_1 \in M'[B_1]$, $S_2 \in M'[B_2]$ Prikry-Sequenzen. Setze für $i \in \{1,2\}$ und $\lambda < \alpha$:

$$a_\lambda^i \overset{\text{def}}{=} \{\nu < \lambda \mid S_i(\nu) \neq S(\nu)\}.$$

Dann gilt:

(+) $\quad \forall \lambda < \alpha \quad a_\lambda^1$ und a_λ^2 sind endlich.

Beweis von (+). Es wird ein Widerspruchsbeweis geführt. Sei $i \in \{1,2\}$ und $|a_\lambda^i| \geq \omega$ für ein $\lambda < \alpha$. Setze dann

$$\tilde{a}_\lambda^i \overset{\text{def}}{=} \{\prec \nu, \mu \succ \ \mid S(\nu) \neq S_i(\nu) = \mu \ \wedge \ \nu < \lambda\}$$

$\tilde{a}_\lambda^i$ ist eine beschränkte Teilmenge von θ aus $M'[B_i]$, also $\tilde{a}_\lambda^i \in M'$, da $\mathbb{Q}$ keine neuen beschränkten Teilmengen von θ adjungiert. Aber $S_i \restriction \lambda$ ist aus $\tilde{a}_\lambda^i$ und $S \restriction \lambda \in M'$ definierbar, also $S_i \restriction \lambda \in M[\mathfrak{G}]$. Setze:

$$\tilde{S} \overset{\text{def}}{=} S \restriction (\alpha \setminus \lambda) \cup S_i \restriction \lambda.$$

Offenbar ist $\tilde{S}$ eine Prikry-Sequenz. Aber da a_λ^i unendlich ist, unterscheidet sich $\tilde{S}$ an unendlich vielen Stellen von S, im Widerspruch zum Maximalitätsprinzip. $\square_{(+)}$

Setze nun für $\lambda < \alpha$:

$$u_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{\nu < \lambda \mid S_1(\nu) \neq S_2(\nu)\}$$

Offensichtlich ist $u_\lambda \subseteq a_\lambda^1 \cup a_\lambda^2$, also ist u_λ endlich für jedes $\lambda < \alpha$. Weiterhin ist $u_\delta \subseteq u_\lambda$ für $\delta \leq \lambda < \alpha$. Folglich existiert $\delta_0 < \alpha$ mit

$$\forall \xi < \alpha \quad \xi > \delta_0 \longrightarrow u_\xi = u_{\delta_0},$$

denn sonst wäre $g : \omega \longrightarrow \theta$ konfinal, wo

$$g(n) \overset{\text{def}}{=} \min\{\nu \mid |u_\nu| \geq n\}.$$

$g \in M'[B_1][B_2]$, aber θ ist regulär in diesem Modell.

Sei also δ_0 mit dieser Eigenschaft gewählt. Dann

$$S_1 \restriction (\alpha \setminus \delta_0) = S_2 \restriction (\alpha \setminus \delta_0)$$

und $|u_{\delta_0}| < \omega$. Also unterscheiden sich S_1 und S_2 nur an endlich vielen Stellen. Das heißt:

$$S_1, S_2 \in M'[B_1] \cap M'[B_2] \subseteq M'$$

nach Satz 1.2.17. Dies ist offenbar ein Widerspruch zu Lemma 3.3.2: In M' gibt es keine Prikry-Sequenz. $\square_{(3)}$

Bemerkung. In $M'[F]$ gibt es auch für $\tilde{D} = \{\mu < \theta \mid \mu \text{ ist meßbar in } M\}$ keine Prikry-Sequenz, da deren Einschränkung auf D dann $\mathbb{P}-$generisch wäre.

Mit

$$N \overset{\text{def}}{=} M'[F]$$

ist ein ZFC-Modell gefunden, und es gilt

$$M \subseteq N \subseteq M[\mathfrak{G}][F].$$

Also existiert eine partielle Ordnung $\mathbb{R} \in M$ und ein über M $\mathbb{R}-$generischer Filter $\mathfrak{H}$, so daß

$$N = M[\mathfrak{H}].$$

(4) In N gilt die starke Form des Überdeckungssatzes nicht.

Beweis von (4). Die Menge

$$A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\nu < \aleph_1} S(\nu)$$

liegt in N und ist nicht durch eine Menge der gleichen Kardinalität aus M überdeckbar, denn wäre dem so, so sei

$$A \subseteq C \in M \text{ und } |A|^N = |C|^N.$$

Definiere dann $X \in M \cap \prod_{i<\alpha} U_i$ durch

$$X(i) \overset{\text{def}}{=} \kappa_i \setminus C.$$

Da Kardinalitäten und Kofinalitäten zwischen M und N absolut sind, ist $|C|^M = \aleph_1$, also ist X wegen der κ_0-Vollständigkeit aller betrachteten Ultrafilter tatsächlich ein Element obenstehender Menge.

Offenbar ist aber X ein Gegenbeispiel zu der im Charakterisierungssatz 2.3.1 angegebenen Eigenschaft, denn $|\bigcup_{i<\alpha} S(i) \setminus X(i)| = \aleph_1$ in $M[\mathfrak{G}]$, obwohl $M[\mathfrak{G}] \models$ „S ist Prikry-Sequenz“.

