TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra II
SS 2000
Tutorenübung 4

1. Man zeige, dass die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ diagonalisierbar ist und gebe eine Basis B von $\mathbb{R}_5$ aus Eigenvektoren von A an.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Ein Endomorphismus f von V heißt nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl n mit $f^n = 0$ gibt. (Entsprechend definiert man nilpotente Matrizen.) Man zeige:

   a) (f nilpotent, λ Eigenwert von f) $\Longrightarrow \lambda = 0$.

   b) (f nilpotent, V reell oder komplex, $\dim V = n$) $\Longrightarrow \chi_A(x) = (-x)^n$.

   c) (f nilpotent $\wedge\, f \neq 0$ (Nullabbildung)) $\Longrightarrow$ f nicht diagonalisierbar.

3. Es sei φ eine Projektion von V, d.h. $\varphi^2 = \varphi$. Man zeige:
φ ist diagonalisierbar, und zwar ist $V = E_0 \oplus E_1$. Hierbei sind E_0, E_1 Eigenräume zu den Eigenwerten $0, 1$ bzw. gleich $\{\vec{0}\}$.

4. a) Es seien f ein Automorphismus und $U_1, \dots, U_r$ Unterräume des Vektorraumes V. Man zeige:
$f(U_1 \oplus \cdots \oplus U_r) = f(U_1) \oplus \cdots \oplus f(U_r)$.

   b) Weiter zeige man, dass dieselbe Aussage für beliebige Endomorphismen f gilt, die die Unterräume invariant lassen, d.h. für die $f(U_i) \subseteq U_i$ gilt. (Man spricht von f-invarianten Unterräumen.)