Übungsaufgaben[1] „Lineare Algebra und analytische Geometrie“

Serie 10 zum 10.1.02

1. Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft

$$\varphi(\varphi(\boldsymbol{x})) = 2\varphi(\boldsymbol{x}) - 3\boldsymbol{x} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in V.$$

Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen für φ an!

2. $\varphi : V \to V$ sei linearer Endomorphismus des K-Vektorraumes V mit der folgenden Eigenschaft: Jeder von $\mathbf{0}$ verschiedene Vektor aus V ist Eigenvektor von φ.

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von φ.

3. Bestimmen Sie die Normalform einer Präsentationsmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_2).$$

4. Es sei $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix. Beweisen Sie, daß es für jede Zahl $m \in \mathbb{Z}$ ein Polynom $f_m \in \mathbb{C}[X]$ gibt mit $\deg(f_m) \leq n-1$, so daß $A^m = f_m(A)$ ist.

5.* Wir fixieren einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

(1) φ sei ein nilpotenter Endomorphismus von V, sowie $(\boldsymbol{v}_{11}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1q})$ eine Basis von $\ker(\varphi)$. Zu jedem der Vektoren $\boldsymbol{v}_{1j}$ wird für $i = 1, 2, \ldots$ eine Kette von Vektoren $\boldsymbol{v}_{ij}$ gewählt, für die $\varphi(\boldsymbol{v}_{i+1\,j}) = \boldsymbol{v}_{ij}$ ist (dies entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems, wenn φ durch eine Matrix beschrieben wird).

Zeigen Sie, daß $(\boldsymbol{v}_{1j}, \ldots, \boldsymbol{v}_{ij})$ ein linear unabhängiges System ist und das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht.

Überdies ist die Familie aller so aufgefundenen Vektoren $\boldsymbol{v}_{ij}$ linear unabhängig.

[1] Mit * markierte Aufgaben sind fakultativ. Diese Aufgaben und Informationen zum Inhalt der Vorlesung finden Sie unter der folgenden URL.

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~in2math/software/LinAlg.html

(2) Wenn die unter (1) gefundene linear unabhängige Familie $(\boldsymbol{v}_{ij})_{i,j}$ aus $\dim(V)$ Vektoren besteht, d.h. eine Basis $\mathcal{B}$ von V bildet, so erhalten wir (bei geeigneter Anordnung der Vektoren) als zugehörige Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die Jordansche Normalform.

(3) Zeigen Sie, daß die Jordansche Normalform eines nilpotenten Endomorphismus nicht immer so gefunden werden kann.

(4) Erläutern Sie, wie sich aus dem Verfahren (1) im folgenden Spezialfall dennoch eine Methode ergibt, die Jordansche Normalform eines Endomorphismus zu bestimmen: Das charakteristische Polynom zerfällt in (bekannte) Linearfaktoren, und sämtliche Eigenwerte haben die geometrische Multiplizität 1.