Aufgabe 45. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ und seien $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ Vektoren mit eindeutigen Darstellungen $v_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} b_j$.
Zeige: $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ ist linear unabhängig genau dann, wenn die Familie der Koordinatenvektoren

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \dots \\ \lambda_{1n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \dots \\ \lambda_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \lambda_{k1} \\ \lambda_{k2} \\ \dots \\ \lambda_{kn} \end{bmatrix}$$

linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$ ist.

Aufgabe 46. Sei $M = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem eines Vektorraums V. Zeige: M ist eine Basis von V genau dann, wenn *mindestens* ein Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n$ hat.

Aufgabe 47. Wir betrachten die folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}\right), \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{matrix} 3\,x_1 - 5\,x_2 + 2\,x_4 = 0 \\ -x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Berechne Basen B_U, B_W, $B_{U\cap W}$ und B_{U+W} der Räume U, W, $U \cap W$, $U + W$, sodaß die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & B_U \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & \\ B_{U\cap W} \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & B_{U+W} \\ & B_W \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & \end{tikzcd}$$

und stelle fest, in welchen dieser Räume der Vektor $\begin{bmatrix} 0, -1, 0, -4 \end{bmatrix}$ enthalten ist.

Aufgabe 48. Sei V ein Vektorraum und $U_i \subseteq V$ Unterräume.

(a) Zeige:
$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$$
(b) Gib ein Beispiel, in dem Gleichheit nicht gilt.
(c) Zeige: Wenn U_2 in U_1 enthalten ist, dann gilt Gleichheit.

Aufgabe 49. Zeige anhand eines Beispiels im $\mathbb{R}^3$:
Die Aussage
$$U = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} U_3$$
ist *nicht* äquivalent zur Aussage
$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad \wedge \quad U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$$

Aufgabe 50. Sei V ein Vektorraum der Dimension n and seien U und W zwei verschiedene Unterräume der Dimension $n-1$. Zeige, daß $\dim(U \cap W) = n - 2$.