13 Übungsblatt für 23. Juni

Aufgabe 51. (a) Seien $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Linearformen auf einem linearen Raum X (ohne Topologie). Zeigen Sie, dass

$$\varphi_0 \in \operatorname{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n$$

äquivalent zu

$$\ker \varphi_0 \supseteq \bigcap_{j=1}^n \ker \varphi_j$$

ist.

(b) Sei X ein Banachraum, X^* sein Dualraum und ω^* die Schwach*-Topologie. Zeigen Sie, dass der Raum aller ω^*-stetigen linearen Funktionale auf (X^*, ω^*) gleich X ist.

Hinweis: $\iota(X) \subseteq X^{**}$ wissen wir bereits.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik d gibt, sodass die Kugeln $\{B_d(x, r) \mid x \in X \wedge r > 0\}$ eine Basis für die Topologie τ bilden.

Aufgabe 52. Sei X ein Banachraum, ω die schwache Topologie und η die von ihr auf der Einheitskugel $B_X(0, 1)$ induzierte Topologie.

(a) Zeigen Sie, dass (B_X, η) metrisierbar ist, wenn X^* separabel ist.

(b) Zeigen Sie, dass (X, ω) für einen unendlich-dimensionalen Banachraum X nicht metrisierbar ist.

Aufgabe 53. Sei Γ eine überabzählbare Menge. Zeigen Sie, dass die schwache Topologie auf der Einheitskugel von $\ell^2(\Gamma)$ nicht metrisierbar ist.