Übung 1.
Seien $A_1, A_2, \dots, A_k$ quadratische $n \times n$-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeige, daß das Produkt $A_1 A_2 \dots A_k$ invertierbar ist genau dann, wenn alle A_i invertierbar sind.

Übung 2.
Bestimme die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & -1 \\ -6 & -6 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Übung 3.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ -9 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine Permutationsmatrix P und Dreiecksmatrizen L, R sodaß $P \cdot A = L \cdot R$.

Übung 4.
(a) Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ und u, v Spaltenvektoren (d.h. $n \times 1$-Matrizen), sodaß gilt $\sigma = 1 + v^t A^{-1} u \neq 0$. Zeige, daß $(A + uv^t)$ invertierbar ist und daß

$$(A + uv^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} u v^t A^{-1}.$$

(b) Wende die Formel an, um die Inversen der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Übung 5.
(a) Zeige, daß die $n \times n$ oberen Dreiecksmatrizen, das sind die Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ & * & * & \dots & * \\ & & * & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & * \end{pmatrix},$$

eine Teilalgebra der $n \times n$-Matrizen bilden.

(b) Zeige, daß eine obere Dreiecksmatrix genau dann invertierbar ist, wenn alle Hauptdiagonaleinträge von 0 verschieden sind und daß dann die Inverse wieder eine Dreiecksmatrix ist.

(c) Sei A eine obere Dreiecksmatrix mit ganzzahligen Einträgen und es gelte darüberhinaus, daß die Hauptdiagonaleinträge alle gleich 1 sind. Zeige, daß auch die Inverse lauter ganzzahlige Einträge hat.

Übung 6.
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}_{p\times m}$, $B \in \mathbb{K}_{n\times q}$ zwei gegebene Matrizen. Zeige:

(a) die Abbildung
$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_{m\times n} &\to \mathbb{K}_{p\times q} \\ X &\mapsto A \cdot X \cdot B \end{aligned}$$
ist linear.

(b) f ist invertierbar genau dann, wenn $p = m$, $q = n$ und sowohl A als auch B invertierbar ist.

Übung 7.
Gegeben sei die Permutation
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimme die Faktorisierung von σ in ein Produkt durchschnittsfremder Zyklen.

(b) Zerlege σ in ein Produkt von Transpositionen
$$\sigma = \tau_{k_r l_r} \tau_{k_{r-1} l_{r-1}} \cdots \tau_{k_1 l_1}$$
mit $2 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$ und $l_i < k_i$.

(c) Bestimme die Fehlstände von σ sowie $\operatorname{sign} \sigma$.

(d) Bestimme die Hintereinanderausführung σ^2 von σ mit sich selbst und davon die Zyklenfaktorisierung.