



# Das Adjungiertenverfahren in der aerodynamischen Formoptimierung

Vorstellungsvortrag für die Junior Professur  
'Effiziente Optimierung in der Aerodynamik'  
an der HU Berlin

*Nicolas Gauger*

Deutsches Zentrum für Luft- u. Raumfahrt e.V. (DLR)  
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik  
Abteilung Numerische Verfahren  
Braunschweig

- **Motivation für das Adjungiertenverfahren**
- **Beispiele adjungierter Operatoren**
- **Adjungierten Euler-Gleichungen**
- **Strömungslöser FLOWer MAIN / ADJOINT**
- **Konstruktion adjungierter Randoperatoren nach Giles**
- **Validierung des Adjungiertenverfahrens**
- **Optimierungsbeispiele (Profil, Überschallverkehrsflugzeug)**
- **One Shot Verfahren**
- **Gekoppeltes Aero-Struktur Adjungiertenverfahren**
- **Ausblick**

## Kompressiblen 2D Euler-Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

wobei

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{pmatrix}$$

## Euler-Schlupfbedingung

$$n_x u + n_y v = 0$$

## Druck (ideales Gas)

$$p = (\gamma - 1)\rho \left( E - \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right)$$

## Dimensionsloser Druckbeiwert

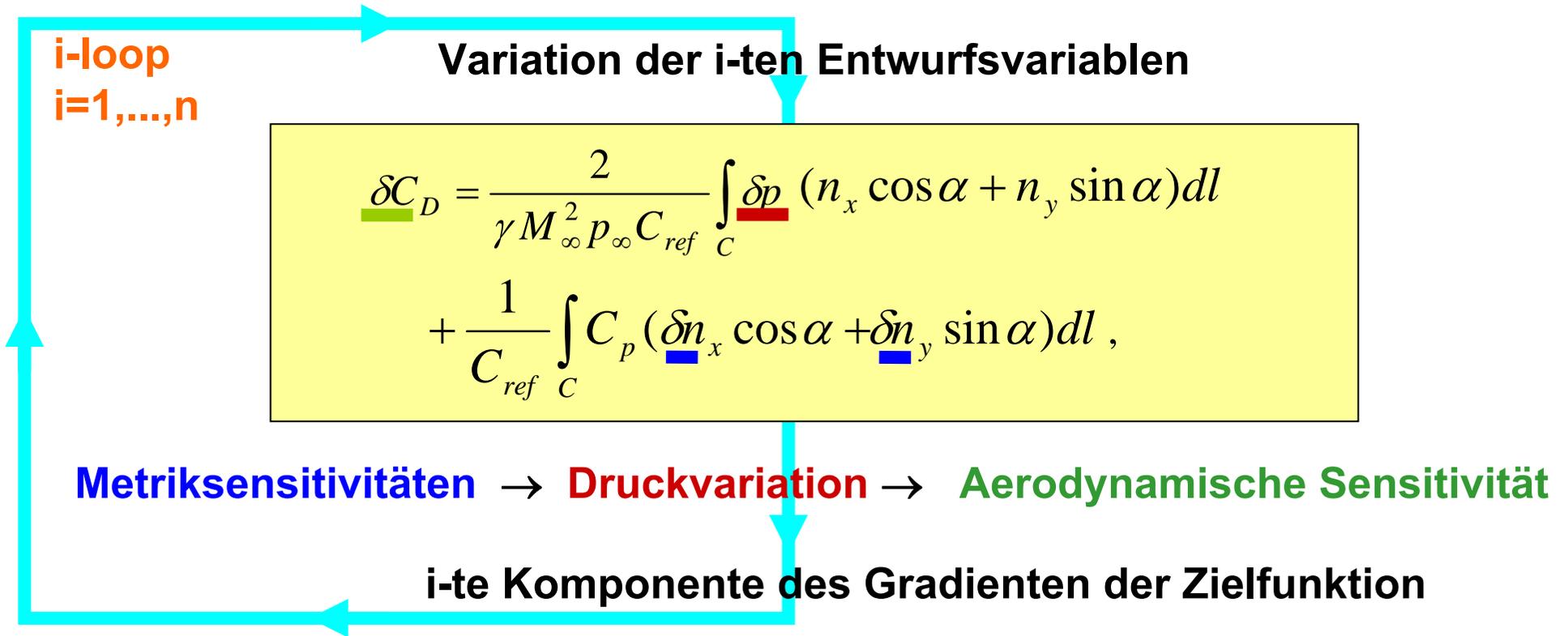
$$C_p = \frac{2(p - p_\infty)}{\gamma M_\infty^2 p_\infty}$$

## Beiwerte für Widerstand, Auftrieb und Nickmoment

$$C_D = \frac{1}{C_{ref}} \int_C C_p (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) dl$$

$$C_L = \frac{1}{C_{ref}} \int_C C_p (n_y \cos \alpha - n_x \sin \alpha) dl$$

$$C_m = \frac{1}{C_{ref}^2} \int_C C_p (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m)) dl$$



• Finite Differenzen



n Entwurfsvariablen erfordern  
n+1 Strömungsberechnung

## Große Anzahl an Entwurfsvariablen

- **Finite Differenzen**  **n Entwurfsvariablen erfordern n+1 Strömungsberechnung**
  - **Adjungiertenverfahren**  **n Entwurfsvariablen erfordern 1 Strömungs- und 1 adjungierte Strömungsberechnung**
- Unabhängigkeit von der Anzahl der Entwurfsvariablen**
- Hohe Genauigkeit**

# Adjungierter Operator

Es sei

$$(h, \varphi) := \int_{\Omega} h^T \varphi d\Omega \quad (1)$$

das Skalarprodukt in  $L^2(\Omega)$  und  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Lösung der PDE

$$L\varphi = b \quad (2)$$

im Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , die auf  $\partial\Omega$  homogene Randbedingungen erfüllt.

Der zu  $L^*$  duale oder adjungierte Operator  $L$  ist dann wie folgt definiert:

$$L^* : (\psi, L\varphi) = (L^*\psi, \varphi) \quad \forall \varphi, \psi. \quad (3)$$

Erfüllt nun der Vektor der adjungierten Variablen  $\psi$  die duale oder adjungierte PDE

$$L^*\psi = h \quad (4)$$

im Gebiet  $\Omega$  und auf  $\partial\Omega$  ebenfalls homogene Randbedingungen, so gilt:

$$(h, \varphi) = (L^*\psi, \varphi) = (\psi, L\varphi) = (\psi, b). \quad (5)$$

**Konvektions-Diffusionsgleichung:**

$$L\varphi \equiv \frac{d\varphi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\varphi}{dx^2} = b, \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

mit homogenen Randbedingungen  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ .

Unter Verwendung der partiellen Integration für  $\varphi, \psi \in C^2$  folgt:

$$(\psi, L\varphi) = \int_0^1 \psi \left( \frac{d\varphi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) dx \quad (7)$$

$$= \int_0^1 \left( -\frac{d\psi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) \varphi dx + \left[ \psi\varphi - \epsilon\psi \frac{d\varphi}{dx} + \epsilon\varphi \frac{d\psi}{dx} \right]_0^1 \quad (8)$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left( -\frac{d\psi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\psi}{dx^2} \right)}_{=: L^*\psi} \varphi dx + \left[ -\epsilon\psi \frac{d\varphi}{dx} \right]_0^1. \quad (9)$$

# Beispiele

Für die adjungierte Konvektions-Diffusionsgleichung:

$$L^*\psi \equiv -\frac{d\psi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\psi}{dx^2} = h, \quad (10)$$

mit homogenen Randbedingungen  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ , verschwindet der Randterm in (9) und es gilt wieder:

$$(h, \varphi) = (L^*\psi, \varphi) = (\psi, L\varphi) = (\psi, b).$$

Weitere Beispiele:

	Operator	Adjoint
<b>Convection-Diffusion Eq.</b>	$\frac{d\varphi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\varphi}{dx^2}$	$-\frac{d\psi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\psi}{dx^2}$
<b>Wave Eq.</b>	$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d^2\varphi}{dx^2}$	$-\frac{d\psi}{dt} - \frac{d^2\psi}{dx^2}$
<b>Convection Eq.</b>	$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dx}$	$-\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\psi}{dx}$

Adjungierten  
Euler-Gleichungen:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right)^T \frac{\partial \psi}{\partial x} - \left( \frac{\partial g}{\partial w} \right)^T \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$\psi$ : Vektor der adjungierten Variablen

Randbedingungen:

Wall:  $n_x \psi_2 + n_y \psi_3 = \underline{-d(I)}$

Farfield:  $\delta x_\xi, \dots, \delta y_\eta = 0, \delta w = 0$

Adjungierte Formulierung des Gradienten der Zielfunktion:

$$\delta I = - \int_C p (-\psi_2 \delta y_\xi + \psi_3 \delta x_\xi) dl + \underline{K(I)}$$

$$- \int_D \psi_\xi^T (\delta y_\eta f - \delta x_\eta g) + \psi_\eta^T (-\delta y_\xi f + \delta x_\xi g) dA$$

(Jameson, 1994)

# Kontinuierliches Adjungiertenverfahren

$$d(C_D) = \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{ref}} (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha)$$

**Widerstand**

$$K(C_D) = \frac{1}{C_{ref}} \int_C C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dl$$

$$d(C_L) = \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{ref}} (n_y \cos \alpha - n_x \sin \alpha)$$

**Auftrieb**

$$K(C_L) = \frac{1}{C_{ref}} \int_C C_p (\delta n_y \cos \alpha - \delta n_x \sin \alpha) dl$$

$$d(C_m) = \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{ref}^2} (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m))$$

**Nickmoment**

$$K(C_m) = \frac{1}{C_{ref}^2} \int_C C_p \delta (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m)) dl$$

## Physikalische Modellierung

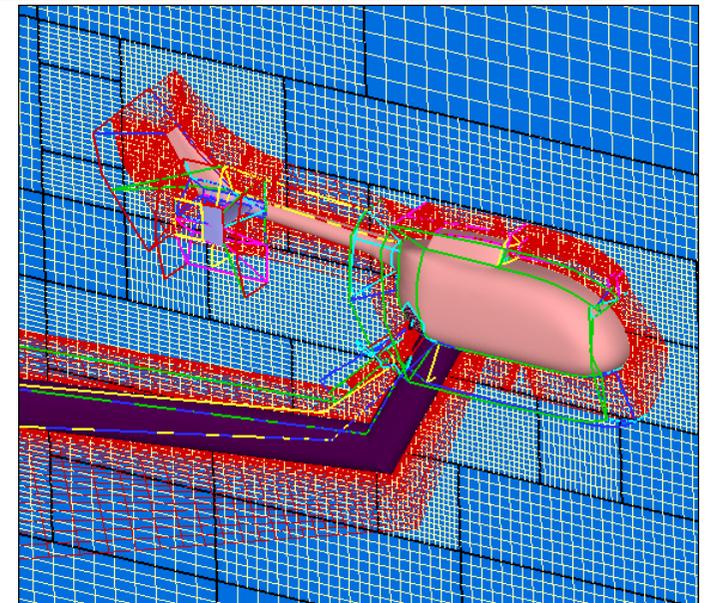
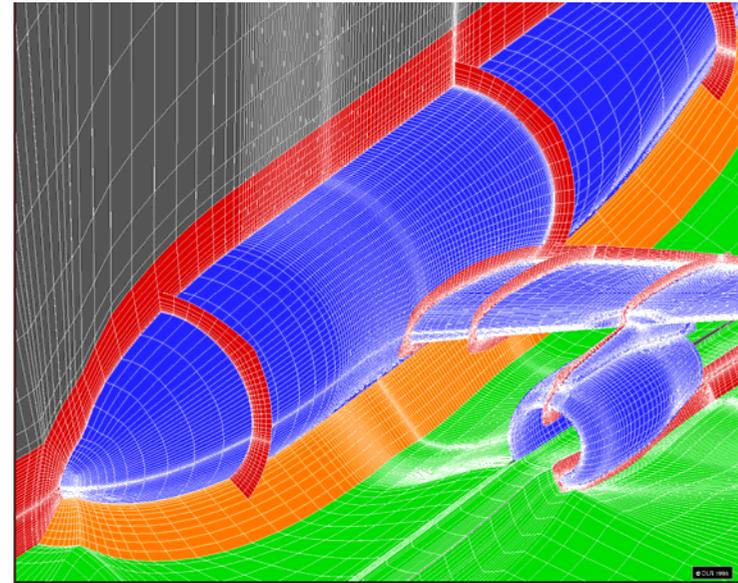
- 3D kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen
- Stationäre und instationäre Strömungen
- Bewegte Körper
- Diverse Turbulenzmodelle (RSM)

## Rechennetze

- Block-strukturierte Netze
- Diskontinuierliche Blockgrenzen
- Überlappende Netze (Chimera)
- Netzdeformation

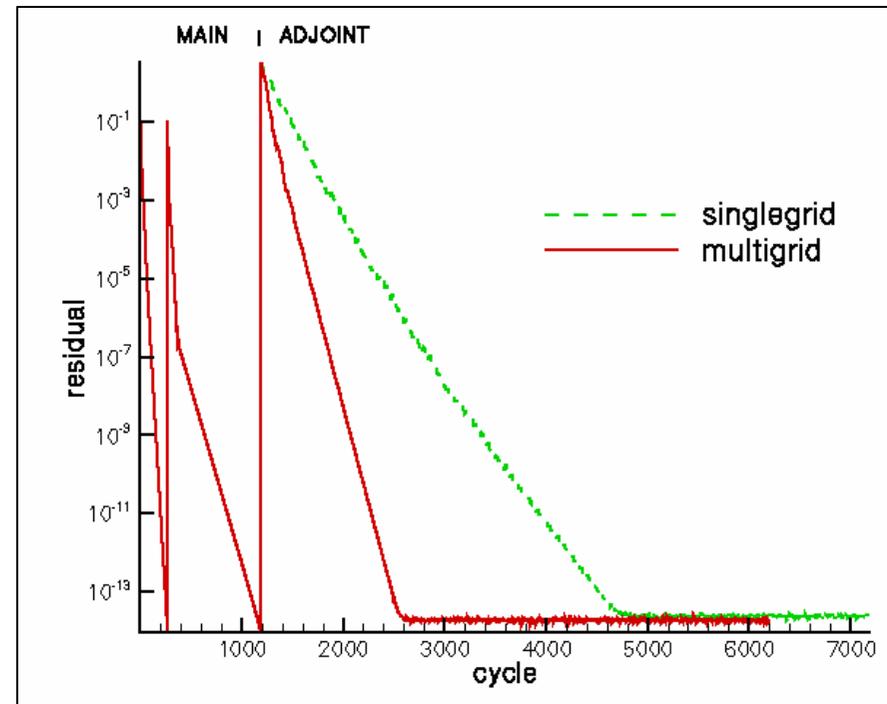
## Numerische Algorithmen

- Finite Volumen Diskretisierung 2. Ordnung (cell centered & cell vertex)
- Zentrale und Upwind Verfahren
- Multigrid
- Implizite Behandlung der Turbulenzgleichungen
- Implizites Schema für zeitgenaue Strömungen
- Preconditioning für Low Speed Strömungen
- Vektorisierung & Parallelisierung
- **Adjungiertenlöser**



## Adjungiertenlöser FLOWer ADJOINT

- „Optimize then discretize“  
→ kontinuierliches Adjungiertenverfahren
- Implementiert in FLOWer  
→ Option ADJOINT
- Modifizierte Fluss- und Randbehandlung
- Zielgrößen: Widerstand, Auftrieb, Nickmoment & Kombinationen
- Euler & Navier-Stokes (frozen  $\mu$ )
- Multigrid für Adjungiertenlöser
- Derzeit in Entwicklung:
  - AD tool für Turbulenzgleichungen (*FastOpt*)
  - Adjungiertenbasierte Netzadaption



convergence history, FLOWer

# Validierung des Adjungiertenverfahrens

## Finite Differenzen vs. Adjungiertenverfahren

Finite Differenzen:

51 calls of FLOWer MAIN

Adjungiertenverfahren:

