1 Lösungen (Logik)

An einer Weggabelung in der Wüste leben zwei Brüder, die vollkommen gleich aussehen, zwischen denen es aber einen gewaltigen Unterschied gibt: Der eine sagt immer die Wahrheit, der andere lügt immer. Schon halb verdurstet kommt man zu dieser Weggabelung und weiß genau: Einer der beiden Wege führt zu einer Oase, der andere hingegen immer tiefer in die Wüste hinein. Man darf aber nur einem der Brüder (man weiß nicht, welcher es ist) genau eine Frage stellen. Was muß man fragen, um sicher den Weg zur Oase zu finden?

Es ist klar, daß man nicht einfach „Welcher Weg führt zur Oase?“ fragen darf; die Antwort könnte ebensogut wahr wie falsch sein . Auch „Sagst du die Wahrheit?“ bringt einen nicht weiter, außerdem hat man ja nur eine einzige Frage frei. Der Ausweg besteht darin, eine Tautologie zu konstruieren: Fragt man nämlich „Von welchem Weg würde dein Bruder sagen, daß er zur Oase führt?“, so erhält man von beiden Brüdern jeweils die gleiche Auskunft – und weiß, daß man den anderen Weg nehmen muß.

*Beweisen Sie die Abtrennregel (*modus ponens*):* $\boxed{(A \wedge (A \to B)) \to B}$

Der Beweis erfolgt am einfachsten mittels Wahrheitstafeln. Die Abtrennregel ist übrigens auch eine recht häufig auftretende Schlussfigur, von der man zumindes einmal gehört haben sollte.

A	B	$(A$	$\wedge$	$(A \to B))$	$\to B$
w	w		w	w	**w**
w	f		f	f	**w**
f	w		f	w	**w**
f	f		f	w	**w**

Beweisen Sie die Äquivalenzen $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ *und* $(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$*.*

A	B	$(A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(\neg A$	$\wedge$	$\neg B)$	$(A \wedge B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(\neg A$	$\vee$	$\neg B)$
w	w	w	**w**	w	f	f	f	w	**w**	w	f	f	f
w	f	w	**w**	w	f	f	w	f	**w**	f	f	w	w
f	w	w	**w**	w	w	f	f	f	**w**	f	w	w	f
f	f	f	**w**	f	w	w	w	f	**w**	f	w	w	w

Wie viele binäre (also zwei Aussagen verknüpfende) Junktoren gibt es?

Bei zwei Aussagen gibt es vier mögliche Kombinationen von Wahrheitswerten, jeder davon kann entweder w oder f zugewiesen werden. Ingesamt gibt es also $N = 2^4 = 16$ verschiedene Junktoren, zu denen eben auch die vorgestellen $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\Leftrightarrow$, $\uparrow$ und ^{X} gehören.

Sie haben einen Satz Karten, jeweils mit einem Buchstaben auf der einen und einer Zahl auf der anderen Seite. Wie viele und welche der rechts dargestellten Karten müssen Sie mindestens umdrehen, um die Aussage „Wenn auf einer Seite einer Karte ein Vokal ist, dann ist auf der anderen Seite eine gerade Zahl“ zu überprüfen?

A	**Z**	**7**	**8**

Auf jeden Fall umdrehen muss man die Karten „A“ und „7“. Auf der Rückseite von „A“ müßte, sollte die Aussage wahr sein, eine gerade Zahl stehen, auf der Rückseite von „7“ ein Konsonant. Was auf den Rückseiten der anderen beiden Karten steht, ist für die Überprüfung der Aussage hingegen irrelevant.

Diskutieren sie a) die Aussage des Kreters Epimenides „Alle Kreter sind Lügner“, b) die Aussage „Diese Aussage ist falsch“. Wo liegt ein echtes, wo nur ein scheinbares Paradoxon vor und wie läßt sich zweiteres auflösen?

