1. Man zeige, daß die folgenden Abbildungen linear sind. Welche der Abbildungen sind Isomorphismen?

$$\begin{array}{llll} L_1 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3, & L_1(a_1,a_2,a_3) = (a_1+a_2, a_1+a_3, a_2+a_3) \\ L_2 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[x], & L_2(a_1,a_2,a_3) = a_1 + (a_1+a_2)x + (a_1+a_2+a_3)x^2 \\ L_3 : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, & L_3(f(x)) = f(x^2) \end{array}$$

2. Die linearen Abbildungen: $\sigma_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\sigma_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ seien definiert durch:

$\sigma_1(1,0) = (2,-1,3),\ \sigma_1(0,1) = (0,1,-1),$
$\sigma_2(1,0,0) = (1,1),\ \sigma_2(0,1,0) = (8,-2),\ \sigma_2(0,0,1) = (1,0).$

Man bestimme $\operatorname{rg}(\sigma_2\sigma_1)$ und $\operatorname{def}(\sigma_2\sigma_1)$.

3. Es sei $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}_2[x])$ definiert durch:

$$\varphi(a+bx+cx^2) = (a+2b) + (2b+2c)x + (2a+3b-c)x^2.$$

Man bestimme $\operatorname{rg}(\varphi)$, $\operatorname{def}(\varphi)$ und je eine Basis für das Bild und den Kern von φ.

4. Beweisen Sie:
a) Zu jedem Unterraum U eines endlich dimensionalen Vektorraumes V gibt es ein $\sigma \in \operatorname{Hom} V$ mit $U = \operatorname{Kern} \sigma$.

b) Es gibt einen Endomorphismus φ von $\mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{Bild} \varphi$.