1 call of FLOWer MAIN

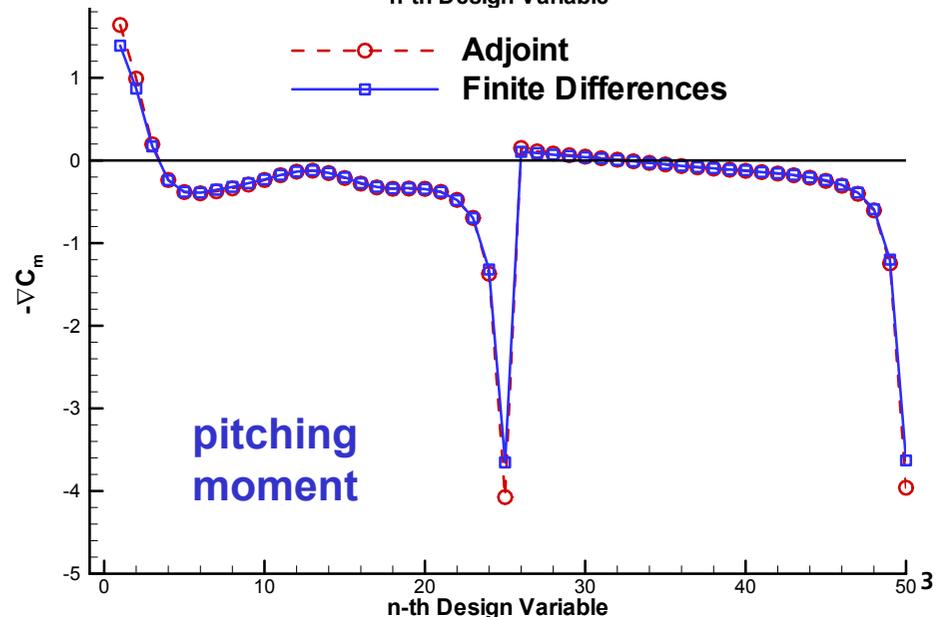
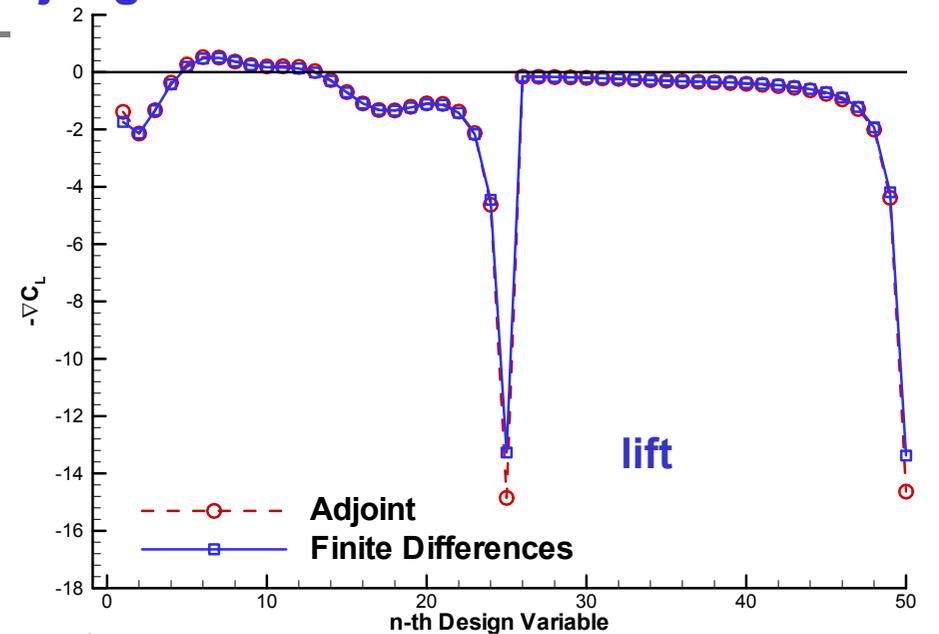
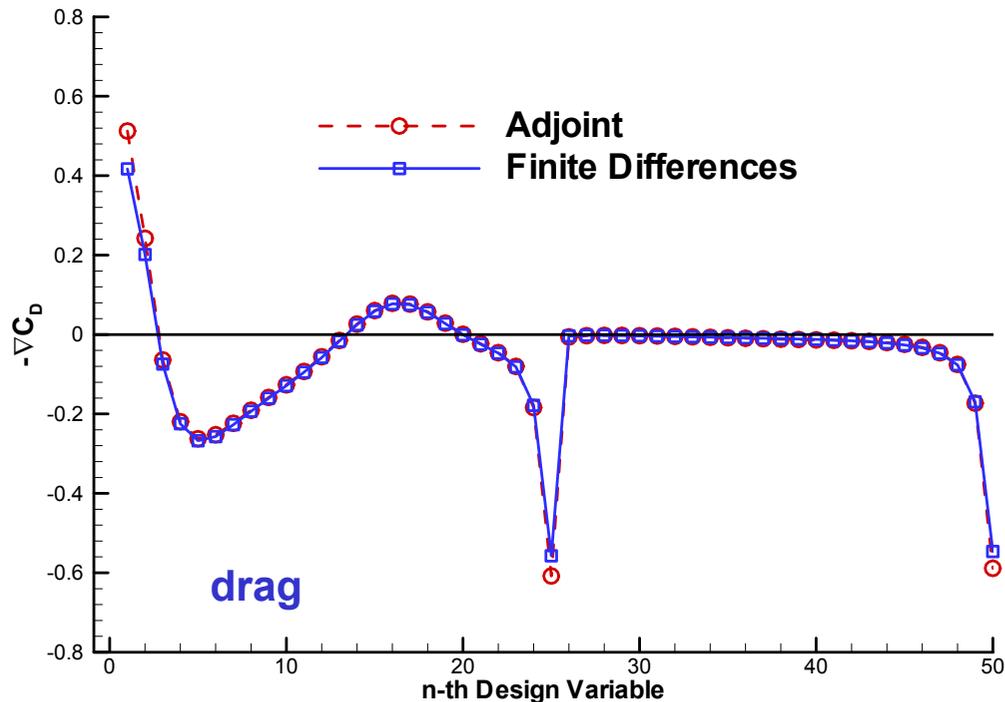
3 calls of FLOWer ADJOINT

RAE2822

$M_\infty=0.73, \alpha = 2.0^\circ$

50 design variables

(B-Spline)

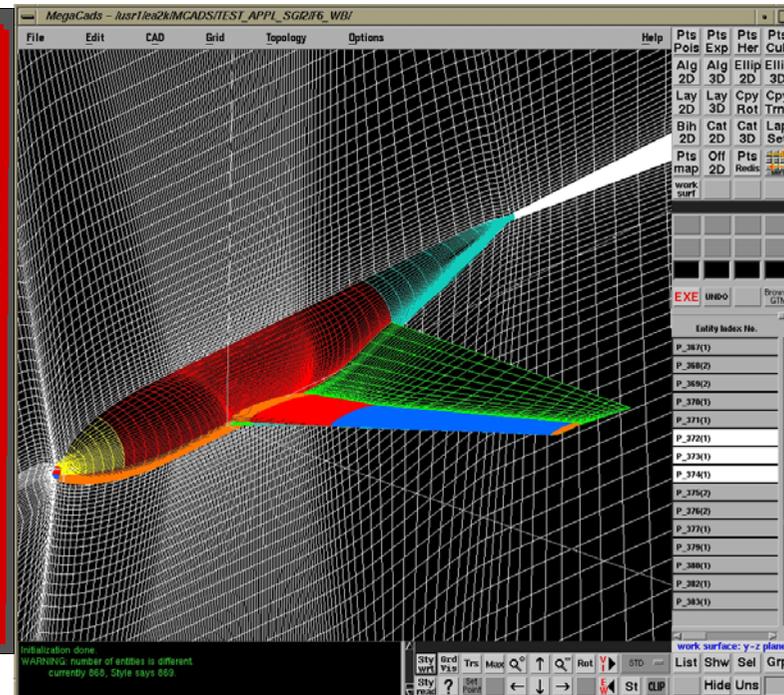
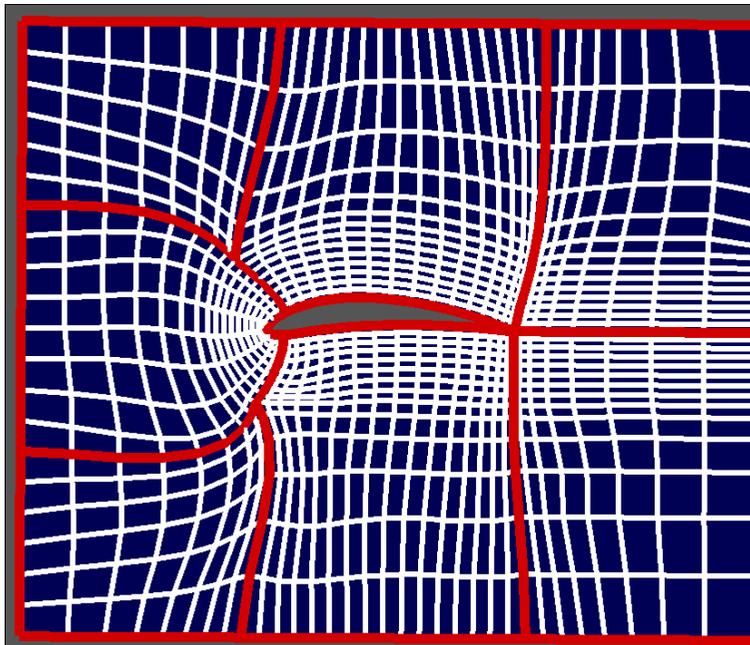


## Volumenformulierung:

Hohe Genauigkeit  
aber unpraktikabel  
für 3D Multi-Block!

$$\delta I = - \int_C p (-\psi_2 \delta y_\xi + \psi_3 \delta x_\xi) dl + K(I)$$

$$- \int_D \psi_\xi^T (\delta y_\eta f - \delta x_\eta g) + \psi_\eta^T (-\delta y_\xi f + \delta x_\xi g) dA$$



## Volumenformulierung:

Hohe Genauigkeit  
aber unpraktikabel  
für 3D Multi-Block!

$$\delta I = - \int_C p (-\psi_2 \delta y_\xi + \psi_3 \delta x_\xi) dl + K(I) - \int_D \psi_\xi^T (\delta y_\eta f - \delta x_\eta g) + \psi_\eta^T (-\delta y_\xi f + \delta x_\xi g) dA$$

(Jameson, 1994)

Ausweg:

## Oberflächenformulierungen:

$$I. \quad \delta I = - \int_C w_H^T \psi (\delta n_x u + \delta n_y v) dl + K(I)$$

(Gauger, 2002)

$$w_H^T = (\rho, \rho u, \rho v, \rho H)$$

$$II. \quad \delta I = \int_C \text{div}(\vec{k}(I) + (w_H^T \psi) \vec{v}) \cdot (n_x \delta x + n_y \delta y) dl$$

(Weinerfelt, 2001)

$$z.B. \quad \vec{k}^T(C_D) = C_p / C_{ref} (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Gegeben seien nun das primale Problem

(P) Bestimme  $\delta I = (h, \varphi)_{\Omega} + (d, C\varphi)_{\partial\Omega}$ ,  
wobei  $\mathcal{L}\varphi = b$  in  $\Omega$   
und  $B\varphi = c$  auf  $\partial\Omega$

sowie das duale Problem

(D) Bestimme  $\delta I^* = (\psi, b)_{\Omega} + (C^*\psi, c)_{\partial\Omega}$ ,  
wobei  $\mathcal{L}^*\psi = h$  in  $\Omega$   
und  $B^*\psi = d$  auf  $\partial\Omega$ .

Die partielle Integration von  $(\psi, \mathcal{L}\varphi)_{\Omega}$  liefert die Identität

$$(\psi, \mathcal{L}\varphi)_{\Omega} = (\mathcal{L}^*\psi, \varphi)_{\Omega} + (A_1\psi, A_2\varphi)_{\partial\Omega}, \quad (11)$$

wobei die Operatoren  $A_1$  und  $A_2$  Differentialoperatoren auf  $\partial\Omega$  sind.

Wie müssen bei vorgegebenen  $B$  und  $C$  die Operatoren  $B^*$  und  $C^*$  beschaffen sein, damit

$$(A_1\psi, A_2\varphi)_{\partial\Omega} = (B^*\psi, C\varphi)_{\partial\Omega} - (C^*\psi, B\varphi)_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi, \psi \quad (12)$$

und folglich  $\delta I = \delta I^*$  gilt?

$$B\varphi \equiv B\Phi \quad (13)$$

$$C\varphi \equiv C\Phi \quad (14)$$

$$(\mathcal{A}_1\psi, \mathcal{A}_2\varphi) \equiv \Psi^\top A\Phi \quad (15)$$

$$\int_{\partial\Omega} \Psi^\top A\Phi - (B^*\Psi)^\top C\Phi + (C^*\Psi)^\top B\Phi \, dS = 0 \quad \forall \Phi, \Psi$$
$$\Leftrightarrow (B^*)^\top C - (C^*)^\top B = A \quad (16)$$

$$T := \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \quad T^* := \begin{pmatrix} -C^* \\ B^* \end{pmatrix}, \quad A = T^{*\top} T \quad (17)$$

Ist  $A$  nichtsingulär so existiert  $T^{-1}$  und es gilt

$$T^* = (T^{-1})^\top A^\top \quad (18)$$

## Oberflächenformulierung:

$$\text{I.} \quad \delta I = - \int_C w_H^T \psi (\delta n_x u + \delta n_y v) dl + K(I)$$

(Gauger, 2002)

$$w_H^T = ( \rho, \rho u, \rho v, \rho H )$$

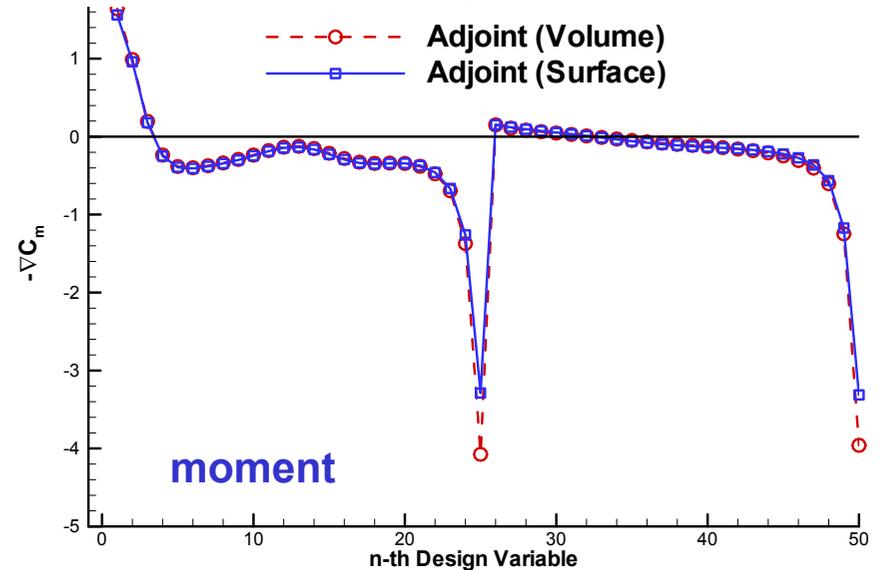
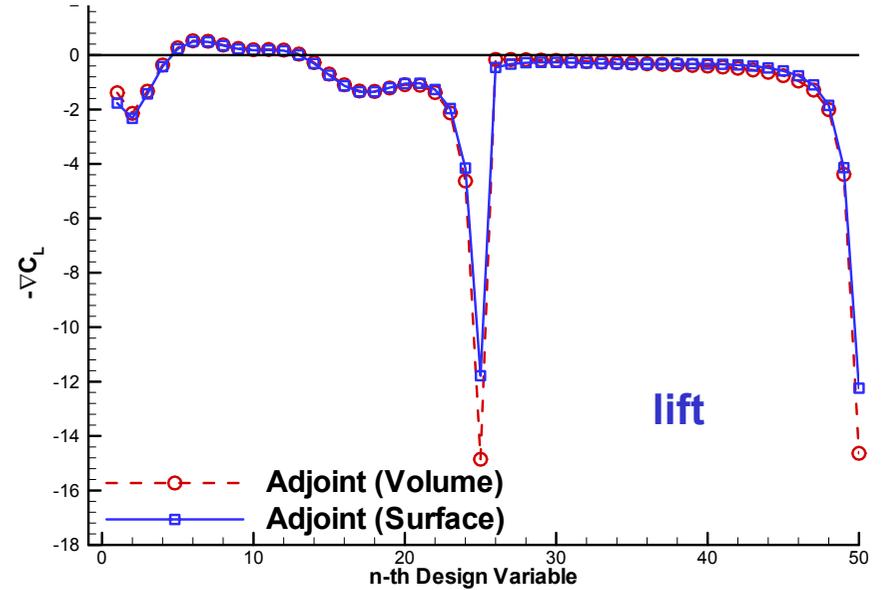
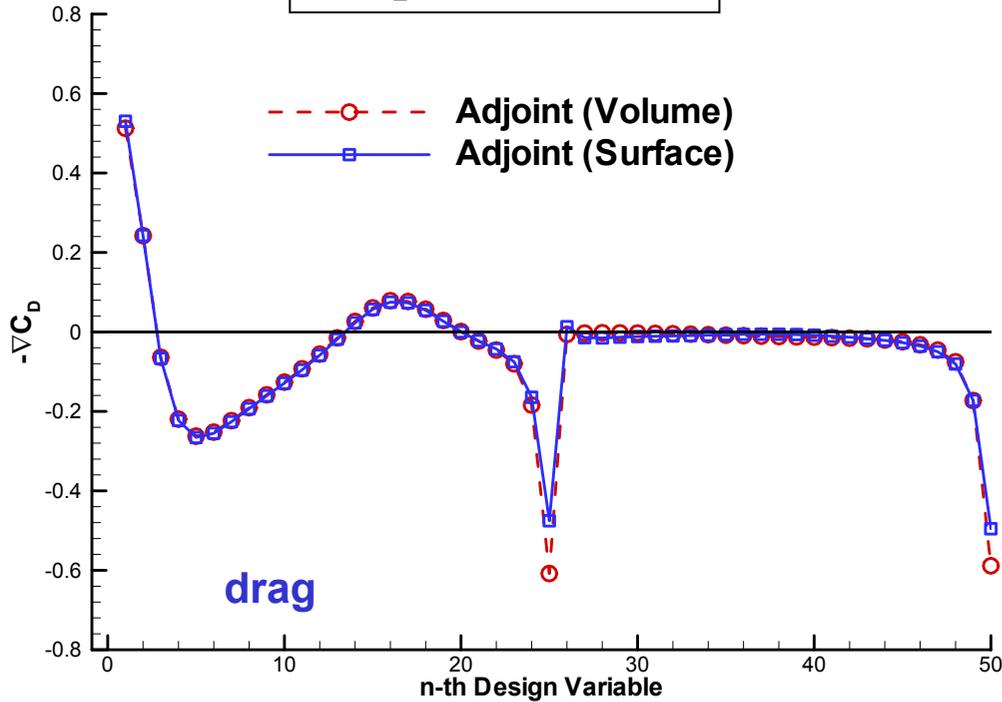
## Herleitung:

- Linearisiere die Euler-Gleichungen
- Konstruktion der adjungierten Randoperatoren nach (Giles, 1997)  
(→ bislang keine Theorie zur Adjungierung nichtelliptischer Probleme)
- Nutze die primale Lösung der nicht-linearen Euler-Gleichungen in I.

