Lösungen Blatt 2 metrische Geometrie

A1 (a) z.z. jede Cauchy-Folge in $X = X_1 \times X_2$ konvergiert genau dann, wenn jede Cauchy-Folge in X_i $i=1,2$ konvergiert.

Beweis: Sei $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ Folge in X, d.h. $x^m = (x_1^m, x_2^m)$ $\forall m$

Der Abstand zw. x^m und einem $x = (x_1, x_2) \in X$ ist geg durch

$$d(x^m, x) = \sqrt{d(x_1^m, x_1)^2 + d(x_2^m, x_2)^2}$$

Es ist also $d(x^m, x) < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} =: \varepsilon'$

g.d.w. $d(x_1^m, x_1)$ und $d(x_2^m, x_2) < \varepsilon$ $\forall m \geq n_0$.

Also konvergiert x^m gegen $x_0 := (x_1^0, x_2^0)$ wenn $x_1^m \to x_1^0$ und $x_2^m \to x_2^0$.

A1 (b) z.z. X Längenraum gdw X_i Längenr. $i=1,2$

Beweis:

Def. Ein metr. Raum (X, d) ist ein Längenraum (bzw d eine Längenmetrik), wenn gilt:

$$d(x,y) = \inf_{\substack{\gamma : x \rightsquigarrow y \\ \text{rektif. Kurve}}} \ell(\gamma) \qquad \forall x,y \in X.$$

Um die Beh. z.z. betr. zunächst

„⇒" X Längenraum.

- Die Projektion $X \xrightarrow{\pi_i} X_i$ ist Abstands-reduzierend (nach Def der Metrik) für $i=1,2$
und $\pi_1 : X_1 \times \{x_2\} \longrightarrow X_1$ bzw.
$\pi_2 : \{x_1\} \times X_2 \longrightarrow X_2$ sind Isometrien. $\forall x_i \in X_i$

Damit gilt leicht die Beh.

„⇐" Seien $\overset{=:x}{(x_1,x_2)}$ und $\overset{=:y}{(y_1,y_2)}$ in X gegeben.

Sei $\varepsilon > 0$ und $c_i : [0,1] \to X_i$ Pfade von $x_i \rightsquigarrow y_i$,
so, dass gilt: $l(c_i)^2 < d(x_i, y_i)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}$
und c_i ist nach Bogenlänge parametrisiert.

Setze $c(t) := (c_1(t), c_2(t))$. Es ist $c : x \rightsquigarrow y$ in X.

Man kann zeigen:

$$l(c) = \sup_{n>0} \sum_{i=0}^{n-1} d\left(c\left(\tfrac{i}{n}\right), c\left(\tfrac{i+1}{n}\right)\right).$$

Nach Vor. sind c_i nach Bogenlänge parametrisiert.
Somit können wir berechnen:

$$\begin{aligned}
& n^2 \cdot d\left(c\left(\tfrac{i}{n}\right), c\left(\tfrac{i+1}{n}\right)\right)^2 \\
&= n^2 d\left(c_1\left(\tfrac{i}{n}\right), c_1\left(\tfrac{i+1}{n}\right)\right)^2 + n^2 d\left(c_2\left(\tfrac{i}{n}\right), c_2\left(\tfrac{i+1}{n}\right)\right)^2 \\
&\leq l(c_1)^2 + l(c_2)^2 \\
&\overset{X_i \text{ Längenr.}}{<} d(x_1,y_1)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + d(x_2,y_2)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \\
&= d(x,y)^2 + \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Es ist also:

$$n \cdot d(c(\tfrac{i}{n}), c(\tfrac{i+1}{n})) < d(x,y) + \varepsilon$$

für alle $n > i \geq 0$.

$\Rightarrow$ $l(c) < d(x,y) + \varepsilon$. $\Rightarrow$ X ist Längenraum.

<u>A1 (c) und (d)</u>: (d) <u>z.z.</u> $c = (c_1, c_2)$ in X ist linear reparam. Geod. $\Leftrightarrow$ c_i ist l. rep. Geod in X_i für $i = 1,2$.

bzw in (c) X geod. $\Leftrightarrow$ X_i geod. für $i = 1,2$.

$\uparrow$ folgt aus (d)!

<u>Bew. (d)</u>: „$\Leftarrow$" Nachrechnen mit Def Metrik

„$\Rightarrow$" zu schwer $\rightarrow$ vergl. <u>BH Prop. 5.3</u>

(S. 56/57 BH ausdrucken)

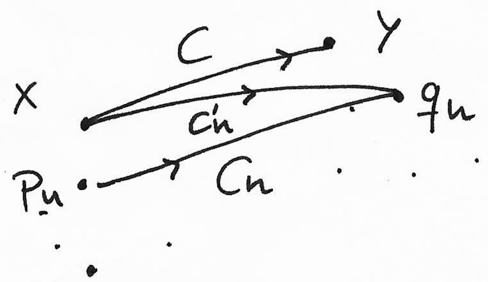
Ab Beh. (X,d) CAT(K) dann hängen die für $d(x,y) < D_K$ eindeutig existierenden geod. Segmente stetig von den Endpunkten ab.

