Diagonalisierung

Bereits bekannt.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim V = n$ und $F : V \to V$ linear.

Gibt es n paarweise verschiedene EW, dann ist F diagonalisierbar und $P_F(t)$ zerfällt in Linearfaktoren.

Frage. Was geschieht, wenn $P_F(t)$ mehrfache Nullstellen besitzt ?

Stets gilt

Lemma. Sei $F : V \to V$ linear, $\dim V = n$ und λ ein EW.

Dann gilt : $\mu(P_F; \lambda) \geq \dim \operatorname{Eig}(F; \lambda)$.

Beweis. Sei $(v_1, ..., v_r)$ eine Basis von $\operatorname{Eig}(F; \lambda)$, und ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n)$ von V .

$$\text{Dann ist } A = M_\mathcal{B}(F) = \left(\begin{array}{cccc} \lambda & & 0 & \\ & \cdots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ & 0 & & A' \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ r\text{−te Zeile} \\ \\ \end{array}$$

$$\text{und weiters } A - tE_n = \left(\begin{array}{cccc} \lambda - t & & 0 & \\ & \cdots & & * \\ 0 & & \lambda - t & \\ & 0 & & A' - tE_{n-r} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ r\text{−te Zeile} \\ \\ \end{array} .$$

Dann ist $P_F(t) = \det(A - tE_n) = (\lambda - t)^r \det(A' - tE_{n-r})$, und folglich gilt : $\mu(P_F; \lambda) \geq r = \dim \operatorname{Eig}(F; \lambda)$. $\square$

Beispiel. Betrachte $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x_1, x_2) = (x_2, 0)$.

Ist $\mathcal{B}$ die kanonische Basis, dann ist $A = M_\mathcal{B}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$P_F(t) = t^2$, damit ist $\lambda = 0$ der einzige EW mit $\mu(P_F; 0) = 2$.

$\mathrm{Eig}(F;0) = \mathrm{Ker} F = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $\dim \mathrm{Eig}(F;0) = 1 < \mu(P_F;0) = 2$.

Man beachte, dass $P_F(t)$ in Linearfaktoren zerfällt, aber F **nicht** diagonalisierbar ist.

Satz. Sei $F : V \to V$ linear und $\dim V = n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

1) F ist diagonalisierbar,

2) (i) $P_F(t)$ zerfällt in Linearfaktoren, und

(ii) $\mu(P_F;\lambda) = \dim \mathrm{Eig}(F;\lambda) \quad \forall$ Eigenwerte λ

3) Sind $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die paarweise verschiedenen EW von F , dann ist

$V = \mathrm{Eig}(F;\lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(F;\lambda_k)$.

Beweis.

1) $\Rightarrow$ 2) : zu (i) siehe früher.

zu (ii) : $\exists$ Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ aus EV von F , oBdA seien die ersten r_1 Vektoren EV zum EW λ_1 , die nächsten r_2 Vektoren EV zum EW λ_2 usf., und die letzten r_k Vektoren EV zum EW λ_k , wobei $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die verschiedenen EW bezeichnen und $r_1 + ... + r_k = n$.

In diesem Fall ist dann $\dim \mathrm{Eig}(F;\lambda_i) = \mu(P_F;\lambda_i) = r_i$ für $1 \leq i \leq k$.

2) $\Rightarrow$ 3) : Mit (i) gilt $P_F(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{r_1} ... (t-\lambda_k)^{r_k}$ mit $r_1 + ... + r_k = n$ und $\lambda_1, ..., \lambda_k$ paarweise verschieden.

Mit (ii) gilt $r_i = \mu(P_F;\lambda_i) = \dim \mathrm{Eig}(F;\lambda_i)$ für $1 \leq i \leq k$.