Nach Satz 3.1.1(b) ist

$$K_N = K_{M[\mathfrak{H}]} = K_M = M,$$

also erfüllt K in N nicht die Überdeckungseigenschaft. Aber nach (3) existiert in $N = M'[F]$ keine Prikry-Sequenz, d. h. die für $L[U]$ gültige Form des Überdeckungssatzes läßt sich nicht auf Kernmodelle mit regulärem Limes von meßbaren Kardinalzahlen übertragen. $\square_{(4)}$

Kapitel 4

Iterierte Ultraprodukte und Prikry-Sequenzen

Es wurde schon an zwei Stellen darauf hingewiesen, daß man durch iterierte Ultraprodukte Prikry-Sequenzen erhalten kann. In diesem Kapitel soll dieser Ansatz verfolgt werden, indem gezeigt wird, daß die Sequenz der *indiscernibles* einer Iteration von Ultraprodukten, also die Folge der kritischen Punkte der kanonischen Einbettungen, einen Charakterisierungssatz und ein Maximalitätsprinzip über dem Zielmodell erfüllen. Diese beiden Eigenschaften verwendete Mitchell in [Mitchell84/2], allerdings ohne sie zu beweisen, um ein Modell mit den Eigenschaften aus 3.3 zu konstruieren. Dazu verwendete er das sogenannte *decoupling forcing,* aber auf eine Darstellung der Details der Konstruktion wird hier verzichtet, da die beiden aufgeführten Sätze tatsächlich den Dreh- und Angelpunkt der Argumentation darstellen, und der Rest in diesem Kontext keine neuen Einsichten bereithält.

Mit Hilfe der obigen fundamentalen Eigenschaften wird schließlich ein alternativer Beweis des Maximalitätsprinzips für das Forcing angegeben, das im Zentrum dieser Arbeit steht. Dieser ist vielleicht etwas überraschend, da das Zielmodell einer Iteration, das ja „kleiner“ ist als das Ausgangsmodell, herangezogen wird, um Aussagen über eine generische Erweiterung des Grundmodells zu machen.

4.1 Charakterisierung und Maximalität II

Den Ausgangspunkt der weiteren Untersuchungen wird ein transitives ZFC-Modell M bilden, das ein inneres Modell, also eine echte Klasse, oder auch eine Menge sein kann. Es sollte in letzterem Fall abgeschlossen unter $\omega-$Folgen sein, was leicht zu erreichen ist. Die Konstruktion der Iteration wird die gleichen Freiheitsgrade haben, wie die des Forcings aus Kapitel 2.

Seien also D, α, $\langle\kappa_i \mid i < \alpha\rangle$, θ, $\langle\eta_i \mid i < \alpha\rangle$ und $\mathbf{U}$ wie in Kapitel 2. Der Genauigkeit halber seien $K = \langle\kappa_i \mid i < \alpha\rangle$ und $l = \langle\eta_i \mid i < \alpha\rangle$, aufgefaßt als Funktionen, also $l(i) = \eta_i$ und $K(i) = \kappa_i$ für $i < \alpha$.

Die grobe Idee ist natürlich, daß η_i angibt, wie oft ein Ultraprodukt nach dem $i-$ten Ultrafilter gebildet werden soll. Obwohl eine lineare Iteration durchgeführt wird, werden

die Iterate mit Paaren von gewissen Ordinalzahlen indiziert werden, da diese Schreibweise sehr suggestiv ist. Die erste Komponente gibt den Index (im aktuellen Iterat) des Ultrafilters an, nach dem iteriert wird, und die zweite, wie oft bereits nach diesem Filter iteriert wurde. Die genaue Konstruktion der Iteration wird zunächst durchgeführt, ohne zu wissen, daß sie terminieren wird:
Setze:

$$M_{\langle 0,0\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} M.$$

Wenn $M_{\langle\beta,0\rangle}$ definiert ist und $\beta = \pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\alpha)$, so bricht die Iteration ab.

Wenn $M_{\langle\beta,n\rangle}$ definiert ist, $\beta < \pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\alpha)$ und $\pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\beta) > n$, dann sei

$$\begin{aligned} M_{\langle\beta,n+1\rangle} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Ult}(M_{\langle\beta,n\rangle}, \pi^{\langle\beta,n\rangle}_{\langle\beta,0\rangle}(\pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\beta))) \\ &= \mathrm{Ult}^{n+1}(M_{\langle\beta_0\rangle}, \pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\beta)) \end{aligned}$$

und $\pi^{\langle\beta,n+1\rangle}_{\langle\beta,n\rangle} : M_{\langle\beta,n\rangle} \longrightarrow M_{\langle\beta,n+1\rangle}$ die kanonische Einbettung. Für Vorgängermodelle M_i sei natürlich $\pi^{\langle\beta,n+1\rangle}_i = \pi^{\langle\beta,n+1\rangle}_{\langle\beta,n\rangle} \circ \pi^{\langle\beta,n\rangle}_i$.

Wenn $M_{\langle\gamma,m\rangle}$ bereits definiert ist für alle $\gamma < \beta$ und alle $m < 1 + \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\gamma)$, so sei

$$M_{\langle\beta,0\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \text{dir lim}(\langle M_i \mid i \in I_{\langle\beta,0\rangle}\rangle, \langle \pi^j_i \mid i < j \in I_{\langle\beta,0\rangle}\rangle),$$

wo $I_{\langle\beta+1,0\rangle}$ die lexikographisch geordnete Menge der bis hierhin aufgetretenen Indizes bezeichnet.

Nun wird die Folge der Iterationspunkte definiert:

$$\lambda_{\langle\beta,m\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{\langle\beta,m\rangle}_{\langle\beta,0\rangle}(\pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\beta)).$$

Dann ist

$$\mathrm{crit}(\pi^{\langle\beta,n\rangle}_{\langle\beta,m\rangle}) = \lambda_{\langle\beta,m\rangle}$$

für $m < n < 1 + \pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\beta)$.

Der notationellen Einfachheit halber wird gesetzt: $\mathrm{crit(id)} = \infty$.
Im folgenden werden i und j meist für in der Iteration auftretende Indizes stehen. Bezeichne I die Klasse dieser Indizes. Später wird sich herausstellen, daß I tatsächlich eine Menge ist.

