Aufgabe 22. Bestimme alle Unterräume des Vektorraums $(\mathbb{Z}_2)^2$.

Aufgabe 23. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, $v \in V$, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $L = v + U$ eine lineare Mannigfaltigkeit. Zeige, daß für alle Vektoren $w \in V$ gilt:

$$w \in L \iff L = w + U.$$

Aufgabe 24. Bestimme im $\mathbb{R}^2$ die linearen Hüllen der Mengen

$$(a) \quad \{(1,0)\} \qquad (b) \quad \{(1+t,t) : t \in \mathbb{R}\} \qquad (c) \quad \{(0,t) : t \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 25. Drücke den Vektor $(2,1,0) \in (\mathbb{Z}_5)^3$ als Linearkombination der Vektoren $a = (1,1,0)$, $b = (0,1,3)$ und $c = (3,0,3)$ aus.

Aufgabe 26. Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

(a) im $\mathbb{R}^4$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) im $(\mathbb{Z}_5)^4$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 27. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $a, b, c \in V$ drei linear unabhängige Vektoren. Untersuche, ob die Mengen

$$\{a+b, b+c, c+a\}, \{a-b, c-b, c-a\}, \{a, a-b, a+b-c\}$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 27* (Fleißaufgabe)
Wie sieht es aus, wenn V ein Vektorraum über (a) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ (b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ ist?