Weil $\mathrm{Eig}(F;\lambda_i) \cap \mathrm{Eig}(F;\lambda_j) = \{0\}$ für $i \neq j$ ist

$\mathrm{Eig}(F;\lambda_1) + ... + \mathrm{Eig}(F;\lambda_k) = \mathrm{Eig}(F;\lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(F;\lambda_k)$ und

$\dim(\mathrm{Eig}(F;\lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(F;\lambda_k)) = \dim \mathrm{Eig}(F;\lambda_1) + ... + \dim \mathrm{Eig}(F;\lambda_k) = r_1 + ... + r_k = n$.

Damit ist $V = \mathrm{Eig}(F;\lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(F;\lambda_k)$.

$3) \Rightarrow 1)$: Für jedes $1 \leq i \leq k$ sei $(v_1^{(i)}, ..., v_{r_i}^{(i)})$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F; \lambda_i)$. Dann ist $r_1 + ...r_k = n$.

Laut Voraussetzung sind dann die n Vektoren

$v_1^{(1)}, ..., v_{r_1}^{(1)}, v_1^{(2)} ..., v_{r_2}^{(2)}, ..., v_1^{(k)}, ..., v_{r_k}^{(k)}$ linear unabhängig, bilden also eine Basis.

Somit ist F diagonalisierbar. $\square$

Zur konkreten Bestimmung, ob ein Endomorphismus diagonalisierbar ist, betrachten wir folgende Situation :

$F : V \to V$ linear, $\dim V = n$,

$\mathcal{A}$ eine Basis von V und $A = M_{\mathcal{A}}(F)$.

Schritt 1. Bestimme $P_F(t)$. Wenn eine Zerlegung von $P_F(t)$ in Linearfaktoren **nicht** möglich ist, dann ist F **nicht** diagonalisierbar.

Sonst

Schritt 2. Für jeden EW λ von F bestimme nun eine Basis von $\mathrm{Eig}(F; \lambda)$.

Wenn $\mu(P_F; \lambda) \neq \dim \mathrm{Eig}(F; \lambda)$, dann ist F nicht diagonalisierbar.

Wenn $\mu(P_F; \lambda) = \dim \mathrm{Eig}(F; \lambda)$, dann ist F diagonalisierbar, und die EV von F bilden eine Basis $\mathcal{B}$ von V .

Für $B = M_{\mathcal{B}}(F)$ gilt dann $B = SAS^{-1}$ und die Spalten von S^{-1} sind die Koordinatenvektoren der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ bzgl. der Basis $\mathcal{A}$.

Beispiele.

1) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = Ax$.

$$P_F(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 \\ 3 & 4-t \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 10 .$$

$P_F(t)$ ist in $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerlegbar, daher ist F nicht diagonalisierbar.

2) Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = Ax$.

$P_F(t) = (5-t)t^2$, zerfällt also in Linearfaktoren (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) .

Die EW sind $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, des weiteren ist $\mu(P_F; 5) = 1$ und $\mu(P_F; 0) = 2$.

Zu $\lambda_1 = 5$ erhalten wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 7 \\ 0 & -8 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_I = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \mu \in \mathbb{R} .$$

Damit ist $\dim \operatorname{Eig}(F; 5) = 1$.

Zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ erhalten wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{II} = \mu \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \mu \in \mathbb{R} .$$

Damit ist $\dim \operatorname{Eig}(F; 0) = 1 \neq \mu(P_F; 0) = 2$.

Somit ist A bzw. F nicht diagonalisierbar.

3) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 + x_3, -3x_1 - 2x_2 + 3x_3, -2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$.

Ist $\mathcal{A}$ die kanonische Basis im $\mathbb{R}^3$, dann ist

$$A = M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

$P_F(t) = -(t-1)^2(t+1)$, damit ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

$$\mathrm{Eig}(F;1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathrm{Eig}(F;-1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

Somit $\dim \mathrm{Eig}(F;1) = 2 = \mu(P_F;1)$, $\dim \mathrm{Eig}(F;-1) = 1 = \mu(P_F;-1)$.

Folglich ist A diagonalisierbar und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis für $\mathbb{R}^3$.

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$