4.1.1 LEMMA. *Für $\langle\beta,m\rangle \in I$ ist $\beta < \lambda_{\langle\beta,m\rangle}$.*

Beweis. Offenbar reicht es zu zeigen, daß $\beta < \lambda_{\langle\beta,0\rangle}$, da $\langle\lambda_{\langle\beta,n\rangle} \mid n < 1 + \pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\beta)\rangle$ eine aufsteigende Folge ist nach 1.3.4. Dies ist aber eine direkte Konsequenz aus der Diskretheit von D:
Da $\pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)$ die monotone Aufzählung von $\pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(D)$ ist, und $\lambda_{\langle\beta,0\rangle} = \pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\beta)$, gilt

$$M_{\langle\beta,0\rangle} \models \lambda_{\langle\beta,0\rangle} = \text{das } \beta\text{−te Element der diskreten Menge } \pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(D).$$

Also $\beta = \sup_{\nu<\beta}(\nu+1) \leq \sup_{\nu<\beta} \pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\nu) < \pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\beta) = \lambda_{\langle\beta,0\rangle}$. $\square$

Somit ist

$$\begin{aligned} M_{\langle\beta,n+1\rangle} &= \mathrm{Ult}(M_{\langle\beta,n\rangle}, \pi^{\langle\beta,n\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\beta)), \\ \pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\beta) &= \pi^{\langle\beta,n\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\beta) \quad \text{und} \\ \lambda_{\langle\beta,n\rangle} &= \pi^{\langle\beta,n\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\beta). \end{aligned}$$

4.1.2 Definition. Für $\langle\gamma,m\rangle \in I$ wird der $I-$Nachfolger von $\langle\gamma,m\rangle$, falls existent, definiert:

$$s(\langle\gamma,m\rangle) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \langle\gamma,m+1\rangle & \text{wenn} \quad m < \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\gamma) \quad \text{und} \quad \gamma < \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\alpha) \\ \langle\gamma+1,0\rangle & \text{wenn} \quad m = \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\gamma) \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\square$

Um ähnliche Argumente anwenden zu können, wie bei den einfachen Iterationen, bei denen das Ultraprodukt immer nach dem jeweiligen Bild ein und desselben Ultrafilters im Ausgangsmodell gebildet wird, ist es wichtig, daß die Folge der kritischen Punkte aufsteigend ist. Dies wird als Lemma formuliert:

4.1.3 Lemma. *Für i und j aus I mit $i<j$ ist $\lambda_i < \lambda_j$ und* $\mathrm{crit}(\pi^j_i) \geq \lambda_i$.

Beweis. Die Behauptung wird per transfinite Induktion auf j bewiesen.

$\boxed{j = \langle 0,0\rangle}$ In diesem Fall ist nichts zu zeigen.

$\boxed{j \longrightarrow s(j)}$ Sei $i < s(j),\ i = \langle\gamma,m\rangle$ und $j = \langle\delta,n\rangle$.

Fall 1: $s(j) = \langle\delta,n+1\rangle$.
Dann ist $\lambda_j < \lambda_{s(j)}$, also $\lambda_i \leq \lambda_j < \lambda_{s(j)}$. Weiterhin ist $\mathrm{crit}(\pi^{\langle\delta,n+1\rangle}_{\langle\delta,n\rangle}) = \lambda_{\langle\delta,n\rangle}$ und $\mathrm{crit}(\pi^j_i) \geq \lambda_i$, also $\mathrm{crit}(\pi^{\langle\delta,n+1\rangle}_i) \geq \lambda_i$, da $\lambda_\mathrm{j} \geq \lambda_i$.

Fall 2: $s(j) = \langle\delta+1,0\rangle$.
Dann ist $\pi^{s(j)}_j = \mathrm{id}$, also $\mathrm{crit}(\pi^{s(j)}_i) = \mathrm{crit}(\pi^j_i) \geq \lambda_i$.

$$M_j \models \lambda_j = \text{das } \delta\text{−te Element von } \pi^j_{\langle 0,0\rangle}(D).$$

Also, da $M_j = M_{s(j)}$:

$$\begin{aligned} M_{s(j)} &\models \lambda_j = \text{das } \delta\text{−te Element von } \pi^j_{\langle 0,0\rangle}(D) \\ \wedge\lambda_{s(j)} &= \text{das } (\delta+1)\text{−te Element von } \pi^j_{\langle 0,0\rangle}(D). \end{aligned}$$

Also $\lambda_j < \lambda_{s(j)}$.

Sei nun j ein Limespunkt von I, also insbesondere $n = 0$. Sei die Behauptung für alle $j' < j$ gültig. Sei $i < j,\ i = \langle\gamma, m\rangle$ und $j = \langle\delta, 0\rangle$.

Dann ist für alle $k < j$ mit $i < k$ $\pi_i^k \restriction \lambda_i = \mathrm{id}$, also auch $\pi_i^j \restriction \lambda_i = \mathrm{id}$, wie Standardargumente über den gerichteten Limes zeigen. Also $\mathrm{crit}(\pi_i^j) \geq \lambda_i$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \pi^i_{\langle 0,0\rangle}(K)(\gamma), \quad \text{also} \\ \pi_i^j(\lambda_i) &= \pi^j_{\langle 0,0\rangle}(K)(\pi_i^j(\gamma)) \\ &= \pi^j_{\langle 0,0\rangle}(K)(\gamma) \quad \text{nach Lemma 4.1.4.1} \\ &< \pi^j_{\langle 0,0\rangle}(K)(\delta) = \lambda_j. \end{aligned}$$

Da weiterhin $\lambda_i \leq \pi_i^j(\lambda_i)$ ist, folgt $\lambda_i < \lambda_j$. □

An dieser Stelle kann man sich klarmachen, daß die Iteration terminiert:

4.1.4 LEMMA. *Die Klasse I der in der Iteration auftretenden Indizes ist eine Menge; die Konstruktion der Iteration bricht also irgendwann ab.*

Beweis. Die Annahme des Gegenteils wird zum Widerspruch geführt. Definiere für eine Limesordinalzahl β :

$$f(\beta) \overset{\text{def}}{=} \text{das kleinste } \eta \text{ mit } \lambda_{\langle\beta,0\rangle} \in \mathrm{ran}(\pi^{\langle\beta,0\rangle}_{\langle\eta,0\rangle}).$$