Beweis

Seien p_n und q_n Folgen von Punkten, die nach x bzw y konvergieren.

Ann: $d(p_n,x)$ und $d(q_n,y) < l < D_K$.

Seien $c: x \rightsquigarrow y$, $c_n: p_n \rightsquigarrow q_n$, $c_n': x \rightsquigarrow q_n$ mit $c, c_n, c_n': [0,1] \to X$ lineare Reparam. der eind. Geodätischen. ($\exists$ weil CAT(0))



Mit ~~CAT(K)~~ $\triangle$-Ungleichung erhalten wir

$$d(c(t), c_n(t)) \le d(c(t), c_n'(t)) + d(c_n'(t), c_n(t)) \le C \cdot d(y, q_n), d(x, p_n))$$

aus Hilfe.

$\Rightarrow$ c_n konvergiert uniform gegen c und daher auch seine Endpkte gegen x,y.

$\square$

A3

a) X vollst. mit Mittelpkten $\overset{z.z.}{\Rightarrow}$ X geodätisch.
√(Buch: Alexandrov geometry)

Beweis: Seien $x,y \in X$ z.z. $\exists$ geodätische von x nach y.
Wir konstruieren eine solche:
Setze $c(0) := x$, $c(1) = y$.
Setze $c(\frac{1}{2}) :=$ Mittelpkt von x und y.
$c(\frac{1}{4})$ und $c(\frac{3}{4})$ sind Mittelpkte von $c(0), c(\frac{1}{2})$ bzw von $c(\frac{1}{2}), c(1) = y$.
⇝ Setze dieses Verfahren rekursiv fort:

$$\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right) := \text{Mittelpkt von } \alpha\left(\frac{k-1}{2^n}\right), \alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$$

$$\forall \text{ ungeraden } k \text{ mit } 0 < \frac{k}{2^n} < 1.$$

⇝ ~~[illegible]~~ $\alpha : W \to X$ wobei $W \subset [0,1]$
↑ dyadische rationale Zahlen (nach Konstruktion).

$\forall t \in [0,1]$ betrachte Folge $(t_n) \to t$ $(n \to \infty)$.
Weil X vollständig ist konvergiert $\alpha(t_n) \to x_0 =: \alpha(t)$.

- $\alpha(t)$ hängt nicht von der Wahl von (t_n) ab. ~~und nicht von~~
- $\alpha : [0,1] \to X$ ist Pfad von x nach y

Bleibt z.z. $l(\alpha) = d(x,y)$.
⇝ Das gilt mit Δ-Ungl, weil α über Mittelpkte konstruiert wurde!

$\square$

A3b) <u>Beweis:</u> Sei Y metr. Raum CAT(0) und X seine Vervollständigung.

CAT(0)-Räume sind geodätisch, daher existieren $\forall x', y'$ in Y Mittelpunkte.

Seien $x, y \in X$. Dann gibt es Cauchy-Folgen $(x_n)_n, (y_n)_n$ in Y mit $x_n \to x$, $y_n \to y$.

Jedes Paar x_n, y_n besitzt einen Mittelpunkt z_n.

Weil die Metrik konvex ist in Y (weil CAT(0)) folgt $(z_n)_n$ ist Cauchy-Folge.

$\Rightarrow (z_n)$ konvergiert gegen ein $z \in X$.

$\overset{\text{A3a)}}{\Rightarrow}$ X ist geodätisch.

$\square$

A4: (Kramer A4.2)

a) Ann. V ist prä-Hilbert

$b: V\times V \to \mathbb{R}$ ist symm., pos. def. Bilinearform mit $b(v,v) = \|v\|^2$.

Dann ist

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = b(u+v,u+v) + b(u-v,u-v)$$

$$= b(u,u) + \cancel{2b(u,v)} + b(v,v) + b(u,u) - \cancel{2b(u,v)} + b(v,v)$$

$$= 2(b(u,u)+b(v,v)) = (\|u\|^2+\|v\|^2)\cdot 2$$

$\Rightarrow$ ~~Beh~~.

b) Gelte umgekehrt die Gleichung setze

$$b(u,v) := \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$$

Symm., pos-definit

berechne:

- $b(u+v,w) + b(u-v,w)$

$$= \frac{1}{2}(\|u+v+w\|^2 + \|u-v+w\|^2 - \|u+v-w\|^2 + \|u-v-w\|^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\|u+w\|^2 + \|v\|^2 - \|u-w\|^2 - \|v\|^2)$$

$$= 2b(u,w).$$

- $b(u+v,w) - b(u-v,w) = \frac{1}{\cancel{4}}(\dots)$ umformen wie oben

$$= b(v,w)$$

$\Rightarrow b(u+v,w) = b(u,w) + b(v,w)$.

