Übungen zu **Stochastische Prozesse**

Prof. Wolfgang Woess, WS 2020/21

11.) [3 Punkte] Seien $(\mathcal{X}, P)$ der höchstens abzählbare Zustandsraum und die Übergangsmatrix einer irreduziblen Markovkette, und sei d die Periode. Wir wählen Elemente $x_0\,, x_1\,, \dots, x_{d-1} \in \mathcal{X}$ so dass $p(x_{i-1}\,, x_i) > 0$ für $i = 1, \dots, d-1$. Sei C_i die irreduzible Klasse von x_i *bezüglich der Matrixpotenz* P^d. Zeigen Sie:

- Die C_i bilden eine Partition von $\mathcal{X}$.
- Jedes C_i ist bezüglich P^d eine essentielle Klasse.
- Die C_i werden von der ursprünglichen Markovkette zyklisch durchlaufen: wenn $x \in C_i$ und $p(x, y) > 0$ dann ist $y \in C_{i+1 \mod d}$.
- P^d ist auf jedem C_i aperiodisch.

12.) [3 Punkte] Fortsetzung von Bsp. 11. Wir nehmen an, dass die Markovkette positiv rekurrent ist. Sei ν ihr stationäres Wahrscheinlichkeitsmaß, und sei ν_i seine Einschränkung auf C_i.

- Wie hängen ν_i und $\nu_{i+1 \mod d}$ zusammen ?
- Bestimmen Sie $\nu(C_i)$.
- Wie sieht das asymptotische Verhalten von $p^n(x, y)$ für $n \to \infty$ aus, wenn $x, y \in C_i$?

13.) Seien $(\mathcal{X}, P)$ der Zustandsraum und die Übergangsmatrix einer Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$, und $\mathcal{X} = \biguplus_{i\in I} \mathcal{X}_i$ eine Partition von $\mathcal{X}$, mit der natürlichen Projektion $\pi : \mathcal{X} \to I$.

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie: wenn

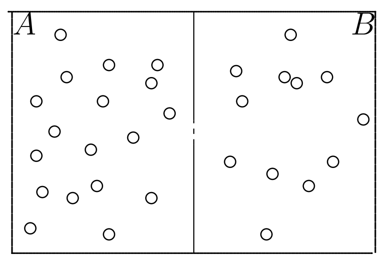
$$\bar{p}(i, j) = \sum_{y\in\mathcal{X}_j} p(x, y)$$

von der Wahl von $x \in \mathcal{X}_i$ unabhängig ist, so ist $\bar{X}_n = \pi(X_n)$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix $\bar{P}$.

(b) [2 Punkte] Wenn P eine stationäre Verteilung ν hat, verwenden Sie diese, um eine stationäre Verteilung von $\bar{P}$ zu finden.

14.) (a) [1 Punkt] Der Hypercubus der Dimension N ist der Graph mit Knotenmenge $\{0,1\}^N$ und (ungerichteten) Kanten zwischen jenen Knoten, die sich in genau einer Koordinate unterscheiden. Die einfache Irrfahrt auf dem Hyperkubus ist die Markovkette mit Übergangswahrscheinlichkeiten $1/N$ zwischen benachbarten Knoten. Bestimmen Sie die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Irrfahrt.

(b) [2 Punkte] **Das Ehrenfest-Modell (1911)** Ein Behälter enthält N Moleküle. Weiters ist er durch einen "Wand" mit einer kleinen Membran in zwei Hälften (Seiten) A und B geteilt (siehe Skizze). Zu jedem der aufeinanderfolgenden Zeitpunkte passiert ein zufällig (gleich wahrscheinlich) unter allen N ausgewähltes Molekül die Membran in die andere Hälfte des Behälters.



Unsere Markovkette X_n beschreibt die zufällige Anzahl der Moleküle im Teil A zum Zeitpunkt n. Beschreiben Sie den Zustandsraum und die Übergangswahrscheinlichkeiten. Kombinieren Sie (a) mit Beispiel 13, um die stationäre Verteilung zu finden.

[Hinweis: stellen Sie sich vor, dass die Moleküle die Nummern $1, 2, \ldots, N$ tragen, und verfolgen Sie die Moleküle in Teil $A \equiv$ label 0, bzw. Teil $B \equiv$ label 1.]

15.) [3 Punkte] (Zum Teilkapitel "Random walk auf $\mathbb{R}$") Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter reeller Zufallsvariablen und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Zeigen Sie: für $h > 0$ und $M \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}[|S_n| < h \text{ für mindestens } M \text{ Zeitpunkte } n] \geq \mathbb{P}[\exists\, n : |S_n| < h/M]^M .$$