2 Lösungen (Gleichungen)

Man löse die folgenden Gleichungen nach x auf:
a) $\dfrac{x+1}{x} = a$, *b)* $\dfrac{x+1}{3x-7} = 2$, *c)* $4 + \dfrac{1}{4+\frac{1}{x}} = a$, *d)* $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} = 1$

a) $x+1 = ax \qquad x - ax = -1 \qquad (1-a)x = -1 \qquad x = \frac{1}{a-1}$.

b) $x+1 = 2\,(3x-7) \qquad x+1 = 6x-14 \qquad -5x = -15 \qquad x = 3$.

c) $\frac{1}{4+\frac{1}{x}} = a-4 \qquad \frac{1}{a-4} = 4 + \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{a-4} - 4 = \frac{1}{a-4} - \frac{4a-16}{a-4} = \frac{17-4a}{a-4} \qquad x = \frac{a-4}{17-4a}$.

d) $x\,(x-1) + 2\,(x+1) = x^2 - 1 \qquad x^2 - x + 2x + 2 = x^2 - 1 \qquad x = -3$.

Man finde alle reellen Lösungen x der folgenden Gleichungen:
a) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$, *b)* $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x = 0$, *c)* $x^2 + 10 = 6x$.

a) Das Produkt $x \cdot (x^2 - 2x - 3)$ wird Null, wenn zumindest einer der Faktoren Null wird, also $x = 0$ oder $x^2 - 2x - 3 = 0$. Als Lösungen der quadratischen Gleichung erhält man $x = 1 \pm \sqrt{1+3}$, also $x = 1 \pm 2$. Die drei Lösungen sind $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 3$.

b) Die linke Seite der Gleichung läßt sich relativ leicht faktorisieren: x kann man direkt herausheben und man errät schnell eine Lösung $x = -1$ der verbleibenden kubischen Gleichung.

$$x \cdot (x^3 + x^2 + 2x + 2) = 0 \qquad x \cdot (x+1) \cdot (x^2 + 2) = 0$$

Man erhält also die reellen Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$. (Zusätzlich gibt es noch die beiden konjugiert komplexen Lösungen $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}\,i$.)

c) Entweder aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen, $x = 3 \pm \sqrt{9-10}$, oder durch Ergänzen auf vollständige Quadrate, $(x-3)^2 = -1$, erkennt man, dass die Gleichung keine reelle Lösung x hat ($x_{1,2} = 3 \pm i$).

Man löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrl} I) & x & +y & -z & = 1 \\ II) & 2x & -y & +2z & = 9 \\ III) & x & +3y & -2z & = 3 \end{array}$$

Zuerst addieren wir die zweite und die dritte Gleichung bzw. zählen das Doppelte der ersten zur zweiten hinzu:

$$A = II + III) : 3x + 2y = 12 \qquad B = II + 2 \cdot I) : 4x + y = 11$$

Nun subtrahieren wir das Doppelte von Gl. (B) von Gl. (A): $A - 2B) : -5x = -10$, daraus folgt sofort $x = 2$. Etwa mit Gl. (B) erhält man weiter $8 + y = 11$, also $y = 3$. Damit liefert Gl. (I) sofort: $2 + 3 - z = 1$, deswegen ist $z = 4$.

Man löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$a)\ \begin{array}{rrrl} 2x & +y & +3z & = 3 \\ -x & -y & +2z & = 1 \\ x & +2y & +5z & = 2 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rrrl} 7x & -y & -z & = 4 \\ x & +y & -z & = 2 \\ 2x & +y & +z & = 14 \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{rrrl} x & +y & -z & = 0 \\ x & -y & +z & = 2 \\ x & +y & +z & = 6 \end{array}$$

Lösungen: a) $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$; b) $x = 2$, $y = 5$, $z = 5$; c) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

3 Lösungen (Mengen)

Gegeben sind die drei Mengen $M_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $M_2 = \{e, f, g, h, i\}$ *und* $M_3 = \{a, c, e, g, i\}$. *Man bilde die Mengen* $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_3$, $M_1 \cup M_3$, $M_2 \cap M_3$ *und* $M_2 \cup M_3$ *sowie* $M_1 \setminus M_2$, $M_2 \setminus M_1$, $M_1 \setminus M_3$, $M_2 \setminus M_3$, $\bigcap_{n=1}^{3} M_n$ *und* $\bigcup_{n=1}^{3} M_n$

