Übung 1 (3 pt)

Sei

$$M = \{x \in \mathbb{R} | \ x = \frac{m}{2^n}, \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie:
(a) Weder M noch M^c ist offen;
(b) Falls $A \subset \mathbb{R}$ offen und $A \subset M$ dann ist $A = \emptyset$.
(c) $M^o = \emptyset$ und $\overline{M} = \mathbb{R}$.

Übung 2 (3 pt)

Sei (X, T) ein topologischer Raum und $A \subset X$ kompakt. Sei $x \in X \setminus A$. Zeigen Sie, dass es offene Mengen U, V gibt, sodass $x \in U, A \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Übung 3 (2 pt)

Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) zwei topologische Räume. Zeigen Sie:
$f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ ist stetig genau dann, wenn $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Übung 4 (je 2 pt)

(a) Seien X eine Menge und $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : \ |A^c| < \infty\}$. Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{A})$ ein topologischer Raum ist.
(b) Seien Y eine überabzählbare Menge und $\mathcal{B} = \{A \subseteq Y : \ A^c \text{ abzählbar } \}$. Zeigen Sie, dass $(Y, \mathcal{B})$ ein topologischer Raum ist.

Übung 5 (3 pt)

Bestimmen Sie alle kompakten Mengen der topologischen Räume aus Beispiel 4.

Übung 6 (3 pt)

Zeigen Sie, dass der topologische Raum $(X, \mathcal{A})$ des Beispiels 4a die folgende Eigenschaft hat: Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es eine Umgebung U von x, sodass $y \notin U$. Ist $(X, \mathcal{A})$ Hausdorff? Können Sie die konvergenten Folgen von $(X, \mathcal{A})$ beschreiben?