Übungen zur Linearen Algebra II, SS 13

Blatt 3

11. Zeigen Sie, dass die 1-Norm $\|\cdot\|_1$ in $\mathbb{R}^n$ eine Norm ist. Zeigen Sie, dass die 1-Norm, die 2-Norm und die ∞-Norm auf $\mathbb{R}^n$ jeweils äquivalent sind.

12. Als Parallelogrammgleichung bezeichnet man

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ im $\mathbb{R}^2$ bereits nicht die Parallelogrammgleichung $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ erfüllen.

   (b) Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_{L^1}$ und $\|\cdot\|_{L^\infty}$ auf $V := C([0,1], \mathbb{R})$ nicht die Parallelogrammgleichung $\forall x, y \in V$ erfüllen.

13. Die Einheitskugel E sei definiert als $E := \left\{ x \in V \,\middle|\, \|x\| \leq 1 \right\}$.

   (a) Skizzieren Sie die Einheitskugel E für $V = \mathbb{R}^2$ und die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sowie $\|\cdot\|_\infty$.

   (b) Gegeben sind folgende drei Funktionen aus $V = C([0,1], \mathbb{R})$:

$$f(x) = 2x\,, \qquad g(x) = 3x^4\,, \qquad h(x) = e^x\,.$$

   Prüfen Sie, ob diese Funktionen jeweils in den Einheitskugeln zu den drei Normen $\|\cdot\|_{L^1}$, $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{L^\infty}$ liegen.

14. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

   eine reelle, symmetrische 2×2 Matrix. Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ setze

$$\langle x, y \rangle = x^T A\, y\,.$$

   Wann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$? Geben Sie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an a, b, c an.

15. Für eine quadratische Matrix A sei $tr(A)$ die Summe aller Diagonalelemente von A, bezeichnet als die *Spur von A* (engl. trace).

   (a) Zeigen Sie, dass durch $\langle A, B \rangle = tr(A^T B)$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller reellen $n \times n$ Matrizen definiert wird.

   (b) Sei $S = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \,:\, A = A^T \right\}$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen. Bestimmen Sie $S^\perp$ bezüglich des Skalarproduktes aus (a), d.h. den Unterraum $\{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \,:\, tr(AB) = 0 \quad \forall A \in S\}$.