Aufgabe 7. Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle x, y\rangle = x^t A y$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die kanonische Basis. Es darf vorausgesetzt werden, daß das Skalarprodukt positiv definit ist.

Aufgabe 8. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt und $P_U : V \to U$ die Orthogonalprojektion auf einen Unterraum U.
Zeige, daß für alle $x \in V$ gilt:

$$\|x - P_U(x)\| = \inf\{\|x - y\| : y \in U\}$$

Hinweis. Stelle x, $P_U(x)$ und y mit Hilfe einer Orthonormalbasis von U dar.

Aufgabe 9. Wir betrachten $V = \mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen Skalarprodukt. Bestimme die Matrixdarstellung (bezüglich der Standardbasis) der Orthogonalprojektion P auf den von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraum U.

Aufgabe 10. Sei V ein Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt. Beweise die folgenden Aussagen:
(a) $A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$.
(b) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
(c) $A^\perp = ((A^\perp)^\perp)^\perp$

Aufgabe 11. Gegeben sei die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimme die Faktorisierung von σ in ein Produkt durchschnittsfremder Zyklen.
(b) Zerlege σ in ein Produkt von Transpositionen

$$\sigma = \tau_{k_r l_r} \tau_{k_{r-1} l_{r-1}} \cdots \tau_{k_1 l_1}$$

mit $2 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$ und $l_i < k_i$.
(c) Bestimme die Fehlstände von σ sowie $\operatorname{sign} \sigma$.
(d) Bestimme die Permutation σ^{-1} und deren Faktorisierungen in ein Produkt von Transpositionen und Zyklen.
(e) Bestimme die Hintereinanderausführung σ^2 von σ mit sich selbst und davon die Zyklenfaktorisierung.