# Validierung der Oberflächenformulierung

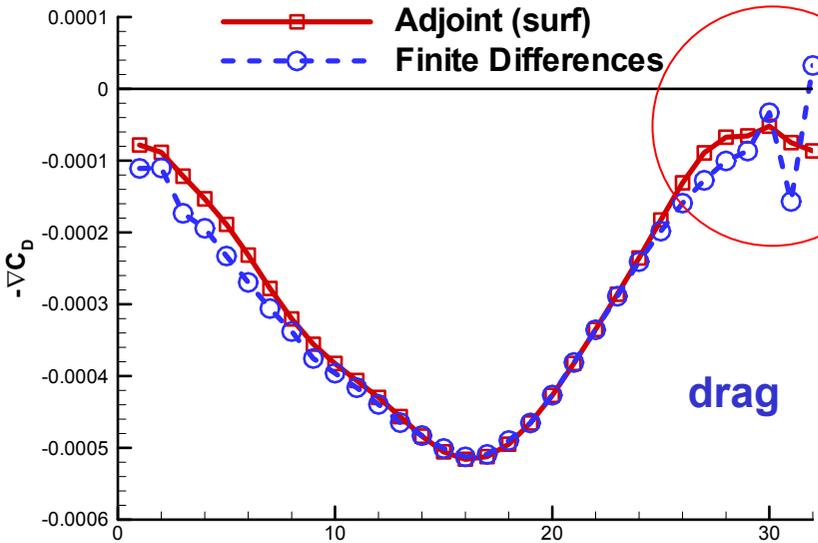
## Volumen- vs. Oberflächenformulierung

**RAE2822**  
 $M_\infty=0.73, \alpha = 2.0^\circ$   
**50 design variables**  
**(B-spline)**

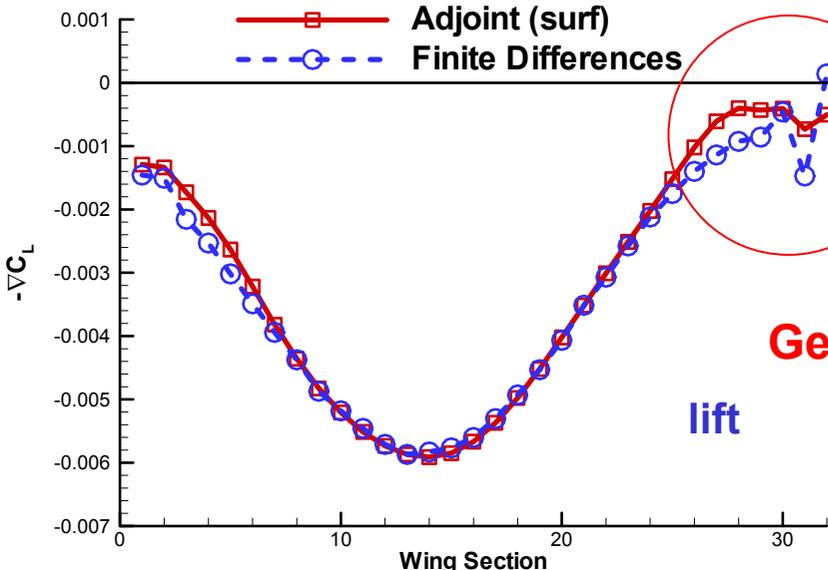
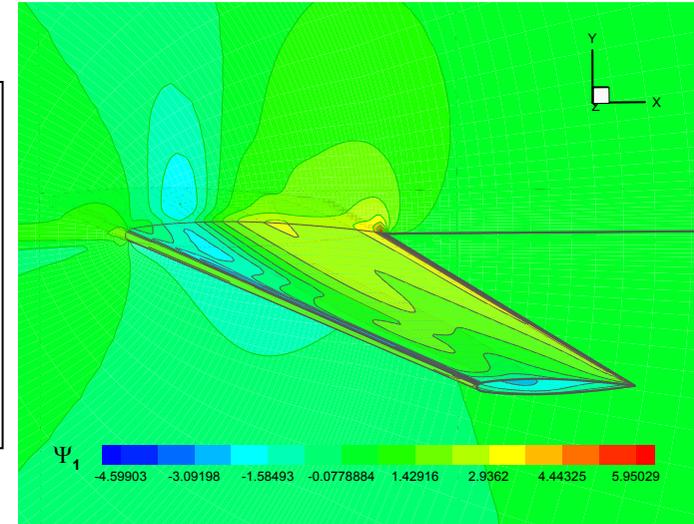


# Validierung der Oberflächenformulierung

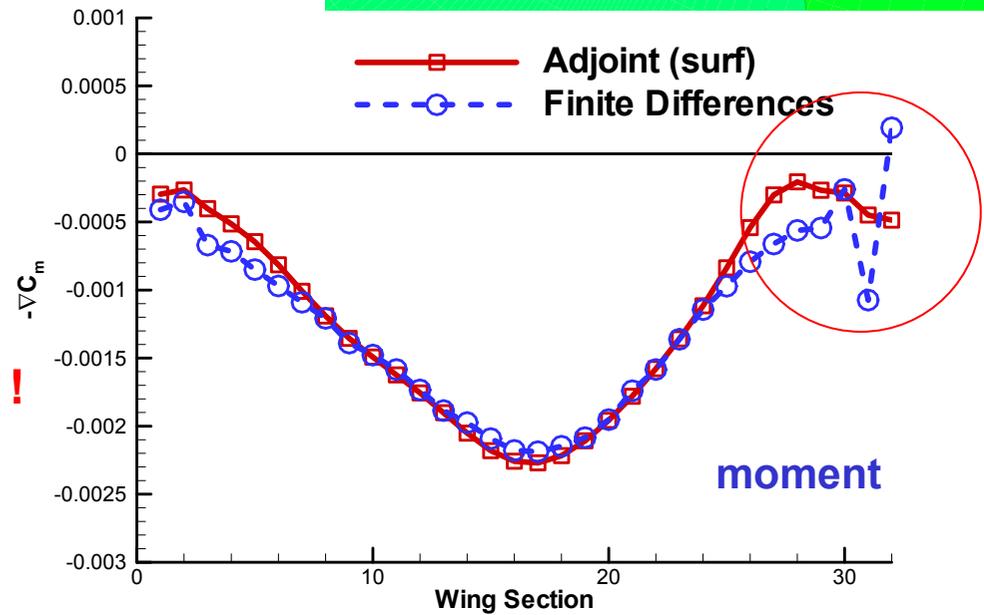
## Finite Differenzen vs. Adjungiertenverfahren



**ONERA M6 Flügel**  
 (129x33x49)  
 $M_\infty = 0.84$ ,  $\alpha = 3.1294^\circ$ ,  
 $C_L^t = 0.3$   
 32 Entwurfsvariablen  
 (Verwindungswinkel)



**Genauigkeit !**



## Zielfunktion

- ▶ Widerstandsreduktion für das RAE 2822-Profil
- ▶  $M_\infty = 0.73, \alpha = 2.00^\circ$

## Nebenbedingung

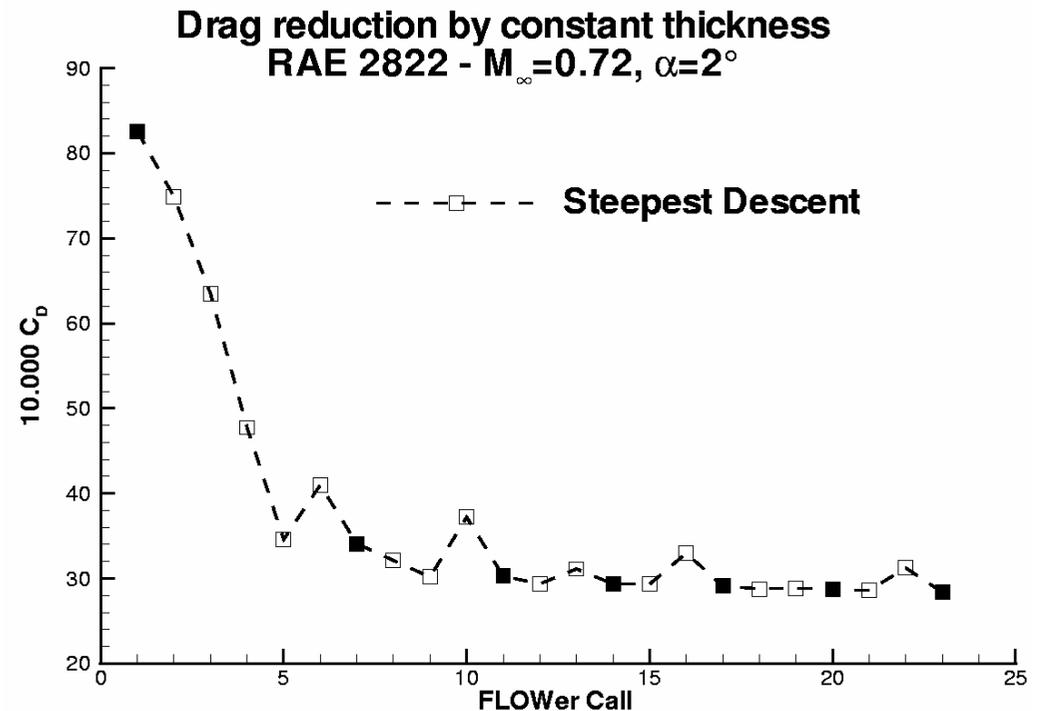
- ▶ Konst. Profildicke

## Verfahren

- ▶ FLOWer ADJOINT (Euler)
- ▶ Deformation der Wölbungslinie (20 Hicks-Henne-Funktionen)

## Optimierer

- ▶ Steepest Descent
- ▶ Conjugate Gradient
- ▶ Quasi Newton Trust Region



## Zielfunktion

- ▶ Widerstandsreduktion für das RAE 2822-Profil
- ▶  $M_\infty = 0.73$ ,  $\alpha = 2.00^\circ$

## Nebenbedingung

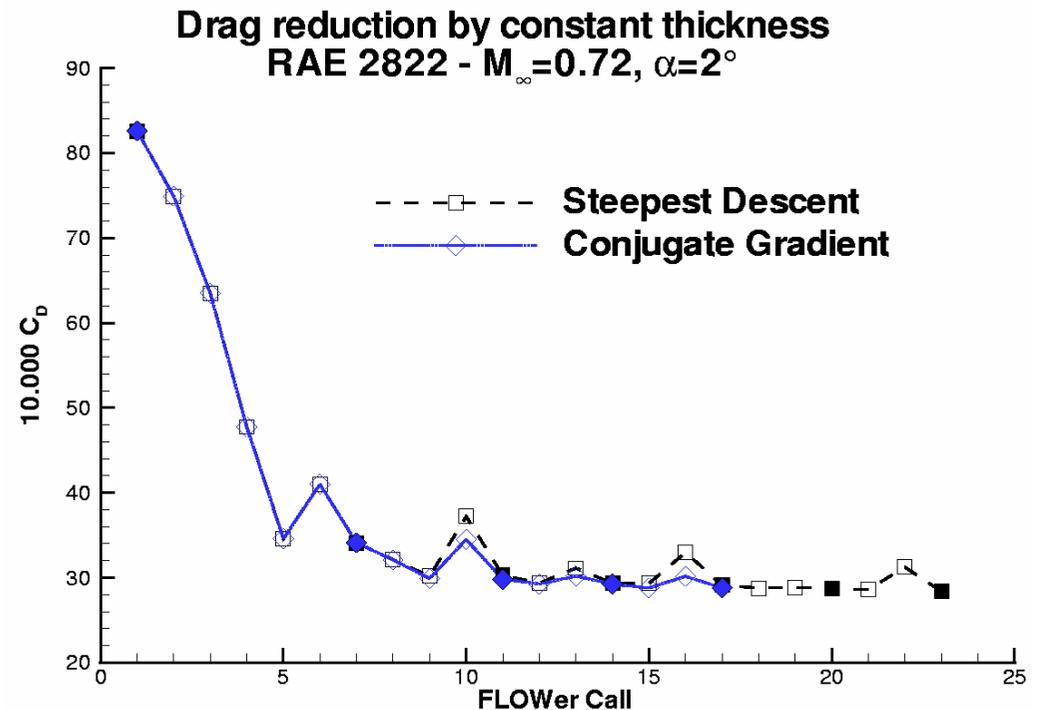
- ▶ Konst. Profildicke

## Verfahren

- ▶ FLOWer ADJOINT (Euler)
- ▶ Deformation der Wöblungslinie (20 Hicks-Henne-Funktionen)

## Optimierer

- ▶ Steepest Descent
- ▶ **Conjugate Gradient**
- ▶ Quasi Newton Trust Region



## Zielfunktion

- ▶ Widerstandsreduktion für das RAE 2822-Profil
- ▶  $M_\infty = 0.73, \alpha = 2.00^\circ$

## Nebenbedingung

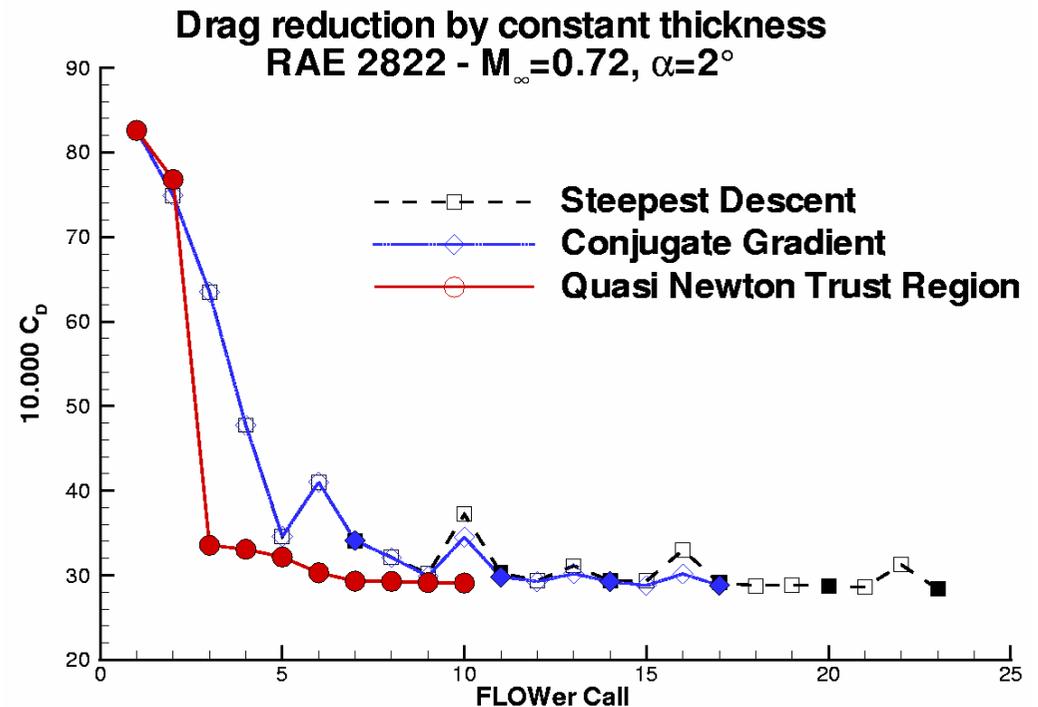
- ▶ Konst. Profildicke

## Verfahren

- ▶ FLOWer ADJOINT (Euler)
- ▶ Deformation der Wölbungslinie (20 Hicks-Henne-Funktionen)

