Lineare Algebra I (NAWI) **WS2023/2024** **Übungsblatt №08**
10.01.2024

Aufgabe 51. Sei $U = \mathcal{L}(\{(1,0,0,1),(-1,1,-1,1)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$. Bestimme alle Komplementärräume W, die von Vektoren der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3, e_4 aufgespannt werden.

Aufgabe 52. Wir betrachten die folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\\-7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\-4\\14\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\4\end{bmatrix}\right\}\right), \quad W = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{matrix}3\,x_1 - 5\,x_2 + 2\,x_4 = 0\\ -x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 = 0\end{matrix}\right\}.$$

Berechne Basen B_U, B_W, $B_{U\cap W}$ und B_{U+W} der Räume U, W, $U \cap W$, $U + W$, sodaß die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$\begin{tikzcd} & B_U \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\ B_{U\cap W} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & B_{U+W} \\ & B_W \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & \end{tikzcd}$$

und stelle fest, in welchen dieser Räume der Vektor $\begin{bmatrix}0, -1, 0, -4\end{bmatrix}$ enthalten ist.

Aufgabe 53. Gib drei Untervektorräume U, V und W des $\mathbb{R}^3$ an, sodaß zwar $U \cap V = \{0\}$, $V \cap W = \{0\}$ und $U \cap W = \{0\}$ und $U + V + W = \mathbb{R}^3$, die Summe aber nicht direkt ist.

Aufgabe 54. Sei V ein Vektorraum und $U_i \subseteq V$ Unterräume.

(a) Zeige:

$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$$

(b) Gib ein Beispiel, in dem Gleichheit nicht gilt.

(c) Zeige: Wenn U_2 in U_1 enthalten ist, dann gilt Gleichheit.

Aufgabe 55. Seien V ein Vektorraum der Dimension n und U, $W \subseteq V$ zwei Unterräume der Dimension k.

(a) Überlege anhand des Dimensionssatzes, welche Dimensionen die Unterräume $U + W$ und $U \cap W$ annehmen können.

(b) Stelle fest, welche aus diesen Möglichkeiten tatsächlich auftreten:
  (a) $n = 7$, $k = 4$.
  (b) $n = 6$, $k = 3$.

Aufgabe 56. Sei V ein Vektorraum der Dimension n and seien U und W zwei verschiedene Unterräume der Dimension $n - 1$. Zeige, daß $\dim(U \cap W) = n - 2$.

Aufgabe 57. Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ betrachten wir den Unterraum

$$U = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$$

(a) Bestimme eine Basis für den Faktorraum $V_{/U}$.

(b) Bestimme ein Repräsentantensystem S für den Faktorraum $V_{/U}$, das zugleich ein Unterraum von V ist.

(c) Welche der folgenden Abbildungen von $V_{/U}$ nach $\mathbb{R}$ sind wohldefiniert (d.h., die rechte Seite hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab)?

$$f([x]_U) = x_1 + x_2 + x_3$$
$$g([x]_U) = x_1 - x_2 - x_3$$