TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra II
SS 2000
Tutorenübung 3

1. Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n},\ f \in \mathbb{K}[x]$. Man beweise:

   a) A ähnlich $B \Longrightarrow f(A)$ ähnlich $f(B)$.

   b) A diagonalisierbar $\Longrightarrow f(A)$ diagonalisierbar.

2. Man prüfe, ob die folgenden Matrizen $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar sind und bestimme gegebenenfalls eine reguläre Matrix S, so daß $S^{-1}A_jS$ eine Diagonalmatrix ist.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Die $n \times n$-Matrix A habe alle n komplexen n-ten Einheitswurzeln als Eigenwerte. Beweisen Sie, dass dann $A^n = E$ gilt.

4. Sei $\zeta = e^{2\pi i/3}$ und

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \zeta & 1 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie B^2 und B^3. Berechnen Sie die Eigenwerte von B, B^2 und B^3.

   Vergleichen Sie dies mit der vorherigen Aufgabe.

5. Es sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis des reellen Vektorraumes $V, n \geq 2$. Ferner sei $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ definiert durch

$$\varphi(b_1) = b_2,\ \varphi(b_2) = b_3, \ldots, \varphi(b_n) = b_1.$$

   Man bestimme die (reellen) Eigenwerte von φ und gebe einen zugehörigen Eigenvektor an. Ist φ diagonalisierbar?