## Optimierer

- ▶ Steepest Descent
- ▶ Conjugate Gradient
- ▶ **Quasi Newton Trust Region**



## Zielfunktion

- ▶ Widerstandsreduktion für das RAE 2822-Profil
- ▶  $M_\infty = 0.73$ ,  $\alpha = 2.00^\circ$

## Nebenbedingung

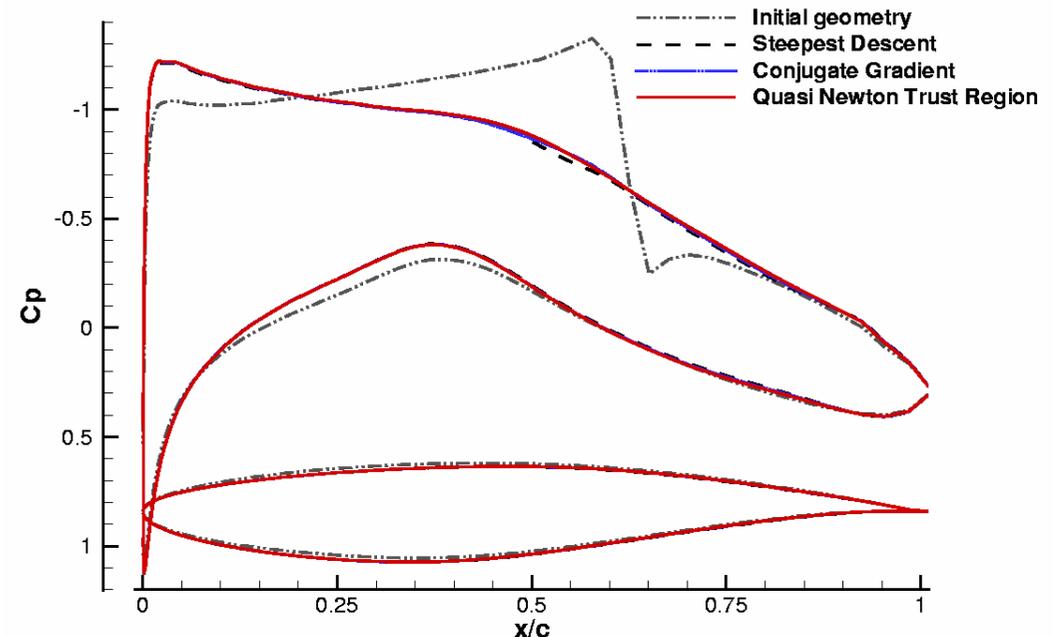
- ▶ Konst. Profildicke

## Verfahren

- ▶ FLOWer ADJOINT (Euler)
- ▶ Deformation der Wölbungslinie (20 Hicks-Henne-Funktionen)

## Optimierer

- ▶ Steepest Descent
- ▶ Conjugate Gradient
- ▶ **Quasi Newton Trust Region**



## Zielfunktion

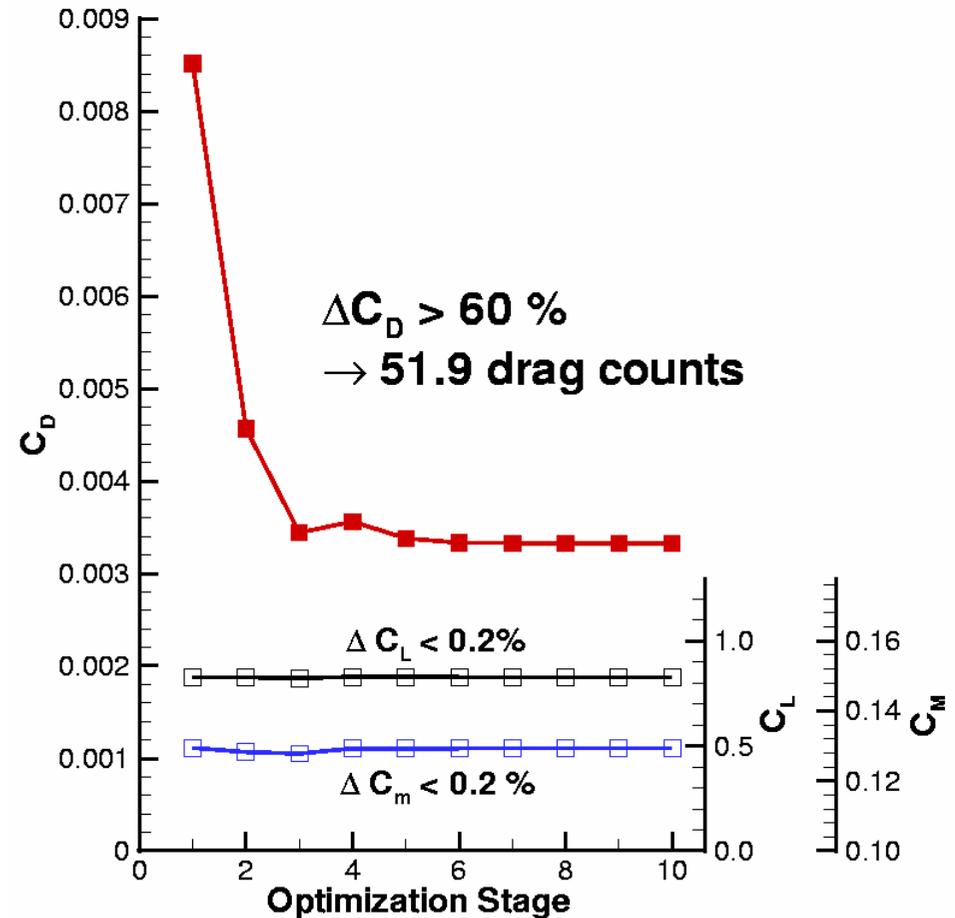
- ▶ Widerstandsreduktion RAE 2822
- ▶  $M_\infty = 0.73$ ,  $\alpha = 2.0^\circ$

## Nebenbedingungen

- ▶ Auftrieb, Nickmoment und Anstellwinkel konst.
- ▶ Konst. Profildicke

## Verfahren / Optimierer

- ▶ FLOWer ADJOINT (Euler)
- ▶ Deformation der Wöblungslinie (20 Hicks-Henne-Funktionen)
- ▶ Feasible Direction



## Zielfunktion

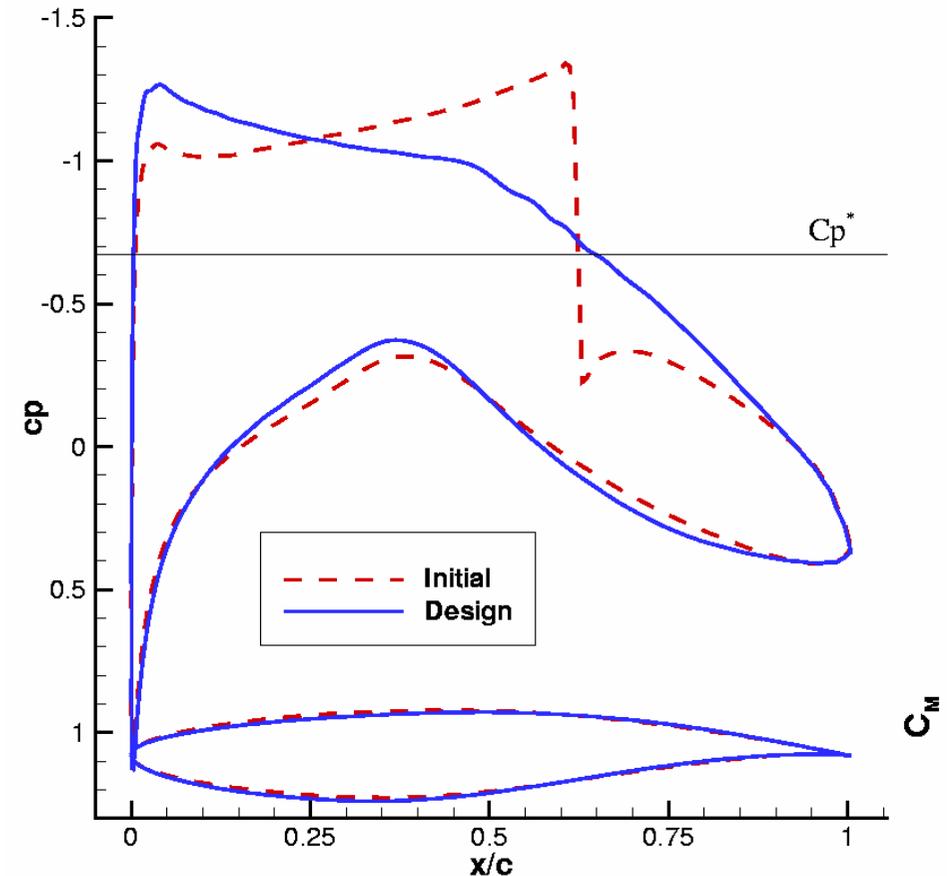
- ▶ Widerstandsreduktion RAE 2822
- ▶  $M_\infty = 0.73$ ,  $\alpha = 2.0^\circ$

## Nebenbedingungen

- ▶ Auftrieb, Nickmoment und Anstellwinkel konst.
- ▶ Konst. Profildicke

## Verfahren / Optimierer

- ▶ FLOWer ADJOINT (Euler)
- ▶ Deformation der Wölbungslinie (20 Hicks-Henne-Funktionen)
- ▶ Feasible Direction



surface pressure distribution



## Zielfunktion

- ▶ **Widerstandsreduktion in zwei Entwurfspunkten**

$$I = \sum_{i=1}^2 W_i C_d(\alpha_i, M_i)$$

## Entwurfspunkte

- ▶ **1 :  $M_\infty=0.734$ ,  $CL = 0.80$  ,  $\alpha = 2.8^\circ$ ,  $Re=6.5 \times 10^6$ ,  $x_{trans}=3\%$ ,  $W_1=2$**
- ▶ **2 :  $M_\infty=0.754$ ,  $CL = 0.74$  ,  $\alpha = 2.8^\circ$ ,  $Re=6.2 \times 10^6$ ,  $x_{trans}=3\%$ ,  $W_2=1$**

## Nebenbedingungen

- ▶ **Kein Auftriebsverlust bei festem Anstellwinkel**
- ▶ **Variation im Nickmoment weniger als 2% in jedem Entwurfspunkt**
- ▶ **Konst. maximale Dicke (bei 5% der Profilsehne 96% der Ausgangsdicke)**
- ▶ **Profilnasenradius mehr als 90% des Ausgangsradius**
- ▶ **Hinterkantenwinkel mehr als 80% des Ausgangswinkels**

## Parametrisierung

- ▶ Deformation der Wölbungslinie (20 Hicks-Henne-Funktionen)

## Optimierungsstrategie / Verfahren

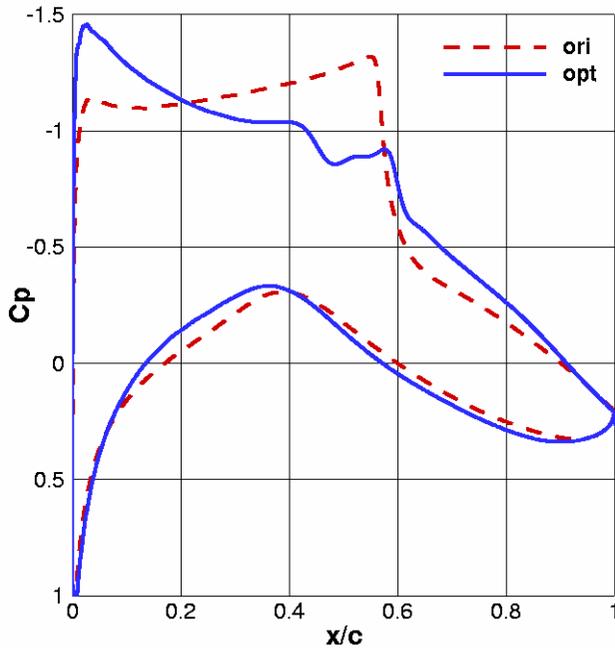
- ▶ Constrained SQP
- ▶ Navier-Stokes Löser FLOWer, Baldwin/Lomax Turbulenzmodell
- ▶ Gradienten berechnet mit FLOWer ADJOINT (Euler)

## Ergebnisse

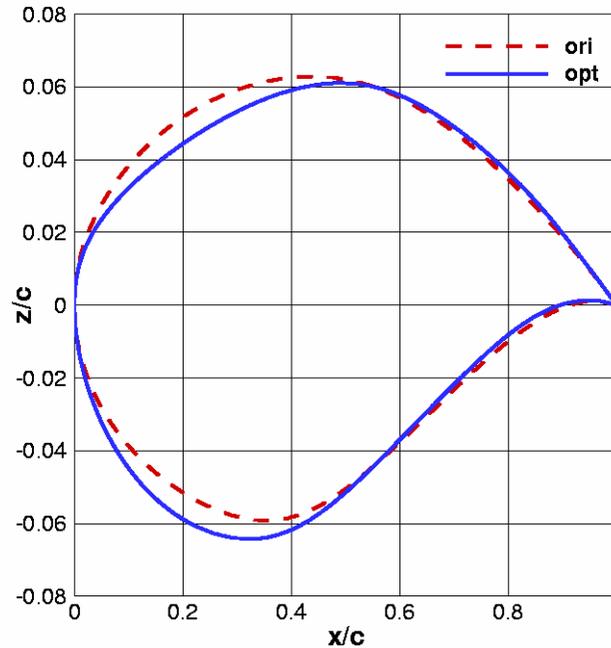
Pt	$\alpha$	$M_i$	$c_l^t$	$c_d^t (.10^{-4})$	$c_l$	$c_d^t (.10^{-4})$	$\Delta c_d / c_d^t$	$\Delta c_l / c_l^t$	$\Delta c_m / c_m^t$
1	2.8	0.734	0.811	197.1	0.811	135.5	-31.2%	0%	+1.6%
2	2.8	0.754	0.806	300.8	0.828	215.0	-27.4%	+2.7%	+2.0%