Dies ist möglich, da $M_{\langle\beta,0\rangle}$ als gerichteter Limes der Vorgängerstrukturen definiert ist. Offenbar ist f regressiv. Da der Definitionsbereich von f unbeschränkt und abgeschlossen in den Ordinalzahlen ist, existiert nach Lemma 1.1.7 eine Zahl η derart, daß

$$X \overset{\text{def}}{=} f^{-1}``\{\eta\}$$

ebenfalls unbeschränkt ist. Für $\gamma \in X$ sei

$$g(\gamma) \overset{\text{def}}{=} (\pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\eta,0\rangle})^{-1}(\lambda_{\langle\gamma,0\rangle}).$$

Dann ist g beschränkt durch $\pi^{\langle\eta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\theta)$:

$$g(\gamma) = \xi \quad \longleftrightarrow \quad \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\eta,0\rangle}(\xi) = \lambda_{\langle\gamma,0\rangle}$$

und $\lambda_{\langle\gamma,0\rangle} \in \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(D)$, also

$$\xi \in \pi^{\langle\eta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(D),$$

das heißt,

$$g(\gamma) = \xi < \sup(\pi^{\langle\eta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(D)) = \pi^{\langle\eta,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\theta).$$

Also existieren nach einem „Schubfachprinzip" eine unbeschränkte Teilklasse Z von X und eine Ordinalzahl ξ, so daß $g``Z = \{\xi\}$.

Seien γ und δ aus Z mit $\gamma < \delta$. Dann gilt:

$$\pi_{\langle\gamma,0\rangle}^{\langle\delta,0\rangle}(\lambda_{\langle\gamma,0\rangle}) = \pi_{\langle\gamma,0\rangle}^{\langle\delta,0\rangle}(\pi_{\langle\eta,0\rangle}^{\langle\gamma,0\rangle}(\xi)) = \pi_{\langle\eta,0\rangle}^{\langle\delta,0\rangle}(\xi) = \lambda_{\langle\delta,0\rangle}.$$

Aber andererseits:

$$\begin{aligned} \pi_{\langle\gamma,0\rangle}^{\langle\delta,0\rangle}(\lambda_{\langle\gamma,0\rangle}) &= \pi_{\langle\gamma,0\rangle}^{\langle\delta,0\rangle}(\pi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle\gamma,0\rangle}(K)(\gamma)) \\ &= \pi_{\langle\gamma,0\rangle}^{\langle\delta,0\rangle}(\pi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle\gamma,0\rangle}(K))(\gamma) \\ &= \pi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle\delta,0\rangle}(K)(\gamma) \\ &< \pi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle\delta,0\rangle}(K)(\delta) = \lambda_{\langle\delta,0\rangle}, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Nach Definition der Iteration kann die Konstruktion nur an einem Index der Form $\langle\zeta, 0\rangle$ abbrechen. Also hat I ein Maximum.

4.1.5 Definition. Sei $\langle\tau, 0\rangle$ das Maximum von I. Setze: $N \stackrel{\text{def}}{=} M_{\langle\tau,0\rangle}$.
Definiere für $\nu < \pi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle\tau,0\rangle}(\alpha) = \tau$:

$$\begin{aligned} W_\nu &\stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle\tau,0\rangle}(\mathbf{U})(\nu), \\ \tilde{\kappa}_\nu &\stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle\tau,0\rangle}(K)(\nu), \\ \tilde{\theta} &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\nu<\tau} \tilde{\kappa}_\nu \quad \text{und} \\ g(\nu) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda_{\langle\nu,m\rangle} \mid m < \pi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle\nu,0\rangle}(l)(\nu)\}. \end{aligned}$$

□

4.1.6 Lemma. *Seien $i \in I$ und $x \in M_i$. Dann existieren $n \in \omega$, $i_0 < \ldots < i_{n-1} < i$ und $f \in M$ mit*

$$x = \pi_{\langle 0,0\rangle}^{i}(f)(\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_{n-1}}).$$

Beweis. Man nehme das Gegenteil an. Sei dann i minimal, so daß es ein $x \in M_i$ gibt, das nicht die obige Darstellung hat.

Fall 1: $i = \langle\beta, m+1\rangle$.
Dann

$$x = \pi_{\langle\beta,m\rangle}^{\langle\beta,m+1\rangle}(g)(\lambda_{\langle\beta,m\rangle})$$

für ein $g \in M_{\langle\beta,m\rangle}$; vgl. [Kanamori94, S.54, Proposition 5.13(a)]. Nach Minimalität von i existieren $l < \omega$ und $i_0 < \ldots < i_{l-1} < \langle\beta, m\rangle$ mit

$$g = \pi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle\beta,m\rangle}(h)(\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_{l-1}}).$$

für eine Funktion $h \in M$. Da $[h]_{\langle\beta,m\rangle}$ eine Funktion ist, kann $h \in M$ so gewählt werden, daß

$$\forall z \in \operatorname{ran}(h) \quad z \quad \text{ist eine Funktion.}$$

Somit kann f in M definiert werden durch:

$$f(\xi_0,\ldots,\xi_l) \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi_0,\ldots,\xi_{l-1})(\xi_l).$$

Dann ist $f \in M$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\pi^{\langle\beta,m+1\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(f)(\lambda_{i_0},\ldots\lambda_{i_{l-1}},\lambda_{\langle\beta,m\rangle}) &= \pi^{\langle\beta,m+1\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(h)(\lambda_{i_0},\ldots\lambda_{i_{l-1}})(\lambda_{\langle\beta,m\rangle}) \\
&= \pi^{\langle\beta,m+1\rangle}_{\langle\beta,m\rangle}(\pi^{\langle\beta,m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(h))(\lambda_{i_0},\ldots\lambda_{i_{l-1}})(\lambda_{\langle\beta,m\rangle}) \\
&= \pi^{\langle\beta,m+1\rangle}_{\langle\beta,m\rangle}(\pi^{\langle\beta,m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(h)(\lambda_{i_0},\ldots\lambda_{i_{l-1}}))(\lambda_{\langle\beta,m\rangle}) \\
&= \pi^{\langle\beta,m+1\rangle}_{\langle\beta,m\rangle}(g)(\lambda_{\langle\beta,m\rangle}) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Also waren x und i kein Gegenbeispiel.