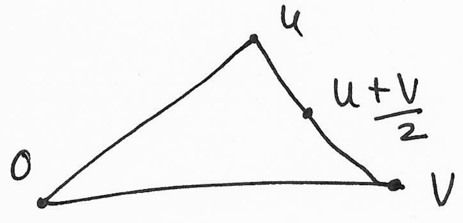
und

$b(-u,v) = -b(u,v)$.

b.w.

A4b) Sind u, v linear abhängig, dann ist klar, dass gilt: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Ann V ist CAT(0).
Seien u, v linear unabhg.
Betrachte Dreieck $0, u, v$:



Parallelgl. in $\mathbb{E}^2$

$$\underbrace{\|u+v\|^2}_{d(0,\frac{u+v}{2})} \leq 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) - \|u-v\|^2$$

$\leq 2\|u+v\|_2^2 = 2(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2) - 2\|u-v\|_2^2$ = wegen Δ

wegen CAT(0) Eigenschaft und der Tatsache, dass in $\mathbb{E}^2$ die Parallelogramm-gleichung gilt.

Ersetze v durch $-v$ $\rightsquigarrow$ Gleichheit!

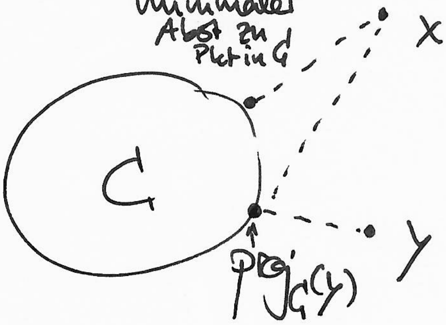
$\Rightarrow$ V ist prä-Hilbert-Raum.

„$\Leftarrow$" klar nach ~~Def~~
bzw leicht nachzurechnen mit Parallelogrammgleichg

A5 a) <u>Beweis</u>:

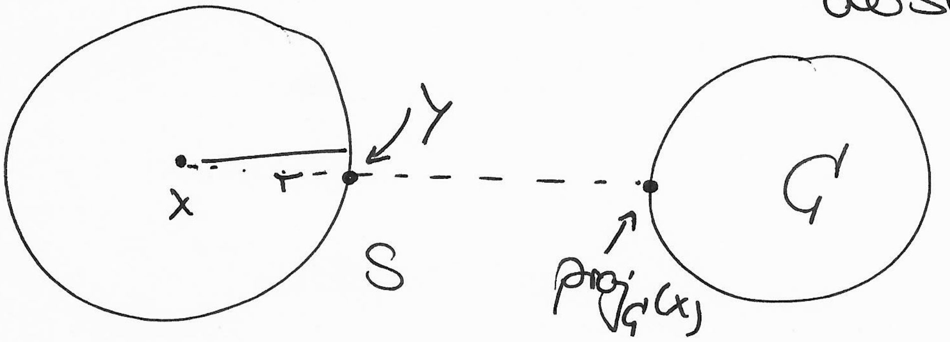
$$d_G(x) \underset{\substack{\text{weil } d_G(x) \\ \text{minimaler} \\ \text{Abst zu} \\ \text{Pkt in } G}}{\le} d(x, \underbrace{\mathrm{proj}_G(y)}_{\in G}) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} d(x,y) + d(y, \mathrm{proj}_G(y))$$

$$= d(x,y) + d_G(y)$$



$\Rightarrow$ Beh.

b) <u>Beweis</u>: Sei y der Punkt auf der Strecke ~~für den gilt~~ von x nach $\mathrm{proj}_{G'}(x) \in G'$, für den gilt: $d(x,y) = r$.



Dann gilt: $d_{G'}(x) = d_{G'}(y) + r$. (was zu zeigen)

weil y auf der Geod. von x nach G' liegt.

für Eindeutigkeit:

Sei y' gegeben mit $d(x,y') = r$ und

zweites Pkt

$$d_{G'}(y') \le d_{G'}(y), \qquad (*)$$

dann gilt:

$$d(x, \mathrm{proj}_{G'}(y')) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} d(x,y') + \overbrace{d(y', \mathrm{proj}_{G'}(y'))}^{= d_{G'}(y')}$$

$$\underset{\text{Ann } (*)}{\le} r + d_{G'}(y) = d(x, \mathrm{proj}_{G'}(x)) = d_{G'}(x).$$

$\Rightarrow \mathrm{proj}_{G'}(y') = \mathrm{proj}_{G'}(x)$ und $y' = y$.

Eindeutigkeit $\square$

A 6a)

Sei (x_n) Folge von Fixpunkten einer einzelnen Isometrie g.
Der GW muß Fixpkt. von g sein, da die Wirkg stetig ist.

Als Schnitt von Fixpunktmenengen $Fix(g)$ muss X^G abgeschl. sein.

6b) Eine Isometrie g erhält die Geodätische zwischen zwei Fixpkten weil diese in einem CAT(0) Raum eindeutig ist.
$\Rightarrow$ $\gamma : a \to b$ ist Fixpktmenge für g wenn a, b fix sind.
$\Rightarrow$ $Fix(g)$ ist konvex.
Weil Schnitte konvexer Mengen konvex sind ist X^G auch konvex.