## 1. Entwurfspunkt

$M_\infty=0.734, \alpha=2.8^\circ$



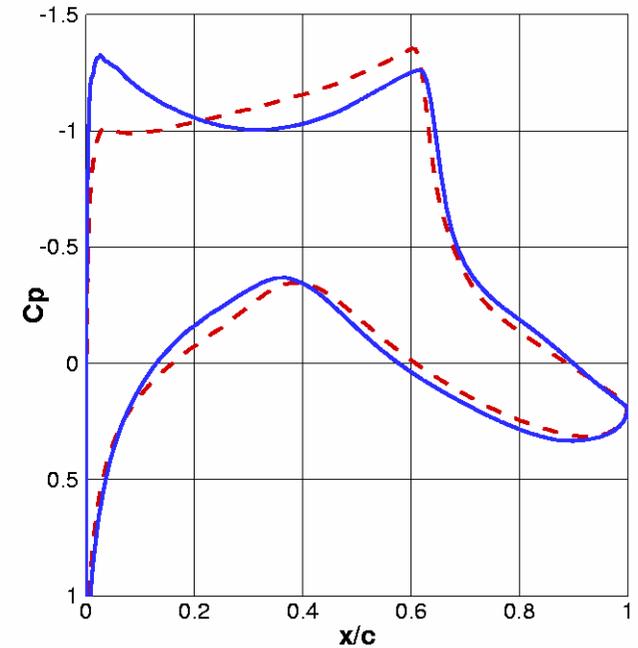
## Airfoil Geometry



## Profilgeometrie

## 2. Entwurfspunkt

$M_\infty=0.754, \alpha=2.8^\circ$



## Zielfunktion

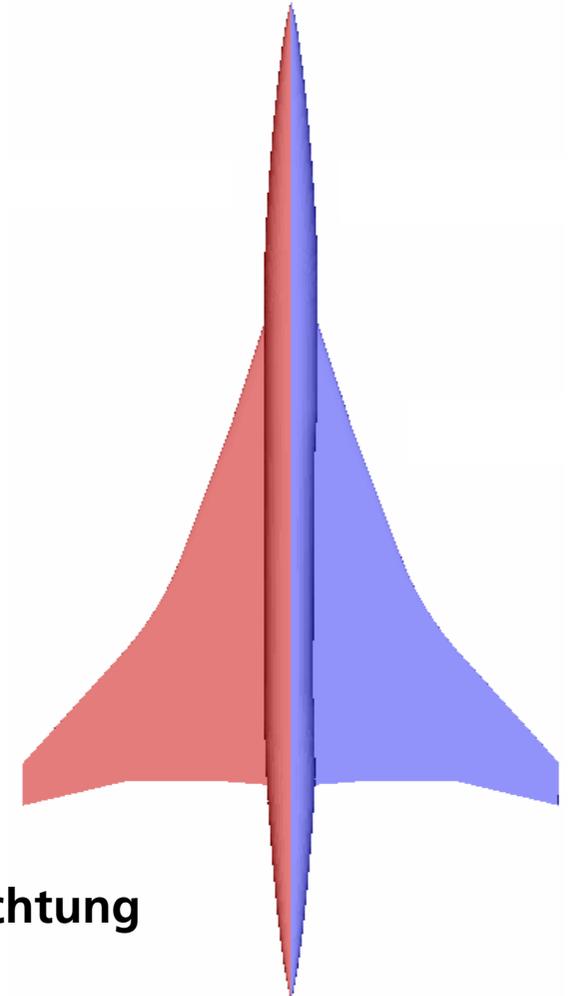
- ▶ **Widerstandsreduktion bei konstantem Auftrieb**

## Entwurfspunkt

- ▶ **Mach-Zahl = 2.0**
- ▶ **Auftriebsbeiwert = 0.12**

## Nebenbedingungen

- ▶ **Minimaler Rumpfradius**
- ▶ **Flügel-Planform unverändert**
- ▶ **Minimale Flügeldickenverteilung in Spannweitenrichtung**



## Verfahren / Netz

- ▶ **FLOWer MAIN (Target Lift Option)**
- ▶ **FLOWer ADJOINT (Euler)**
- ▶ **Strukturiertes Monoblock-Netz (MegaCads),  
230.000 Netzpunkte**

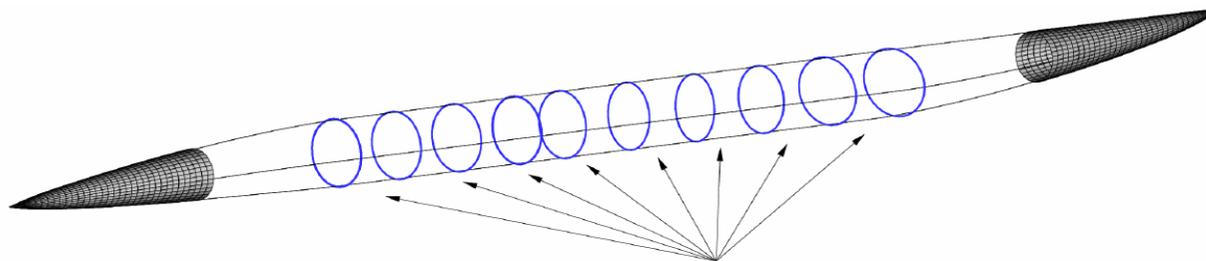
## Optimierer

- ▶ **Quasi-Newton Verfahren (BFGS)**

## Entwurfsvariablen

- Rumpf: 10 Parameter
  - Verwindung: 10 Parameter
  - Wölbung (8 Schnitte): 32 Parameter
  - Dicke (8 Schnitte): 32 Parameter
  - Anstellwinkel: 1 Parameter
- 85 Parameter

## Rumpf

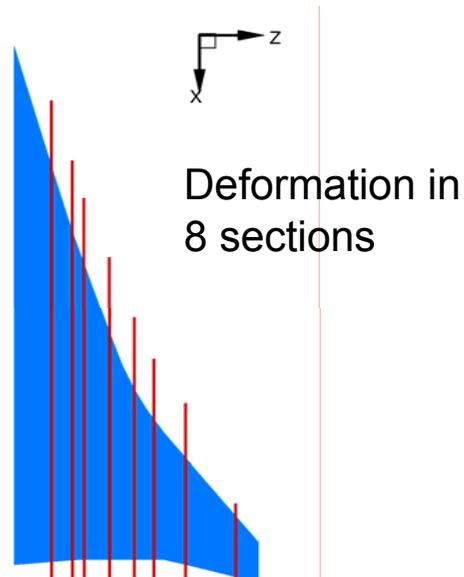


10 sections controlled by Bezier nodes

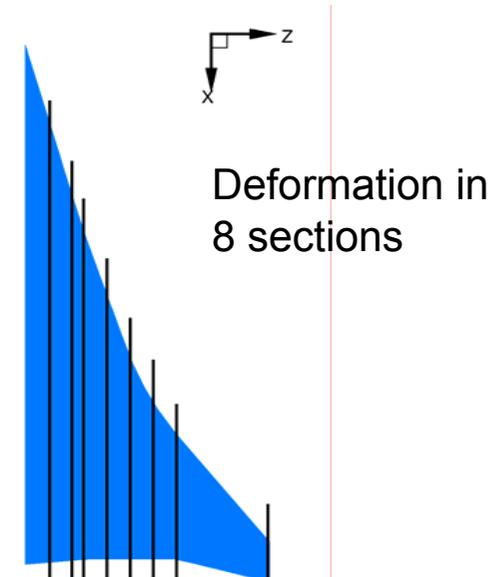
## Entwurfsvariablen

- Rumpf: 10 Parameter
  - Verwindung: 10 Parameter
  - Wölbung (8 Schnitte): 32 Parameter
  - Dicke (8 Schnitte): 32 Parameter
  - Anstellwinkel: 1 Parameter
- 85 Parameter**

### Wölbung



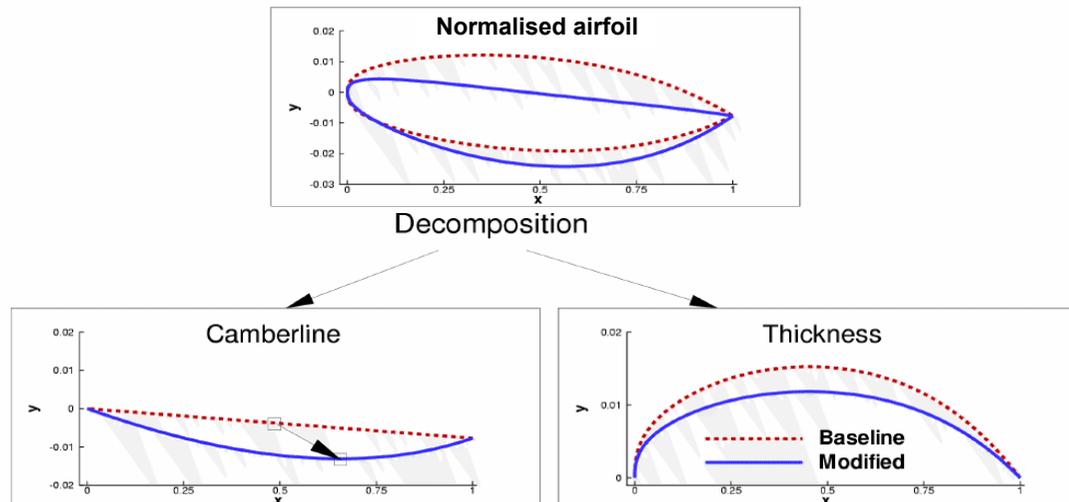
### Dicke



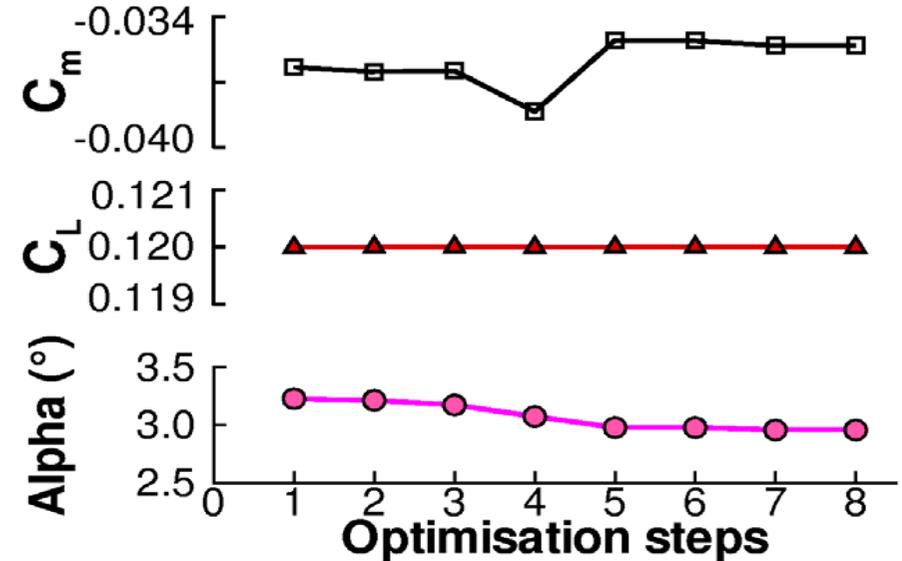
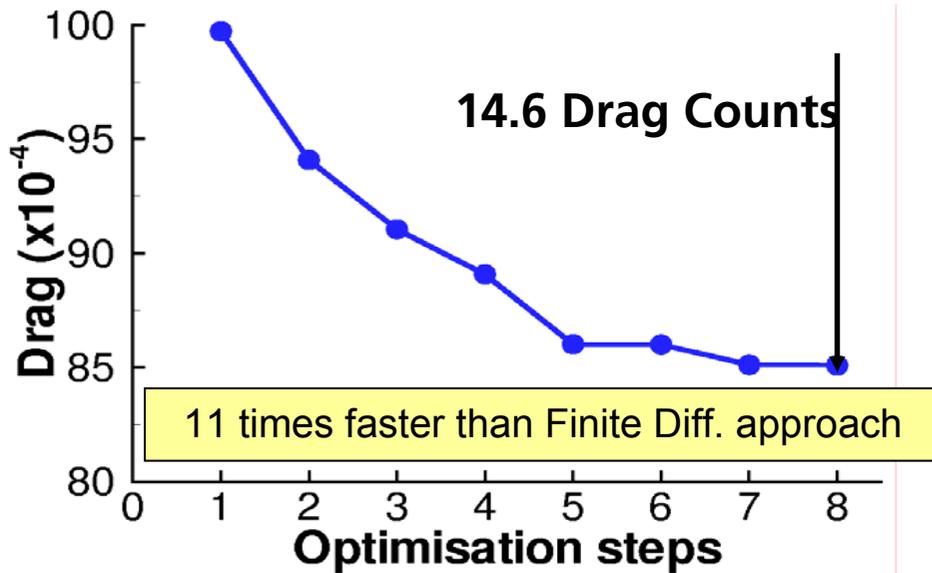
## Entwurfsvariablen

- Rumpf: 10 Parameter
  - Verwindung: 10 Parameter
  - Wölbung (8 Schnitte): 32 Parameter
  - Dicke (8 Schnitte): 32 Parameter
  - Anstellwinkel: 1 Parameter
- 85 Parameter**

## Wölbungslinie und Dickenverteilung

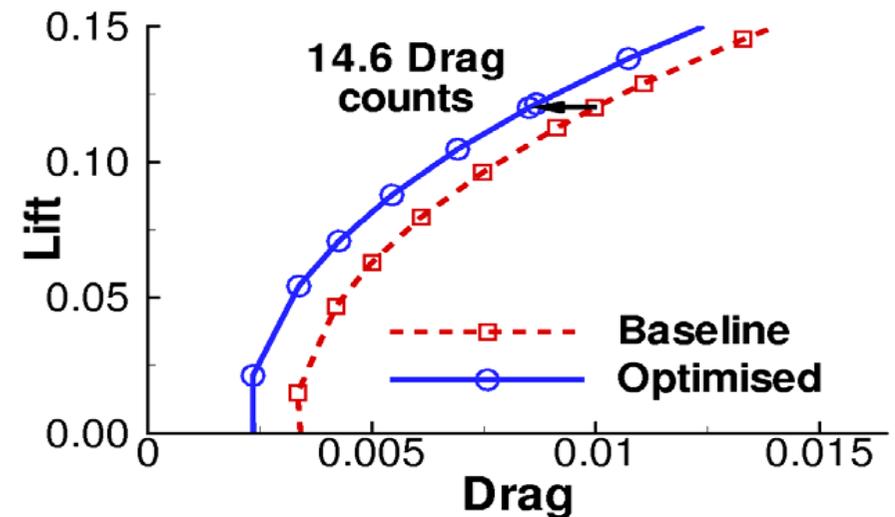
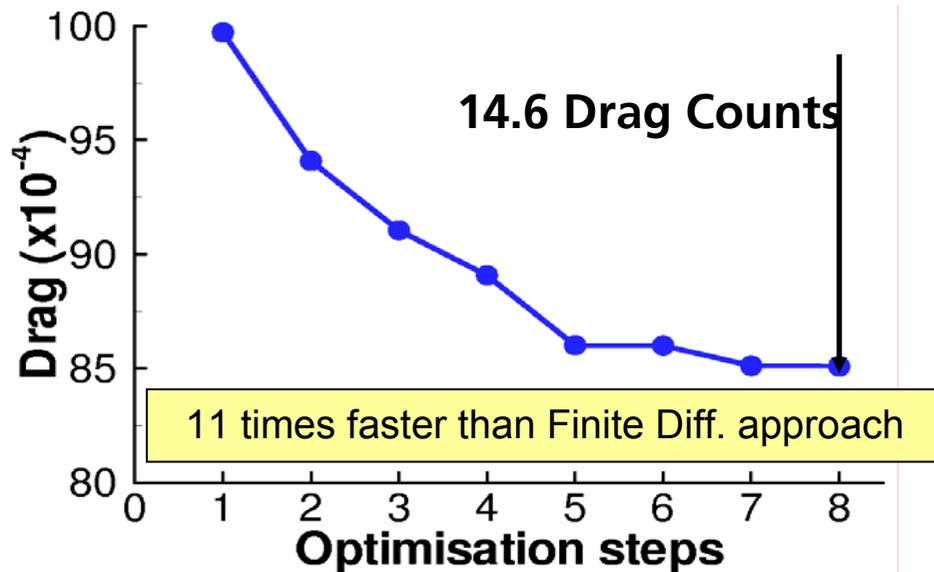


## Ergebnisse



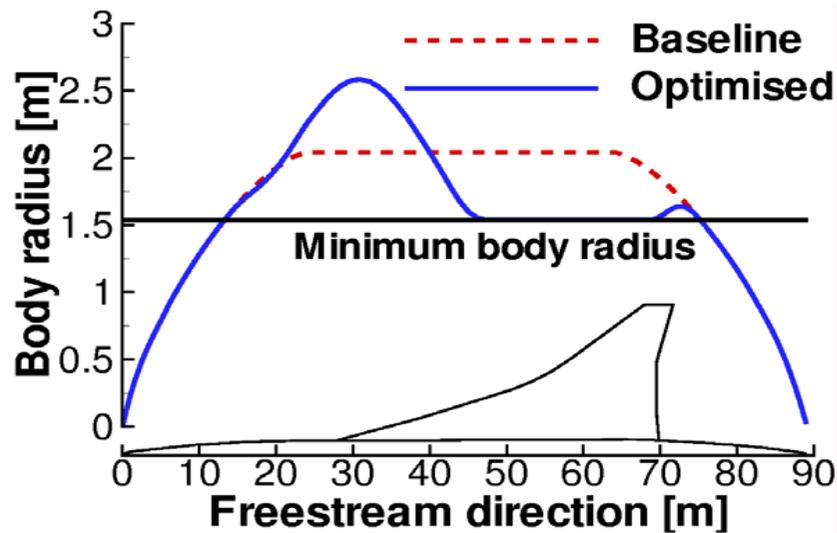
- ▶ 54 Strömungsberechnungen
- ▶ 7 Gradientenberechnungen