Fall 2: $i = \langle\beta,0\rangle$.
Da das Lemma für $M_{\langle 0,0\rangle}$ trivial ist, ist $\beta > 0$. Nach der Definition des gerichteten Limes ist

$$x = \pi^i_j(\bar{x})$$

für ein $j < i$ und ein $\bar{x} \in M_j$. Nach Minimalität von i existieren $n < \omega,\ i_0 < \ldots < i_{n-1} < j$ und $f \in M$ mit

$$\bar{x} = \pi^j_{\langle 0,0\rangle}(f)(\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_{n-1}}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\pi^i_{\langle 0,0\rangle}(f)(\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_{n-1}}) &= \pi^i_j(\pi^j_{\langle 0,0\rangle}(f))(\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_{n-1}}) \\
&= \pi^i_j(\pi^j_{\langle 0,0\rangle}(f)(\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_{n-1}})) \\
&= \pi^i_j(\bar{x}) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Also waren auch in diesem Fall i und x kein Gegenbeispiel. Es gibt keine anderen Fälle, also war die Widerspruchsannahme falsch. □

4.1.7 LEMMA. *Sei $\lambda_{\langle 0,0\rangle} < \beta < \lambda_j$. Dann existieren $n < \omega$ und $i_0 < \ldots < i_{n-1} \in I$ mit $\lambda_{i_{n-1}} \leq \beta$, so daß*

$$\beta = \pi^j_{0,0}(f)(\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_{n-1}})$$

für ein $f \in M$.

Beweis. Sei $l \in I$ minimal, so daß $\beta < \lambda_l$. Dann ist $l \leq j$. Da $\beta \in M_l$, existieren nach Lemma 4.1.6 $n < \omega,\ i_0 < \ldots, i_{n-1} < l \in I$ und $f \in M$ mit

$$\beta = \pi^l_{\langle 0,0\rangle}(f)(\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_{n-1}}).$$

Es gilt: $\mathrm{crit}(\pi_l^j) \geq \lambda_l > \max(\{\lambda_{i_{n-1}}, \beta\})$. Also

$$\begin{aligned}
\pi^j_{\langle 0,0\rangle}(f)(\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_{n-1}}) &= \pi_l^j(\pi^l_{\langle 0,0\rangle}(f))(\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_{n-1}}) \\
&= \pi_l^j(\pi^l_{\langle 0,0\rangle}(f)(\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_{n-1}})) \\
&= \pi_l^j(\beta) \\
&= \beta.
\end{aligned}$$

Nach Wahl von l ist $\lambda_{i_{n-1}} \leq \beta$. □

Setze:

$$U_{\langle\beta,m\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{\langle\beta,m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\beta).$$

4.1.8 Lemma. *Sei $X \in M_{\langle\beta,m\rangle}$ und $X \subseteq \lambda_{\langle\beta,m\rangle}$. Dann gilt:*

$$X \in U_{\langle\beta,m\rangle} \longleftrightarrow \lambda_{\langle\beta,m\rangle} \in \pi^{\langle\beta,m+1\rangle}_{\langle\beta,m\rangle}(X),$$

falls $\langle\beta, m+1\rangle \in I$.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\langle\beta,m\rangle} \in \pi^{\langle\beta,m+1\rangle}_{\langle\beta,m\rangle}(X) &\longleftrightarrow M_{\langle\beta,m+1\rangle} \models [\mathrm{id}] \in [\mathrm{const}_X] \\
&\longleftrightarrow \{\nu < \lambda_{\langle\beta,m\rangle} \mid \mathrm{id}(\nu) \in \mathrm{const}_X(\nu)\} \in U_{\langle\beta,m\rangle} \\
&\longleftrightarrow X \in U_{\langle\beta,m\rangle}.
\end{aligned}$$

□

Nun kann bereits das Analogon des Charakterisierungssatzes für iterierte Ultraprodukte bewiesen werden.

4.1.9 Satz. *Sei $X \in M_{\langle\tau,0\rangle} \cap \prod_{\nu<\tau} W_\nu$. Dann folgt:*

$$\bigcup_{\nu<\tau} g(\nu) \setminus X(\nu) \quad \textit{ist endlich.}$$

Beweis. Man nehme das Gegenteil an. Sei dann $i = \langle\gamma, m\rangle \in I$ minimal, so daß es

$$X \in M_i \cap \prod_{\nu<\gamma} \pi^{\langle\gamma,m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\nu)$$

gibt mit der Eigenschaft, daß

$$\bigcup_{\nu<\gamma}(\{\lambda_{\langle\nu,n\rangle} \mid n < \pi^{\langle\gamma,m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\nu)\} \setminus X(\nu))$$

unendlich ist.

(1) $m = 0$.

Beweis von (1). Wieder sei das Gegenteil angenommen. Sei also $m > 0$. Dann ist $X \in M_{\langle\gamma,0\rangle}$, denn:

Sei $\eta = \sup_{\nu<\gamma} \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\nu) < \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\gamma) = \lambda_{\langle\gamma,0\rangle}$. Da

$$M_{\langle\gamma,0\rangle} \models \eta = \sup_{\nu<\gamma} \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\nu),$$

folgt

$$M_{\langle\gamma,m\rangle} \models \eta = \sup_{\nu<\gamma} \pi^{\langle\gamma,m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\nu),$$

Also $X \in {}^{\gamma}\mathcal{P}(\eta) \cap M_{\langle\gamma,m\rangle} \subseteq V_{\lambda_{\langle\gamma,0\rangle}} \cap M_{\langle\gamma,m\rangle} = V_{\lambda_{\langle\gamma,0\rangle}} \cap M_{\langle\gamma,0\rangle}$. Dies folgt aus Satz 1.3.4 über iterierte Ultraprodukte. Also war $\langle\gamma, m\rangle$ nicht minimal, da $X \in M_{\langle\gamma,0\rangle}$ offenbar auch schon ein Gegenbeispiel ist. $\square_{(1)}$

Also ist $i = \langle\gamma, 0\rangle$. Da $M_{\langle\gamma,0\rangle}$ als gerichteter Limes definiert ist, existieren $j = \langle\bar\gamma, \bar m\rangle < \langle\gamma, 0\rangle$ und $\bar X \in M_j$ mit

$$X = \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_j(\bar X).$$

Eine ähnliche Argumentation wie bei Punkt (1) zeigt:

(2) $\bar X(\nu) = X(\nu)$ für $\nu < \bar\gamma$.

