

1. Erinnerung:

Satz 1 : (Eindeutigkeit der stationären Verteilung und Konvergenz in Gleichgewicht)

Sei $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine irreduzible und aperiodische Markovkette mit Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $(k \times k)$ -Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ und Gleichgewichtsverteilung $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)^T$. Dann gilt:

1. die Markovkette besitzt eine eindeutig bestimmte stationäre Verteilung $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)^T$.
2. $p_{ij}^{(k)} \rightarrow \pi_j$ für $k \rightarrow \infty \forall i, j \in S$.

Das heißt, die k -te Potenz der Übergangsmatrix $P^k = (p_{ij}^{(k)})_{i,j \in S}$ konvergiert komponentenweise gegen die $(k \times k)$ -Matrix $\begin{pmatrix} \pi^T \\ \vdots \\ \pi^T \end{pmatrix}$ für $k \rightarrow \infty$.

2. Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit mittels Eigenwerten

Definition 2: (primitive Matrix)

Eine stochastische Matrix P heißt primitiv, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $P^k > 0$ ist.

Theorem 3: (Perron-Frobenius Theorem)

Sei P eine nicht-negative, primitive $(k \times k)$ -Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ so, dass $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_k|$. Dann gilt:

1. Der Eigenwert λ_1 ist reellwertig und positiv,
2. $\lambda_1 > |\lambda_i| \quad \forall i = 2, \dots, k$,
3. der zu λ_1 gehörende rechte Eigenvektor $v_1 = (v_{11}, \dots, v_{1k})^T$ und linke Eigenvektor $u_1 = (u_{11}, \dots, u_{1k})^T$ kann so gewählt werden, dass alle Einträge positiv sind und $u_1^T v_1 = 1$ ist.

Korollar 4:

Sei $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine irreduzible und aperiodische Markovkette mit endlichem Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $(k \times k)$ -Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ und Gleichgewichtsverteilung $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)^T$. P habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_k|$, v_i und u_i seien der rechte bzw. linke k -dimensionale Eigenvektor zum Eigenwert λ_i . Dann gilt:

- $\lambda_1 = 1, v_1 = (1, \dots, 1)^T$ und $u_1 = \pi$.
- $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i = 2, \dots, k$.

Satz 5: (Konvergenzabschätzung)

Sei $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine irreduzible, aperiodische Markovkette mit endlichem Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $(k \times k)$ -Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ und Gleichgewichtsverteilung $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)^T$. Man nehme an, alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von P seien voneinander verschieden und $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_k|$, dann gilt:

$$|p_{ij}^{(k)} - \pi_j| = \mathcal{O}(|\lambda_2|^k) \text{ für alle } i, j \in S, k \in \mathbb{N}.$$

Spektraldarstellung einer Matrix:

Sei P eine Matrix mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und v_i und u_i seien der rechte bzw. linke k -dimensionale Eigenvektor zum Eigenwert λ_i , die linear unabhängig sind. Dann kann P in Spektraldarstellung dargestellt werden:

$$P^k = \sum_{i=1}^k \lambda_i^k v_i u_i^T.$$

3. Konvergenzrate von Gibbs Sampler für zufällige q-Färbung**Beispiel: Gibbs-Sampler für zufällige q-Färbung (random q-coloring)**

- Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$, wobei V die Menge der Knoten und E die Menge der Kanten darstellen. $S = \{1, \dots, q\}$ sei eine Menge mit q Farben.
- Jedem Knoten aus V wird eine Farbe aus S zugeordnet.
- Eine zulässige q -Färbung ist eine Belegung $f: V \rightarrow S$ so, dass $f(u) \neq f(v)$ für jedes $(u, v) \in E$, das heißt, dass zwei benachbarte Knoten nicht die gleiche Farbe haben dürfen.
- Diese Zuordnung heißt zulässige Konfiguration und kann als Element der Menge S^V betrachtet werden.
- Wir ziehen jede zulässige Konfiguration mit gleicher Wahrscheinlichkeit zufällig und schreiben $\rho_{G,q}$ für das resultierend Wahrscheinlichkeitsmaß auf S^V . Das bedeutet, für jedes $\xi \in S^V$ haben wir:

$$\rho_{G,q}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{Z_G}, & \text{wenn } \xi \text{ zulässig ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei Z_G die Anzahl der zulässigen Konfigurationen für G ist.

Der systematische Gibbs-Sampler (systematic sweep Gibbs Sampler):

- Statt den Knoten zufällig nach der Gleichverteilung zu wählen, kann man ihn auch systematisch in einer festgelegten Reihenfolge wählen.
- Falls $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ ist, dann können wir die Knoten aktualisieren wie folgt:

$$\begin{cases} v_1, \text{ zur Zeit } 1, k+1, 2k+1, \dots \\ v_2, \text{ zur Zeit } 2, k+2, 2k+2, \dots \\ \vdots \\ v_i, \text{ zur Zeit } i, k+i, 2k+i, \dots \\ \vdots \\ v_k, \text{ zur Zeit } k, 2k, 3k, \dots \end{cases}$$

- Dieser Algorithmus wird der systematische Gibbs-Sampler genannt. Diese Modifikation ergibt eine zeitlich inhomogene Markovkette, welche aperiodisch und irreduzibel ist und die selbe stationäre Verteilung besitzt wie der gewöhnliche Gibbs-Sampler.

Definition 6: (Totalvariationsabstand)

Seien $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Menge $S = \{s_1, \dots, s_k\}$. Der Totalvariationsabstand zwischen α und β ist:

$$d_{TV}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\alpha_i - \beta_i|.$$

Satz 7: (Konvergenz von Gibbs Sampler für zufällige q-Färbung)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n = |V|$ Knoten, so dass jeder Knoten höchstens d Nachbarn hat. Sei $\varepsilon > 0$ und $q > 2d^2$ (q aus dem obigen Beispiel) gegeben. Dann ist die Anzahl der Iterationen, die der systematische Gibbs Sampler benötigt, um innerhalb der ε -Umgebung von π in Totalvariation zu sein (d.h. $d_{TV}(\mu^{(k)}, \pi) < \varepsilon$, wobei $\mu^{(k)}$ die Verteilung der Markovkette zum Zeitpunkt k ist), höchstens

$$n \left(\frac{\log n + \log(\varepsilon^{-1}) - \log d}{\log\left(\frac{q}{2d^2}\right)} + 1 \right).$$