## Ergebnisse

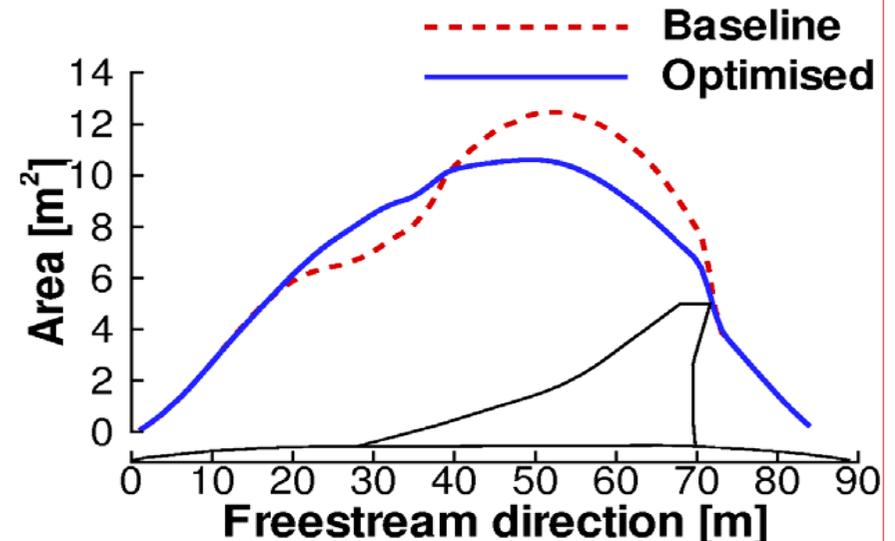


- ▶ 54 Strömungsberechnungen
- ▶ 7 Gradientenberechnungen

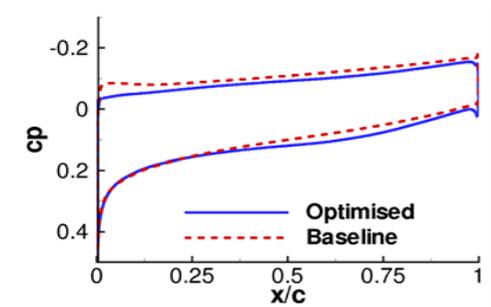
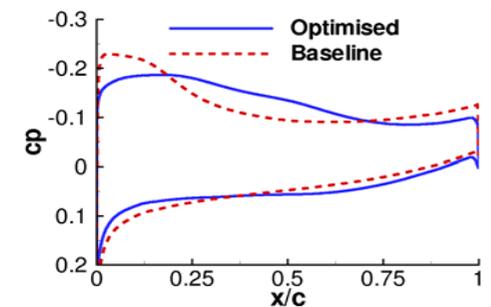
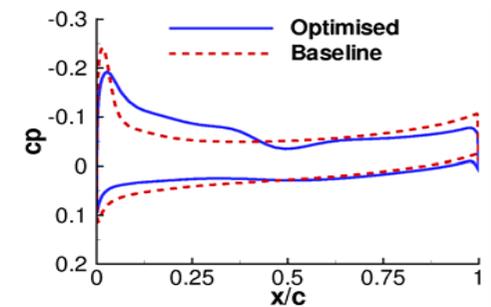
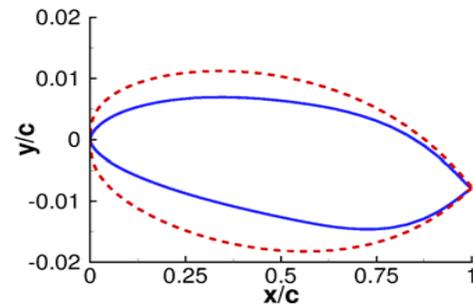
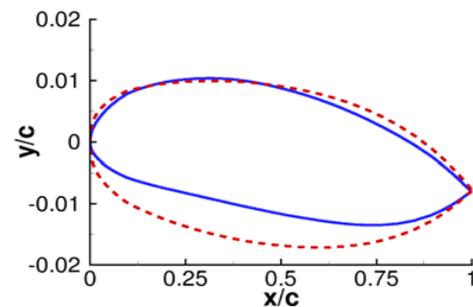
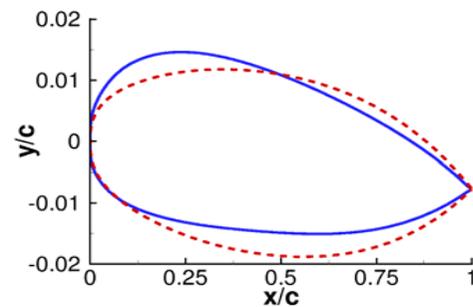
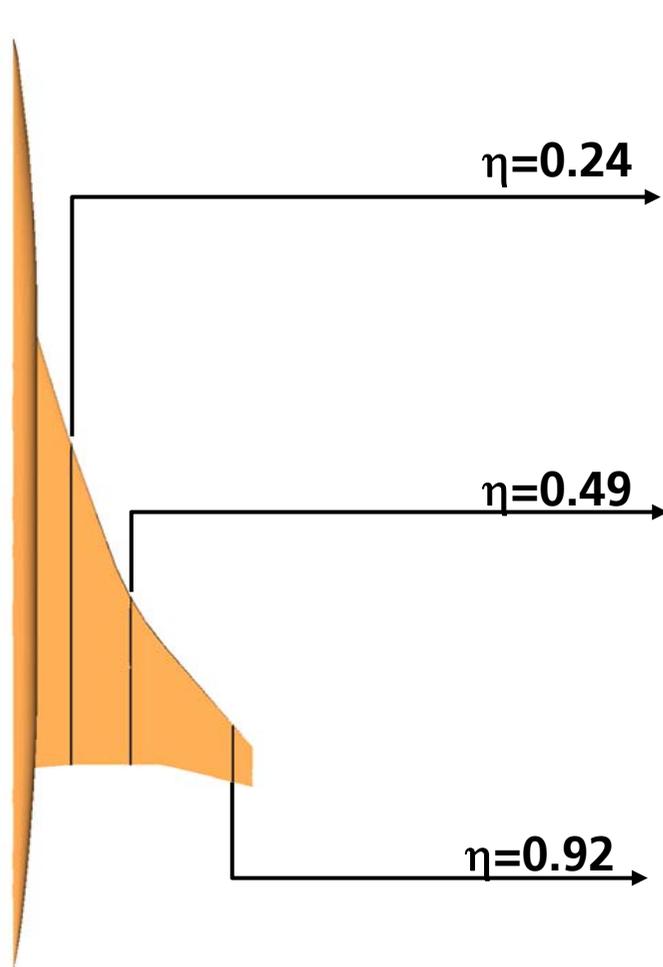
## Rumpfradius



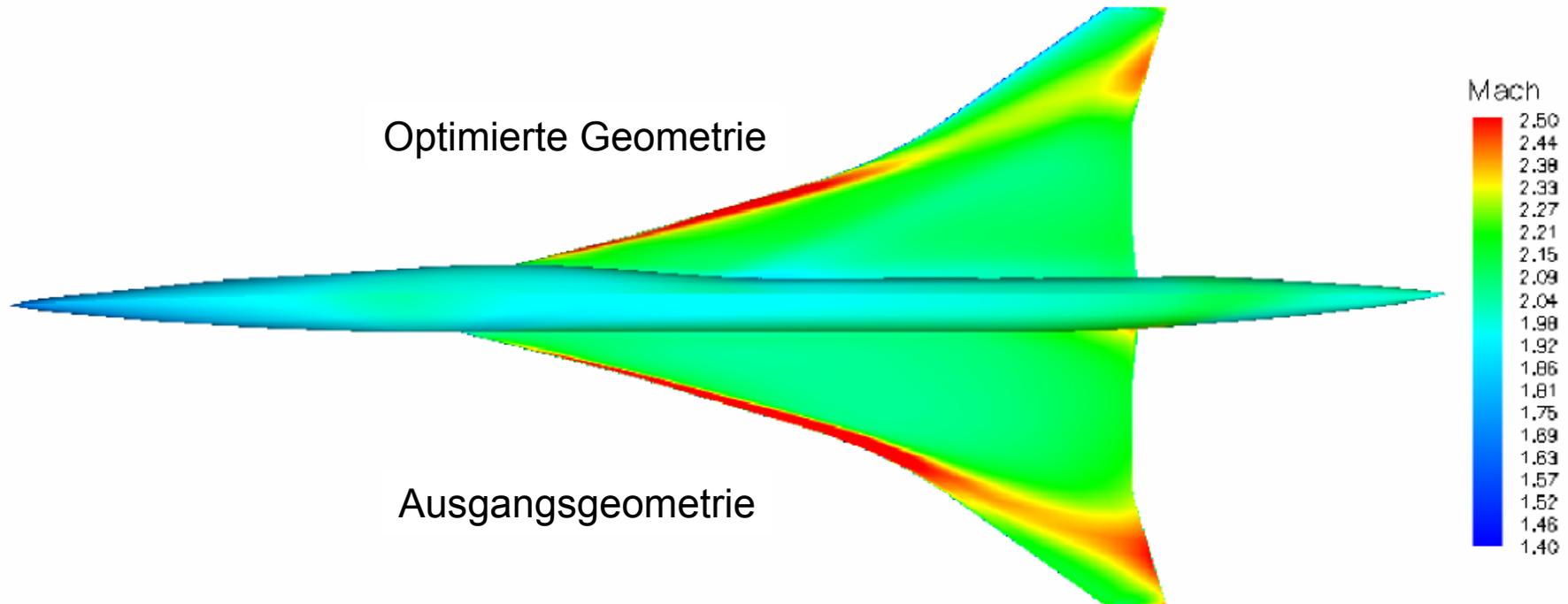
## Area Rule



## Druckverteilung in drei Flügelschnitten



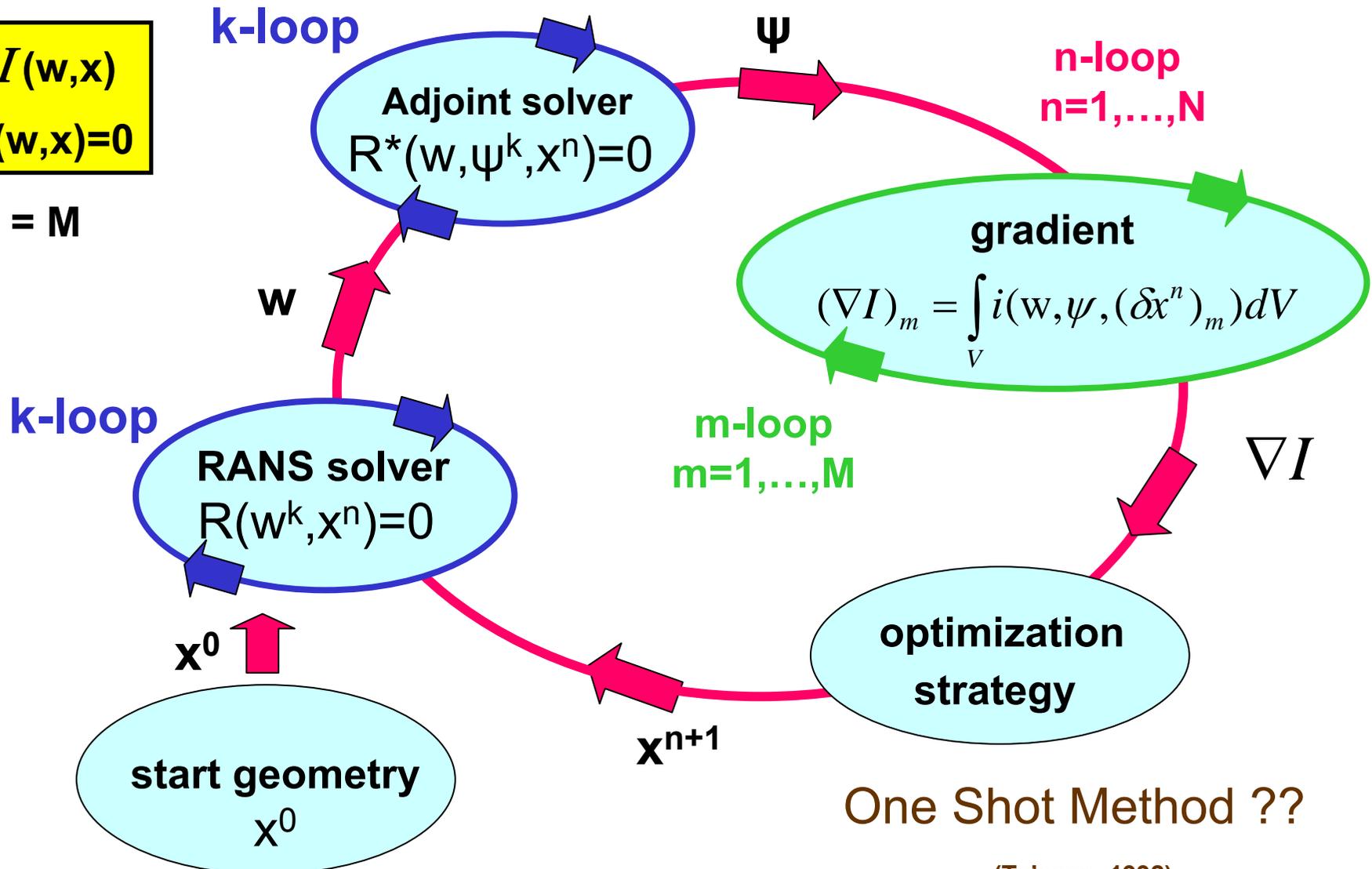
## Mach-Verteilung



# Adjungiertenverfahren

$\min I(w,x)$   
s.t.  $R(w,x)=0$

$\dim x = M$

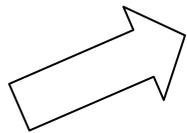


One Shot Method ??

(Ta'asan, 1992)

$$\begin{aligned} \min I(w,x) \\ \text{s.t. } R(w,x)=0 \end{aligned}$$

$\dim x = M$



$$L(w, x, \psi) = I(w, x) - \psi^T R(w, x)$$

$$\nabla_w L(w, x, \psi) = 0 \quad (\text{adjoint equation})$$

$$\nabla_x L(w, x, \psi) = 0 \quad (\text{design equation})$$

$$R(w, x) = 0 \quad (\text{state equation})$$



KKT

$$\begin{bmatrix} w + \Delta w \\ x + \Delta x \\ \psi + \Delta \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ x \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{ww} & L_{wx} & (\partial R / \partial w)^T \\ L_{xw} & L_{xx} & (\partial R / \partial x)^T \\ \partial R / \partial w & \partial R / \partial x & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \nabla_w L \\ \nabla_x L \\ R \end{bmatrix}$$