Beweis von (2). Sei $\nu < \bar\gamma$. Dann

$$X(\nu) \in \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\nu),$$

also

$$X(\nu) \subseteq \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\nu) = \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}(\pi^{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K))(\nu) = \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}(\pi^{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\nu)),$$

da $\nu < \bar\gamma < \lambda_{\langle\bar\gamma,0\rangle}$.

$$\pi^{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\nu) < \pi^{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\bar\gamma) = \lambda_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle},$$

also

$$X(\nu) \subseteq \pi^{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\nu) < \lambda_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}.$$

Folglich ist

$$X(\nu) \in \mathcal{P}(\pi^{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(K)(\nu)) \cap M_{\langle\gamma,0\rangle} \subseteq V_{\lambda_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}} \cap M_{\langle\gamma,0\rangle} = V_{\lambda_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}} \cap M_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}.$$

Aber $\pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle} \restriction V_{\lambda_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}} \cap M_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle} = \mathrm{id} \restriction V_{\lambda_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}} \cap M_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}$,
also $\pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}(X(\nu)) = X(\nu) = \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}(\bar X(\nu))$, das heißt, $\bar X(\nu) = X(\nu)$, da $\pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}$ natürlich injektiv ist. $\square_{(2)}$

Setze: $\tilde X \stackrel{\text{def}}{=} X \restriction \bar\gamma = \bar X \restriction \bar\gamma$ nach (2).
Also $\tilde X \in M_{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}$. Genau wie in (1) zeigt man:

$$\tilde X(\nu) \in \pi^{\langle\bar\gamma,\bar m\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\nu)$$

für $\nu < \bar{\gamma}$. Nach Minimalität von $\langle\gamma, 0\rangle$ folgt also:

(3) $\bigcup_{\nu<\bar{\gamma}} g(\nu) \setminus X(\nu)$ ist endlich.

(4) $\lambda_{\langle\bar{\gamma},k\rangle} \in X(\bar{\gamma})$ für $k \geq m$ und $k < 1 + \pi^{\langle\bar{\gamma},0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\bar{\gamma})$.

Beweis von (4). Seien $Z = X(\bar{\gamma})$ und $\bar{Z} = \bar{X}(\bar{\gamma})$, also $Z = \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle}(\bar{Z})$. Dann

$$\begin{aligned} M_{\langle\gamma,0\rangle} \models Z \in \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\bar{\gamma}) &\longleftrightarrow M_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle} \models \bar{Z} \in \pi^{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\bar{\gamma}) \\ &\longleftrightarrow M_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}+1\rangle} \models \lambda_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle} \in \pi^{\langle\bar{\gamma},\bar{m}+1\rangle}_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle}(\bar{Z}) \\ &\longleftrightarrow M_{\langle\gamma,0\rangle} \models \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}+1\rangle}(\lambda_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle}) \in \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}+1\rangle}(\pi^{\langle\bar{\gamma},\bar{m}+1\rangle}_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle}(\bar{Z})) \\ &\longleftrightarrow M_{\langle\gamma,0\rangle} \models \lambda_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle} \in Z. \end{aligned}$$

Für $k > m$ verläuft die Argumentation analog. $\Box_{(4)}$

(5) $\bar{\gamma} < \nu < \gamma \longrightarrow g(\nu) \subseteq X(\nu)$.

Beweis von (5). Sei $\bar{\gamma} < \nu < \gamma$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} X(\nu) \in \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\nu) &\longleftrightarrow X(\nu) \in \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\nu,0\rangle}(\pi^{\langle\nu,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U}))(\nu) \\ &\longleftrightarrow \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\nu,0\rangle}(\pi^{\langle\nu,0\rangle}_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle}(\bar{X}))(\nu) \in \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\nu,0\rangle}(\pi^{\langle\nu,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U}))(\nu) \\ &\longleftrightarrow \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\nu,0\rangle}(\pi^{\langle\nu,0\rangle}_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle}(\bar{X})(\nu)) \in \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\nu,0\rangle}(\pi^{\langle\nu,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\nu)) \\ &\longleftrightarrow \pi^{\langle\nu,0\rangle}_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle}(\bar{X})(\nu) \in \pi^{\langle\nu,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\mathbf{U})(\nu) \\ &\longleftrightarrow \lambda_{\langle\nu,0\rangle} \in \pi^{\langle\nu,1\rangle}_{\langle\nu,0\rangle}(\pi^{\langle\nu,0\rangle}_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle}(\bar{X}(\nu)) = \pi^{\langle\nu,1\rangle}_{\langle\nu,0\rangle}(\pi^{\langle\nu,0\rangle}_{\langle\bar{\gamma},\bar{m}\rangle}(\bar{X}))(\nu) \\ &\longleftrightarrow \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle\nu,1\rangle}(\lambda_{\langle\nu,0\rangle}) \in \pi^{\langle\gamma,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\bar{X})(\nu) \\ &\longleftrightarrow \lambda_{\langle\nu,0\rangle} \in X(\nu). \end{aligned}$$

Wieder verläuft die Argumentation für $\lambda_{\langle\nu,m\rangle}$ mit $0 < m < 1 + \pi^{\langle\nu,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(l)(\nu)$ analog. $\Box_{(5)}$

Nach (3)-(5) ist offenbar $\bigcup_{\nu<\gamma} g(\nu) \setminus X(\nu)$ endlich, im Widerspruch zur Wahl von X. Also war die Widerspruchsannahme falsch, und der Satz ist gezeigt. $\Box$