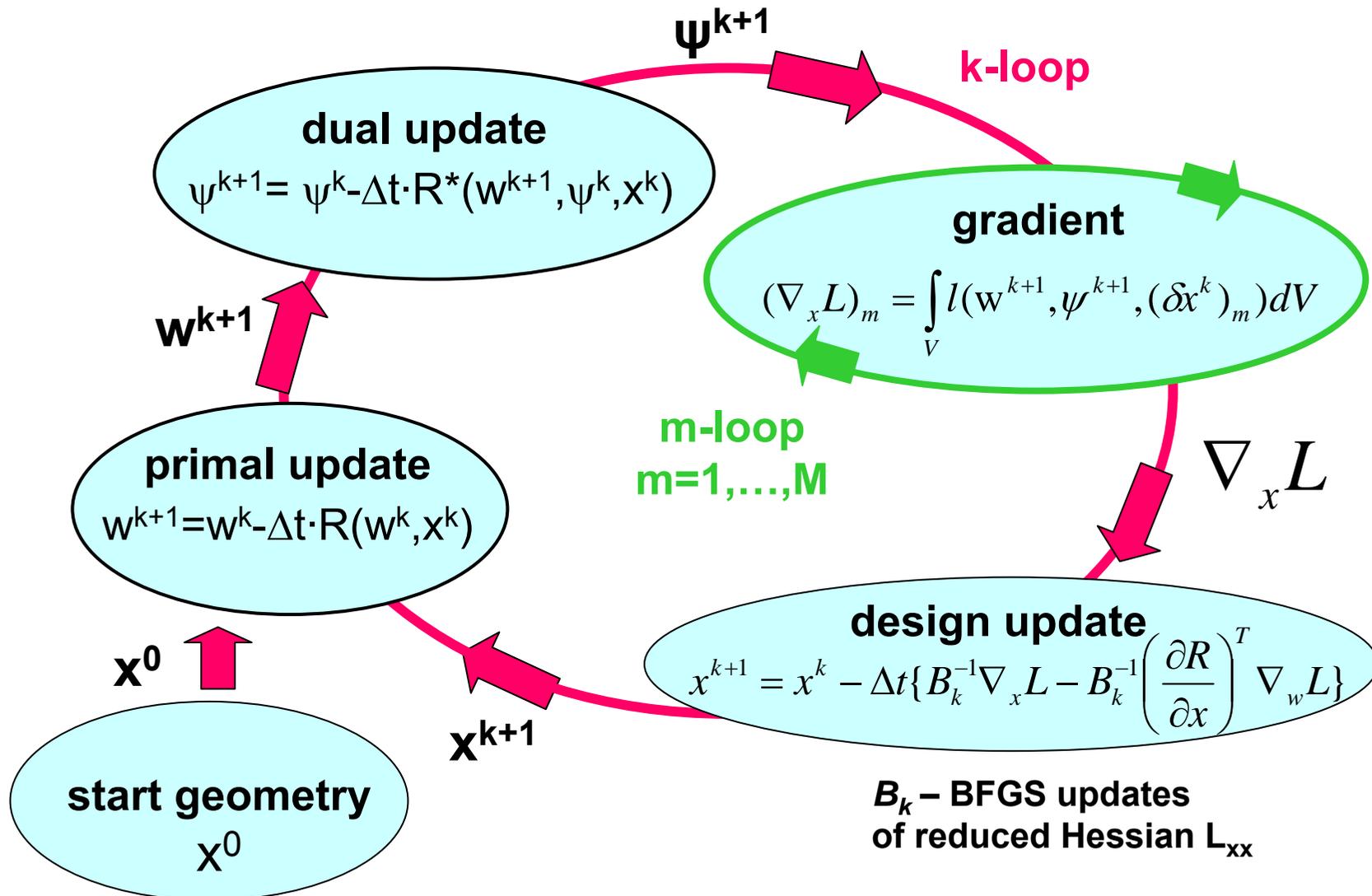
Newton SQP  
method

$$\begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta x \\ \Delta \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & B & (\partial R / \partial x)^T \\ I & \partial R / \partial x & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\nabla_w L \\ -\nabla_x L \\ -R \end{bmatrix}$$

approximate Newton  
rSQP method



simultaneous  
preconditioned  
pseudo time stepping

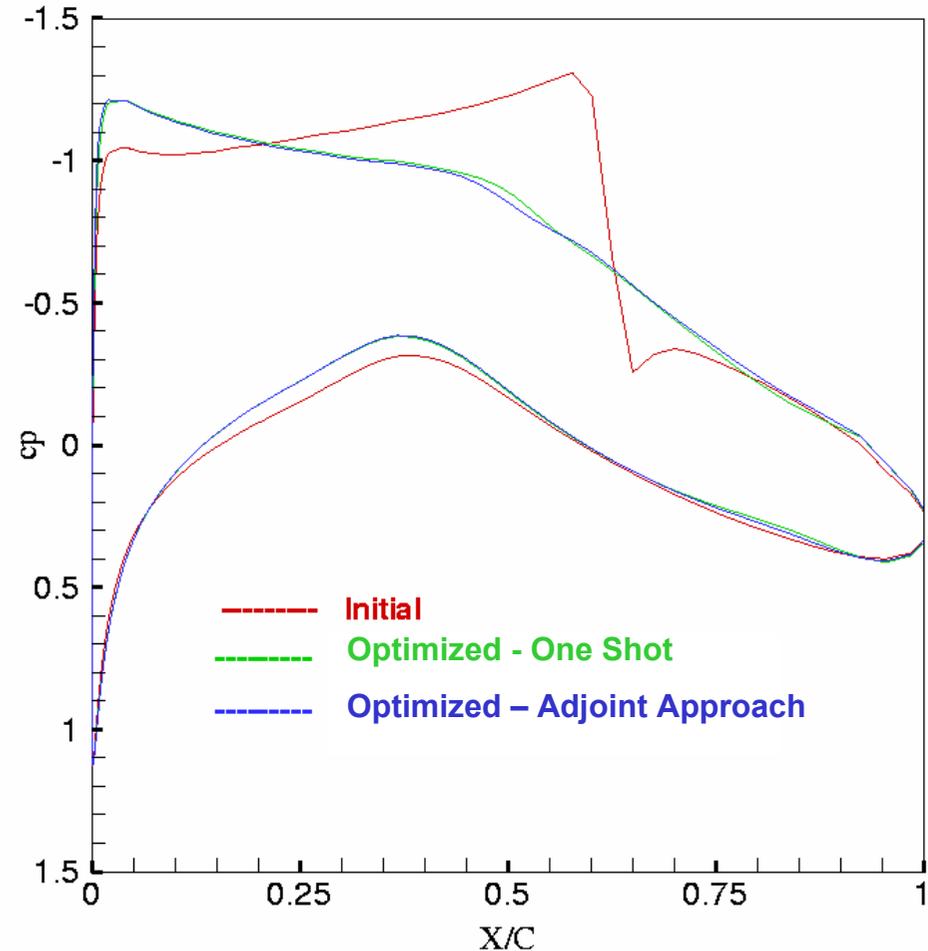


## Optimierungsproblem

- Widerstandsreduktion RAE 2822
- $M=0.73$ ,  $\alpha=2^\circ$

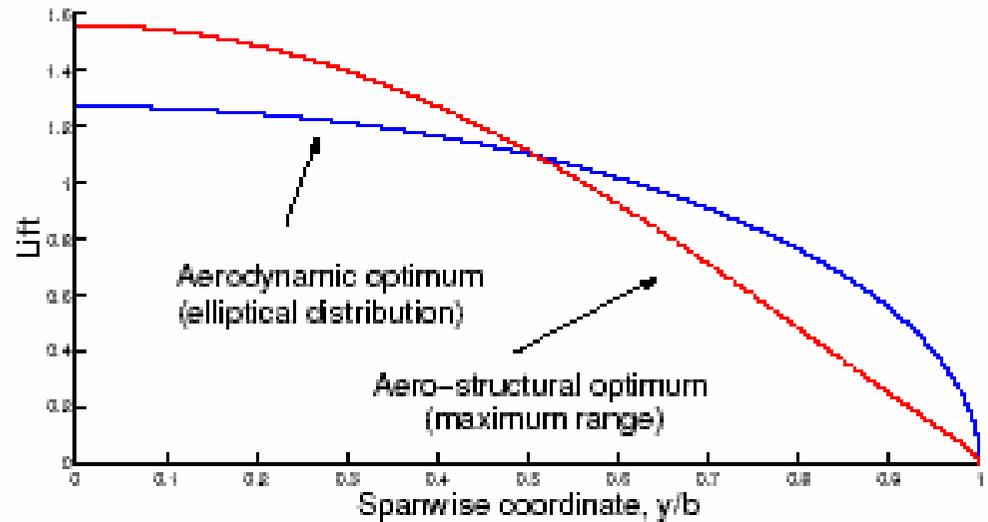
## Tools

- FLOWer
- FLOWer ADJOINT (Euler)



**Optimierung zu den numerischen Kosten von 4 Strömungssimulationen!**

### Überschall Business Jet



(Alonso et al., 2002)

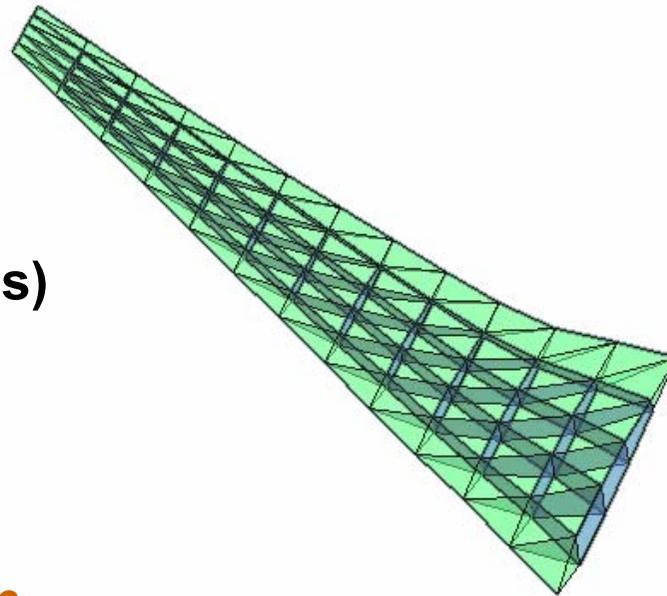
## AMP Flügel

15 Entwurfsvariablen  
(shape bumping  
functions based on  
Bernstein polynomials)

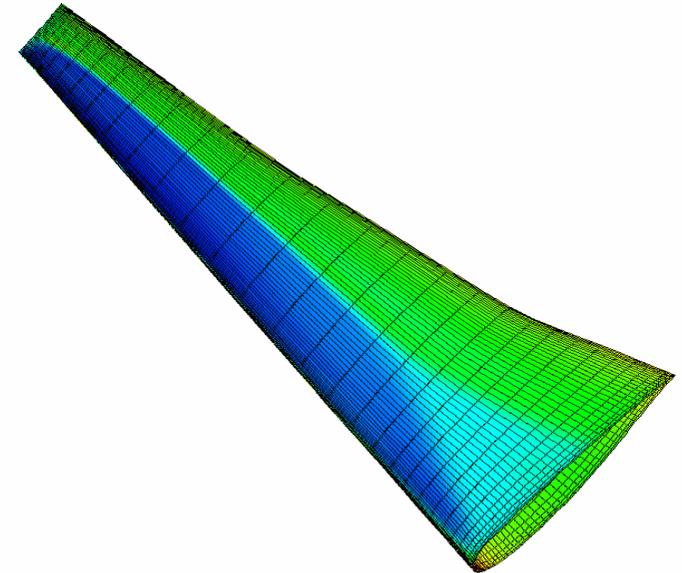
Ma=0.78  
alpha=2.83

Widerstandsreduktion  
bei konstantem Auftrieb

Unter Berücksichtigung  
der statischen Deformation



**NASTRAN**  
shell/beam model  
126 nodes



**FLOWer MAIN/ADJOINT**  
15 Entwurfsvariablen  
Ma=0.78  
alpha=2.83  
(300.000 cells)

**Aerodynamik,**  
z.B. Euler-Gln.:  $R_A = 0$

**Struktur:**

$$R_S = Ku - f = 0$$

- K:** Sym. Steifigkeitsmatrix
- f:** Aerodynamische Kraft
- u:** Verschiebevektor
- x:** Vektor d. Entwurfsvariablen

$\psi_A$  : Aero-Adjungierte

$\psi_S$  : Struktur-Adjungierte

~: verzögert ...

**Gradient:**

$$\frac{dC_D}{dx} = \frac{\partial C_D}{\partial x} + \frac{\partial C_D}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial C_D}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

**Adjungiertes Aero-Struktur System:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial R_A}{\partial w} \right)^T \psi_A &= \frac{\partial C_D}{\partial w} - \left( \frac{\partial R_S}{\partial w} \right)^T \tilde{\psi}_S \\ \left( \frac{\partial R_S}{\partial u} \right)^T \psi_S &= \frac{\partial C_D}{\partial u} - \left( \frac{\partial R_A}{\partial u} \right)^T \tilde{\psi}_A \end{aligned}$$

**Adjungierte Formulierung des Gradienten:**

$$\frac{dC_D}{dx} = \frac{\partial C_D}{\partial x} - \psi_A^T \frac{\partial R_A}{\partial x} - \psi_S^T \frac{\partial R_S}{\partial x}$$

$\frac{\partial R_A}{\partial u}, \frac{\partial R_A}{\partial x}$  : störe Geometrie mit  $u, x \rightarrow$  berechne Variation im CFD Residuum

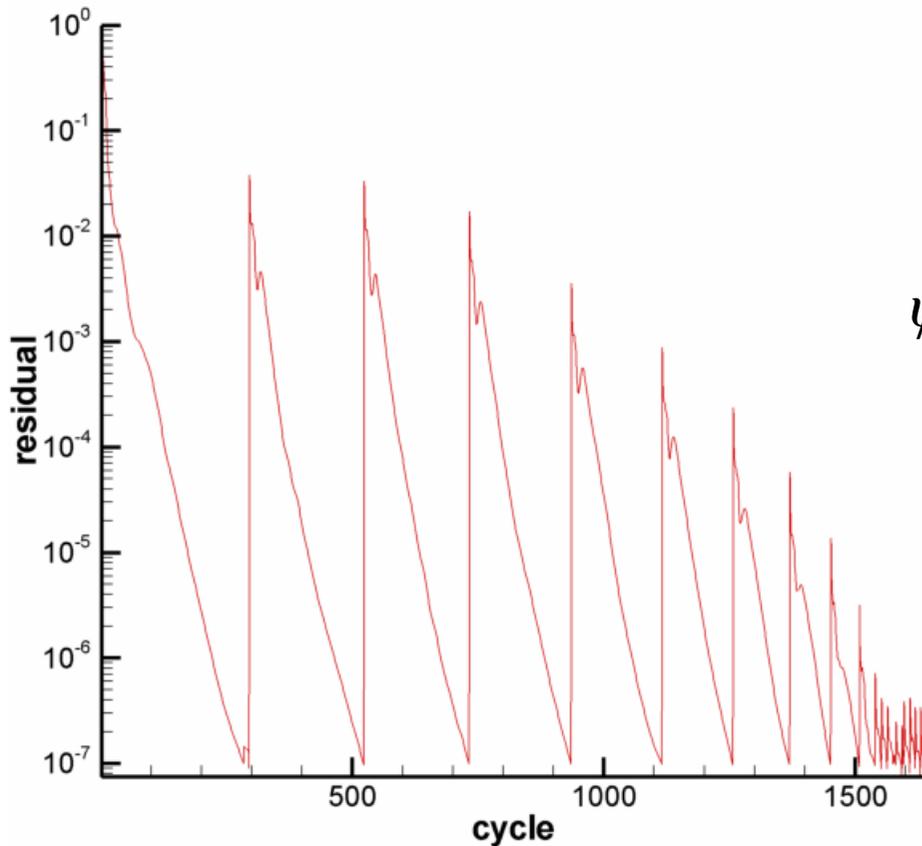
$\frac{\partial C_D}{\partial u}, \frac{\partial C_D}{\partial x}$  : störe Geometrie mit  $u, x \rightarrow$  berechne Variation im Widerstand

$\frac{\partial C_D}{\partial w}$  : handle  $\int_C \dots \frac{\partial p}{\partial w} (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) \dots \rightarrow$  Randbedingung

$\frac{\partial R_s}{\partial w} = \frac{\partial(Ku - f)}{\partial w} = -\frac{\partial f}{\partial w}$  : handle  $\int_C \dots \frac{\partial p}{\partial w} \dots \rightarrow$  Randbedingung

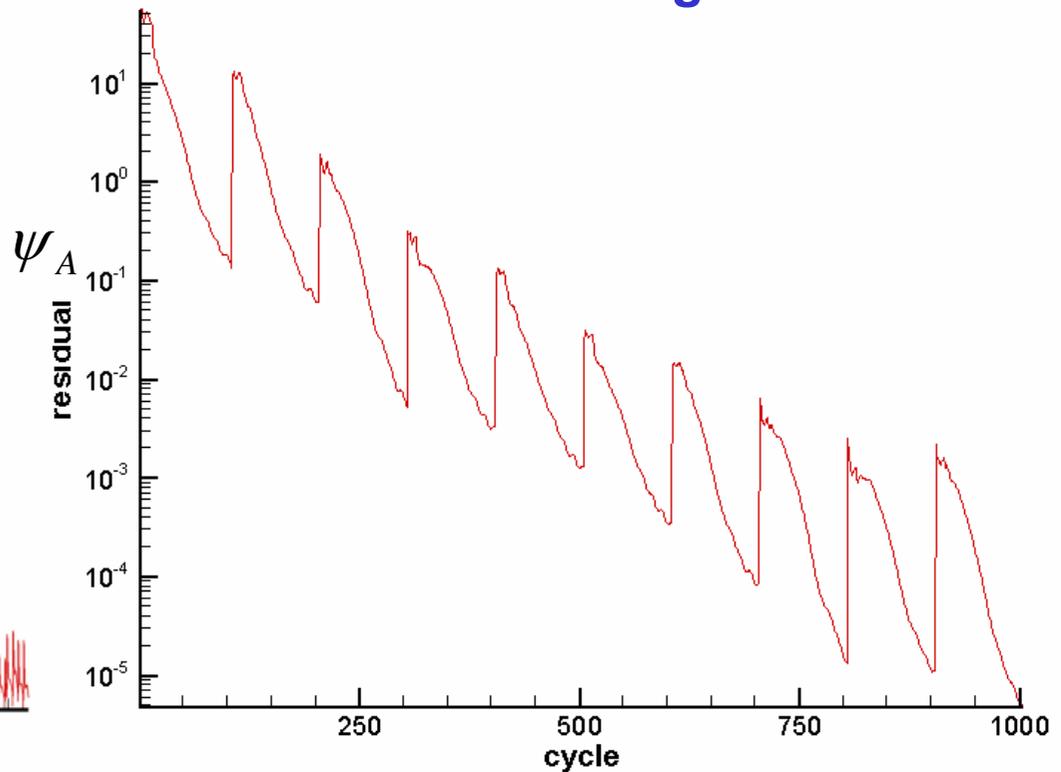
$\frac{\partial R_s}{\partial u} = \frac{\partial(Ku - f)}{\partial u} = K = K^T$