4.1.10 SATZ. *g ist maximal mit der Eigenschaft aus Satz 4.1.9, das heißt, wenn h gegeben ist, das auch diese Eigenschaft hat, dann ist*

$$\bigcup_{\nu<\tau} h(\nu) \setminus g(\nu) \quad \textit{endlich.}$$

Beweis. Sei das Gegenteil angenommen und h ein Gegenbeispiel zum zu Beweisenden. Dann ist also

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\nu<\tau} h(\nu) \setminus g(\nu)$$

unendlich. Sei $\langle d_n \mid n < \omega\rangle$ die monotone Aufzählung der ersten ω Elemente von Δ. Sei $\nu : \omega \longrightarrow \tau$ definiert durch $d_n \in h(\nu(n))$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $d_n > \lambda_{\langle 0,0\rangle}$ für alle $n < \omega$: Es kann nur endlich viele $n < \omega$ geben mit $d_n < \lambda_{\langle 0,0\rangle}$, denn die Funktion

$$X(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \tilde{\kappa}_0 \setminus (\lambda_{\langle 0,0\rangle} + 1) & \text{wenn} \quad \nu = 0 \\ \tilde{\kappa}_\nu & \text{wenn} \quad 0 < \nu < \tau \end{cases}$$

liegt in N, also ist

$$\bigcup_{\nu<\tau} h(\nu) \setminus X(\nu) = h(0) \cap \lambda_{\langle 0,0\rangle}$$

endlich. Also muß h nur an endlich vielen Stellen abgeändert werden, um ein Gegenbeispiel in N zu finden, das die zusätzliche Eigenschaft hat.

Nach Lemma 4.1.7 existieren für $n < \omega$ eine Funktion $f_n \in M$ und eine Folge $c_n \in {}^{<\omega}\bigcup \mathrm{ran}(g)$ mit $\max(c_n) < d_n$, so daß

$$d_n = \pi^{\langle \tau,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(f_n)(c_n),$$

da $d_i \notin \bigcup \mathrm{ran}(g)$.

Also ist $d_n \in Z_n$, wo

$$Z_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu < \tilde{\theta} \mid \exists c \in {}^{<\omega}\mu \quad \mu = \pi^{\langle \tau,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(f_n)(c)\}.$$

Es ist $\tilde{\kappa}_\xi \cap Z_n \notin W_\xi$ für $\xi < \tau$ beliebig, denn es gibt nach dem in N gültigen Auswahlaxiom eine auf Z_n definierte, regressive Funktion f mit

$$\mu = \pi^{\langle \tau,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(f_n)(f(\mu))$$

für alle $\mu \in Z_n$. Aber nach Teil (b) von Satz 1.1.6 existierte, wenn $\tilde{\kappa}_\xi \cap Z_n \in W_\xi$ wäre, eine Menge $B \subseteq \tilde{\kappa}_\xi \cap Z_n$ mit $B \in W_\xi$, so daß $f``B = \{a\}$ für ein $a \in {}^{<\omega}\tilde{\kappa}_\xi$. Das kann natürlich nicht sein, denn dann wäre

$$\forall \mu \in B \quad \mu = \pi^{\langle \tau,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(f_n)(a),$$

also $|B| = 1$ im Widerspruch zur Normalität von W_ξ.

Da M abgeschlossen ist unter $\omega-$Folgen, ist $\langle f_n \mid n < \omega\rangle \in M$, also auch $\langle \bar{Z}_n \mid n < \omega\rangle$, wo

$$\bar{Z}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu < \theta \mid \exists c \in {}^{<\omega}\mu \quad \mu = f_n(c)\}.$$

Offensichtlich ist

$$\langle Z_n \mid n < \omega\rangle = \pi^{\langle \tau,0\rangle}_{\langle 0,0\rangle}(\langle \bar{Z}_n \mid n < \omega\rangle),$$

also $\langle Z_n \mid n < \omega\rangle \in N$. Definiere in N für $\mu < \tau$:

$$X(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\kappa}_\mu \setminus (\bigcup_{n<\omega} Z_n) = \bigcap_{n<\omega} (\tilde{\kappa}_\mu \setminus Z_n).$$

Nach $\tilde{\kappa}_\mu-$Abgeschlossenheit von W_μ in N ist $X(\mu) \in W_\mu$. Aber

$$\{d_n \mid n < \omega\} \subseteq \bigcup_{\mu<\tau} h(\mu) \setminus X(\mu),$$

also erfüllt h nicht die Charakterisierungseigenschaft aus Satz 4.1.9, im Widerspruch zur Wahl von h. □

4.2 Nocheinmal das Maximalitätsprinzip für $I\!\!P$

Der Zugang zu Prikry-Sequenzen via iterierte Ultraprodukte liefert einen alternativen Beweis des Maximalitätsprinzips 2.3.2, der aufgrund seiner Eleganz angegeben wird, obwohl die Aussage nichts Neues bringt. Der neue Beweis macht allerdings Gebrauch von dem Charakterisierungssatz 2.3.1 für $I\!\!P-$Generizität, was bei dem alten nicht der Fall war. Also kommt man auch durch die Verwendung von iterierten Ultraprodukten nicht daran vorbei, sich eingehend mit dem Forcing $I\!\!P$ zu beschäftigen, wenn man das Maximalitätsprinzip beweisen will.

Die bisherigen Bezeichnungen aus diesem Kapitel werden beibehalten, und $I\!\!P$ wird verstanden als $I\!\!P(D, \mathbf{U}, \langle \eta_i \mid i < \alpha \rangle)$.

4.2.1 Satz (Maximalitätsprinzip). *Seien g und h $I\!\!P-$generische Sequenzen über M, und $h \in M[g]$. Dann ist $\bigcup_{i<\alpha}(h(i) \setminus g(i))$ endlich.*

Beweis. Es wird ein Widerspruchsbeweis geführt. Sei $p \in I\!\!P$ derart, daß

$$p \Vdash \dot{g} \text{ ist nicht maximal,}$$

wo $\dot{g}$ der kanonische Name für die Prikry-Sequenz ist. Sei $N = M_{\langle \tau, 0 \rangle}$ das durch die Iteration aus 4.1 entstandene Modell und

$$\pi : M \longrightarrow N$$

die zugehörige elementare Einbettung. Sei g wie vorhin definiert aus der Folge der kritischen Punkte der Iterationseinbettungen. Da g nach Satz 4.1.9 die $I\!\!P-$generische Sequenzen charakterisierende Eigenschaft hat, ist g nach dem Charakterisierungssatz 2.3.1 $\pi(I\!\!P) = I\!\!P(\pi(D), \pi(\mathbf{U}), \pi(l))-$generisch über N.

Sei $p = \langle h, H \rangle$, also $\pi(p) = \langle \pi(h), \pi(H) \rangle$. Da g $\pi(I\!\!P)-$generisch ist, ist

$$u = \{\nu < \pi(\alpha) \mid g(\nu) \not\subseteq \pi(H)(\nu)\} \text{ endlich.}$$

Im folgenden wird eine $\pi(I\!\!P)-$generische Sequenz g' definiert, so daß $\pi(p)$ ein Element des mit g' assoziierten, $\pi(I\!\!P)-$generischen Filters ist, indem g nur an endlich vielen Stellen abgeändert wird, in dem Sinne, daß die symmetrische Differenz $(\bigcup \operatorname{ran}(g)) \triangle (\bigcup \operatorname{ran}(g'))$ endlich ist. Das wird zur Folge haben, daß $N[g] = N[g']$, da g bzw. g' aus $\bigcup \operatorname{ran}(g)$ bzw. $\bigcup \operatorname{ran}(g')$ definierbar sind. Doch nun zur Definition von g' :

Wenn $\nu \in \pi(\alpha) \setminus u$, so setze

$$g'(\nu) = g(\nu).$$

Ansonsten ist $\nu \in u$. Seien $a = g(\nu) \setminus \pi(H)(\nu)$, $\beta = \operatorname{lub}(\underline{\pi(h)}(\nu)) \cup ((\sup_{\mu<\nu} \tilde{\kappa}_\mu) + 1)$ und $n = |\underline{\pi(h)}(\nu)|$.

Wenn $k \overset{\text{def}}{=} \pi(l)(\nu) < \omega$ ist, dann sei $b \in [\pi(H)(\nu) \setminus \beta]^{(k-n)}$ und $g'(\nu) = \underline{\pi(h)}(\nu) \cup b$.

Wenn $k = \omega$ ist, so setze

$$g'(\nu) = \underline{\pi(h)}(\nu) \cup (g(\nu) \setminus (a \cup \beta)).$$

Da $g(\nu)$ unbeschränkt in $\tilde{\kappa}_\nu$ und a endlich ist, ist $\mathrm{otp}(g'(\nu)) = \omega$.

Offenbar ist $g(\nu) \triangle g'(\nu)$ endlich für $\nu \in u$ und leer für $\nu \in \pi(\alpha) \setminus u$, also ist nach Endlichkeit von u auch $(\bigcup \mathrm{ran}(g)) \triangle (\bigcup \mathrm{ran}(g'))$ endlich.

Daß g' über N $\pi(\mathbb{P})-$generisch ist, folgt wieder aus dem Charakterisierungssatz für $\mathbb{P}-$Generizität, da g' im obigen Sinne fast überall mit g übereinstimmt.

Sei $\mathfrak{G}'$ der mit g' assoziierte, $\pi(\mathbb{P})-$generische Filter über N. Daß $p \in \mathfrak{G}'$ ist, wie gewünscht, folgt direkt aus der Definition von g'; zur Erinnerung:

$$\mathfrak{G}' = \{\langle t, T\rangle \in \pi(\mathbb{P}) \mid \forall \nu < \pi(\alpha) \quad \underline{t}(\nu) \subseteq g'(\nu) \ \wedge \ g'(\nu) \setminus \underline{t}(\nu) \subseteq T(\nu)\}.$$

Folglich existiert in $N[g']$ eine Prikry-Sequenz f mit der Eigenschaft, daß

$$\bigcup_{\nu < \pi(\alpha)} f(\nu) \setminus g'(\nu) \quad \text{unendlich ist,}$$

da p dies erzwingt. Aber dann ist $f \in N[g]$ und

$$\bigcup_{\nu < \pi(\alpha)} f(\nu) \setminus g(\nu) \quad \text{ist unendlich,}$$

im Widerspruch zu Satz 4.1.10; der Beweis ist komplett. $\square$

Literaturverzeichnis

[Devlin84] Keith Devlin, *Constructibility.* Springer-Verlag, 1984.

[Dodd/Jensen1] Dodd/Jensen, *The core model.* Annals of Mathematical Logic **20** (1979), S. 43-75.

[Dodd/Jensen2] Dodd/Jensen, *The covering lemma for K.* Annals of Mathematical Logic **22** (1982), S. 1-30.

[Dodd/Jensen3] Dodd/Jensen, *The covering lemma for L[U].* Annals of Mathematical Logic **22** (1982), S. 127-135.

[Jech78] Thomas Jech, *Set Theory.* New York, Academic Press 1978.

[Kanamori94] Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite.* Springer-Verlag, 1994.

[Kunen80] Kenneth Kunen, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Amsterdam, North Holland 1980.

[Magidor76] Menachem Magidor, *How large is the first strongly compact cardinal? OR: A study on identity crises.* Annals of Mathematical Logic **10** (1976), S. 33-57.

[Magidor78] Menachem Magidor, *Changing Cofinality of Cardinals.* Fundamenta Mathematicae **99** (1978), S. 61-71

[Mathias73] Adrian R. D. Mathias, *On sequences generic in the sense of Prikry.* Journal of the Australian Mathematical Society **15** (1973), S. 409-414.

[Mitchell84] William J. Mitchell, *The core model for sequences of measures, I.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **95** (1984), S. 229-260.

[Mitchell84/2] William J. Mitchell, *Indiscernibles, Skies, and Ideals.* Contemporary Mathematics **31** (1984), S. 161-182