$\frac{\partial R_s}{\partial x} = \frac{\partial(Ku - f)}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial x} u - \frac{\partial f}{\partial x}$



**Finite Differenzen:**  
 Für jede Entwurfsvariable wird die Geometrie variiert und eine aero-elastische Rechnung bis zum stationären Zustand auskonvergiert

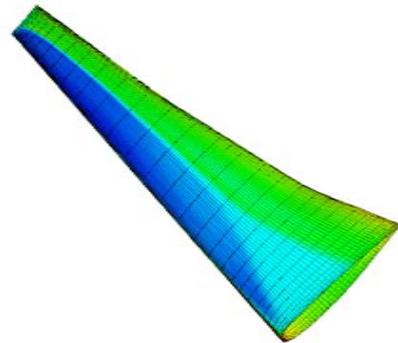
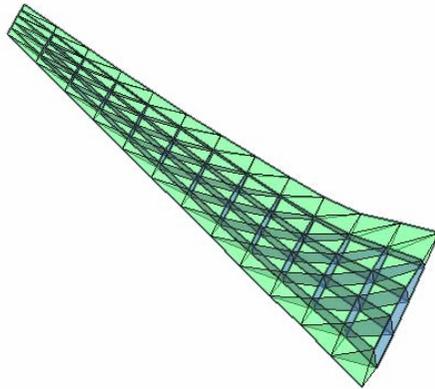
**AMP Flügel**



**Gekoppelte Aero-Struktur Adjungierte:**  
 Alle 100 Iterationen wird die verzögerte  $\tilde{\psi}_S$  aktualisiert

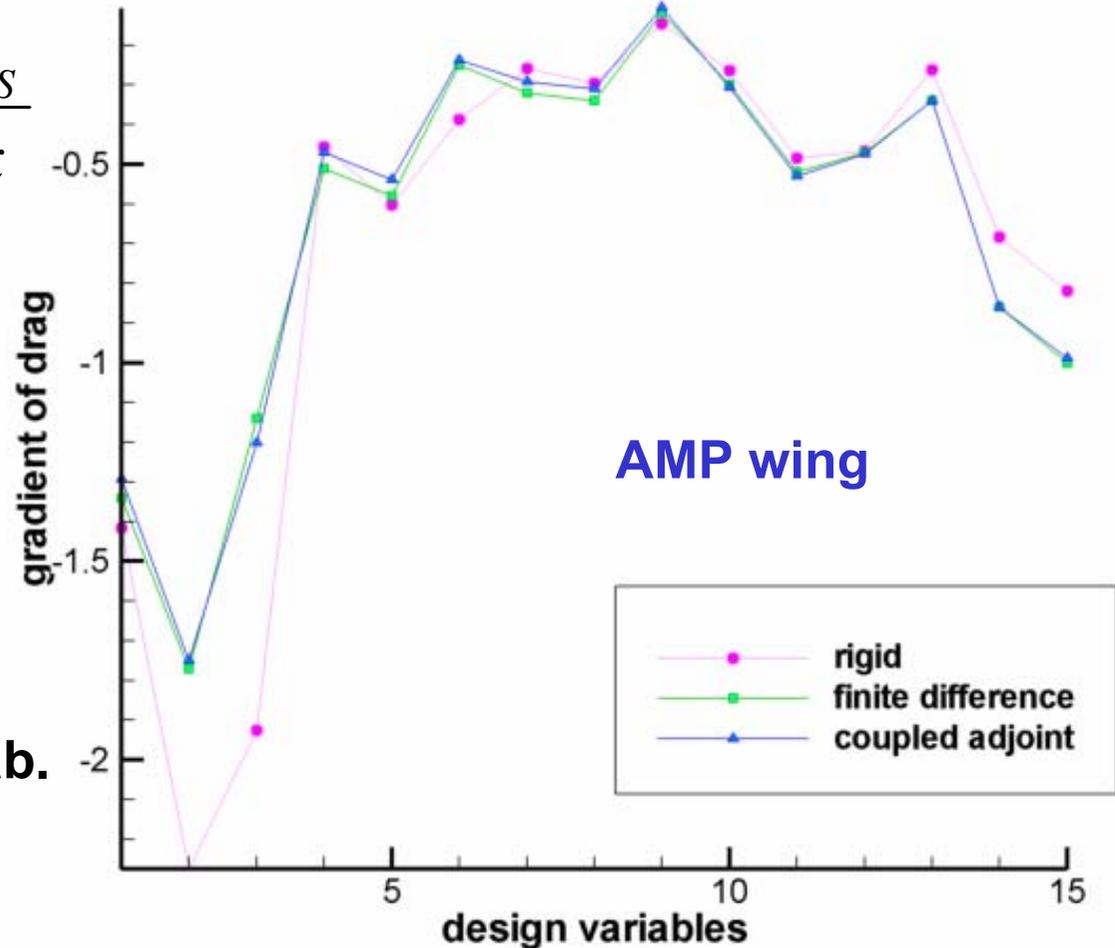
## Validierung der adjungierten Gradientenformulierung: **Widerstand**

$$\frac{dC_D}{dx} = \frac{\partial C_D}{\partial x} - \psi_A^T \frac{\partial R_A}{\partial x} - \psi_S^T \frac{\partial R_S}{\partial x}$$



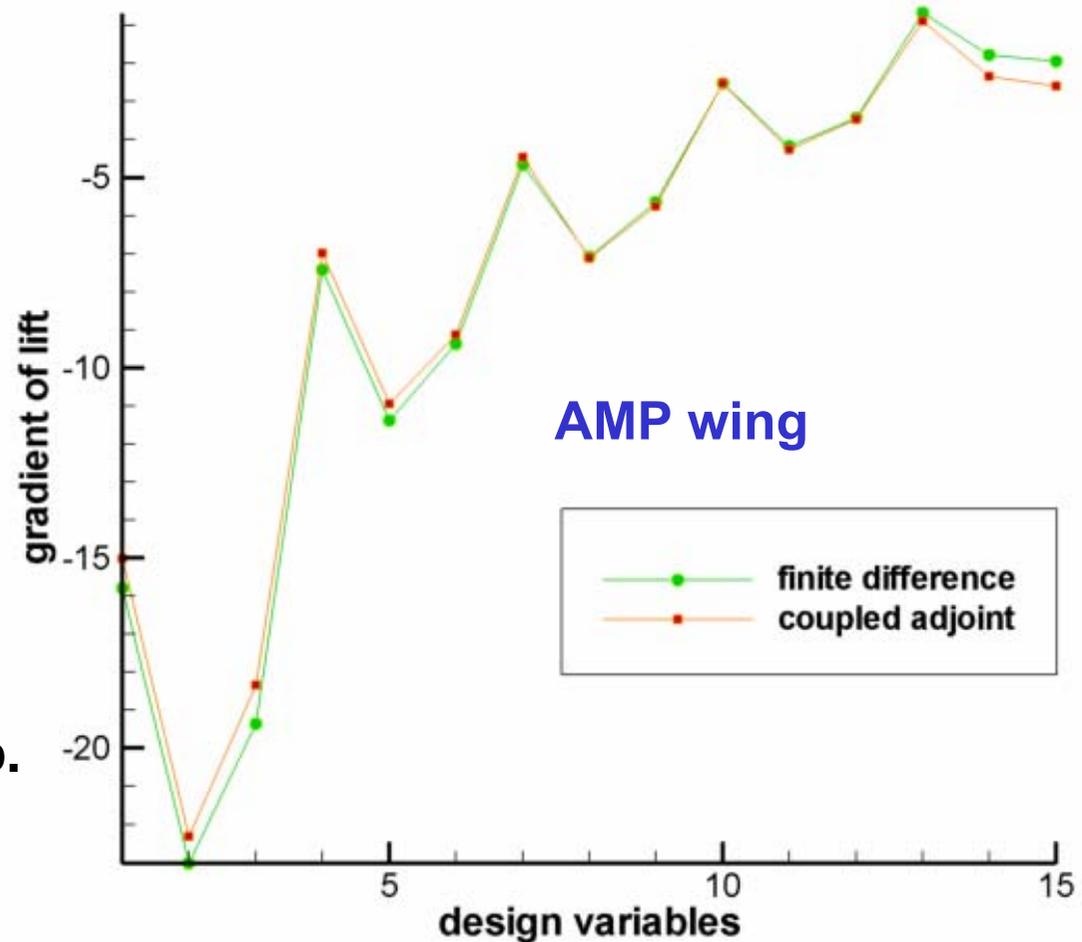
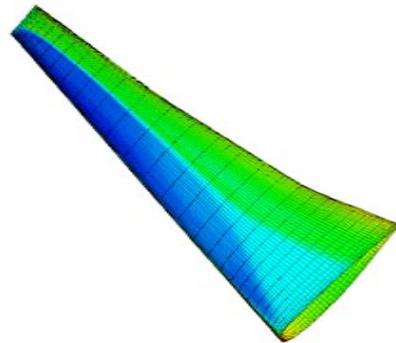
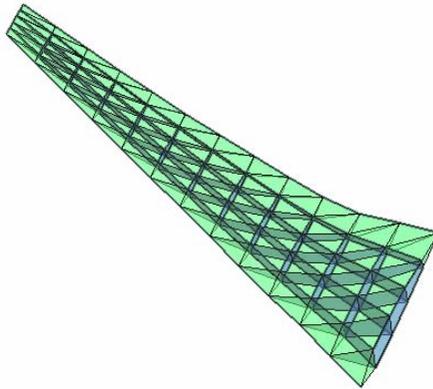
**NASTRAN**  
shell/beam model  
126 nodes

**15 Entwurfsvariab.**  
**Ma=0.78**  
**alpha=2.83**  
**(300.000 cells)**



## Validierung der adjungierten Gradientenformulierung: **Auftrieb**

$$\frac{dC_L}{dx} = \frac{\partial C_L}{\partial x} - \psi_A^T \frac{\partial R_A}{\partial x} - \psi_S^T \frac{\partial R_S}{\partial x}$$



**NASTRAN**  
shell/beam model  
126 nodes

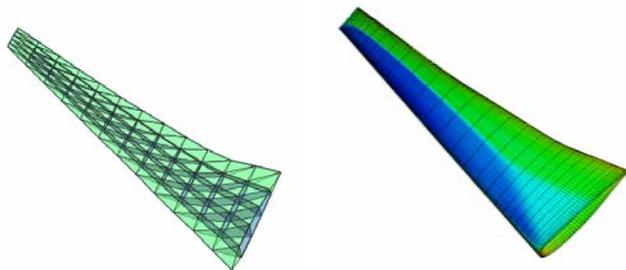
**15 Entwurfsvariab.**  
**Ma=0.78**  
**alpha=2.83**  
**(300.000 cells)**

## AMP Flügel

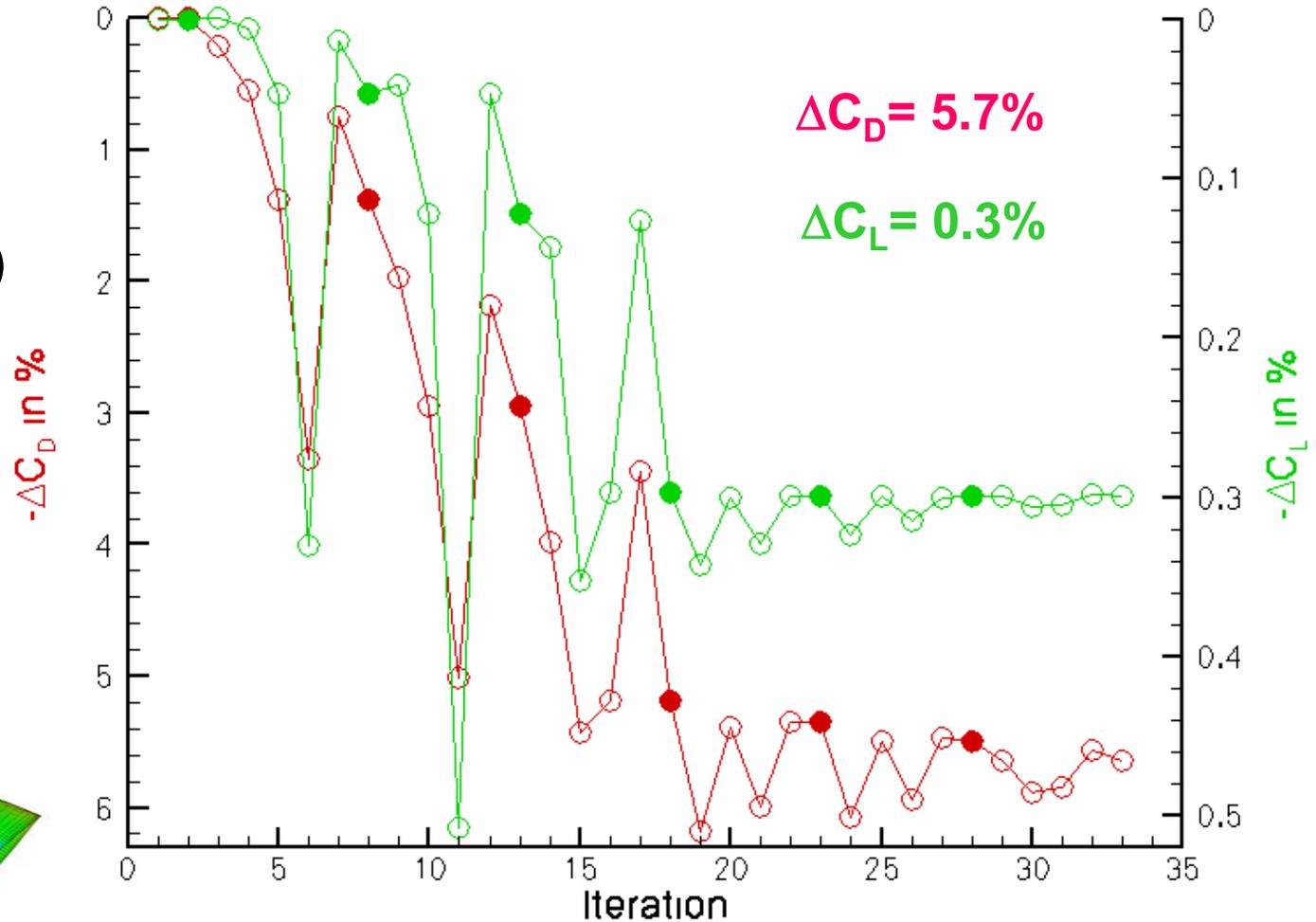
120 Entwurfsvariablen  
(shape bumping  
functions based on  
Bernstein polynomials)

Ma=0.78  
alpha=2.83

Widerstandsreduktion  
bei konst. Auftrieb



## Feasible Direction

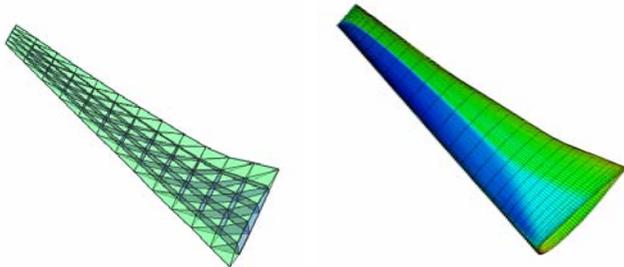


## AMP Flügel

120 Entwurfsvariablen  
(shape bumping  
functions based on  
Bernstein polynomials)

Ma=0.78  
alpha=2.83

Widerstandsreduktion  
bei konst. Auftrieb



Vergleich numerischer Aufwand:  
(PC Pentium IV, 2.6 GHz, 2GB RAM)

- Gekoppelte Adjungierte: 114 h
- Finite Differenzen: 1506 h

- Theorie adjungierter Operatoren (Funktionalanalysis)
- „Optimize then discretize“ or „Discretize then optimize“?
- Erlangen ähnlich robuster Adjungiertenverfahren für kompressible Navier-Stokes Gleichungen (RANS)
- Übertragung auf unstrukturierte Verfahren (z.B. DLR-TAU)
- Einsatz von AD Tools
- Piggy-Back (One Shot)
- Multikriterielles MDO (Paretofronten mit Adjungiertenverfahren)
- ... z.B. Reichweitenoptimierung
- ...

$$R \propto \frac{C_L}{C_D} \ln \frac{W_{initial}}{W_{final\_cruise}}$$