$M_1 \cap M_2 = \{e\}$, $M_1 \cup M_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $M_1 \cap M_3 = \{a, c, e\}$, $M_1 \cup M_3 = \{a, b, c, d, e, g, i\}$, $M_2 \cap M_3 = \{e, g, i\}$, $M_2 \cup M_3 = \{a, c, e, f, g, h, i\}$, $M_1 \setminus M_2 = \{a, b, c, d\}$, $M_2 \setminus M_1 = \{f, g, h, i\}$, $M_1 \setminus M_3 = \{b, d\}$, $M_2 \setminus M_3 = \{f, h\}$, $\bigcap_{n=1}^{3} M_n = \{e\}$, $\bigcup_{n=1}^{3} M_n = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Man beweise das Distributivgesetz $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$.

Die folgenden Beziehungen sind einander jeweils äquivalent:

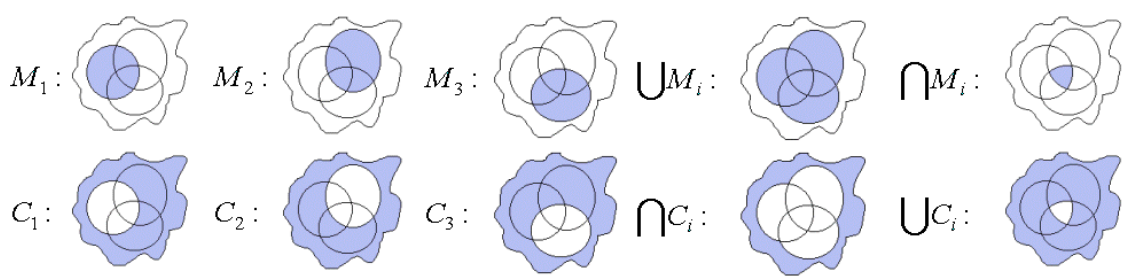
$$
\begin{aligned}
&x \in M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \\
&x \in M_1 \quad \wedge \quad x \in (M_2 \cup M_3) \\
&x \in M_1 \quad \wedge \quad (x \in M_2 \quad \vee \quad x \in M_3) \\
&\qquad \text{und wegen } A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\
&(x \in M_1 \quad \wedge \quad x \in M_2) \quad \vee \quad (x \in M_1 \quad \wedge \quad x \in M_3) \\
&x \in M_1 \cap M_2 \quad \vee \quad x \in M_1 \cup M_3 \\
&x \in (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cup M_3)
\end{aligned}
$$

Die oben verwendete aussagenlogische Äquivalenz läßt sich leicht mit Hilfe einer Wahrheitstafel zeigen. Analog zu diesem Beispiel lassen sich mengentheoretische Aussagen

Beweisen Sie die Absorptionsgesetze $M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$ *und* $M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$*!*

Das Element x_1 sei in M_1 enthalten. Dann ist natürlich auch $x_1 \in M_1 \cup M_2$ und daher weiter $x_1 \in M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$. x_2 sei nicht in M_1 enthalten. Dann kann es zwar Element von $M_1 \cup M_2$ sein (wenn es Element von M_2 ist), aber sicher nicht Element von $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$. Das heißt, alle Elemente von M_1 und nur diese sind auch Elemente von $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$, also ist tatsächlich $M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$. Der Beweis von $M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$ verläuft völlig analog.

Stellen Sie die Regeln von De Morgan anhand dreier Mengen graphisch dar!



4 Lösungen (Betragsungleichungen)

Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt: $|x+5| - x - 9 < 0$

Hier gibt es zwei interessante Fälle. In einem ist $x + 5 \geq 0$ (oder anders geschrieben $x \geq -5$), es gilt $|x+5| = x+5$. Im anderen hat man $x + 5 < 0$ (bzw. eben $x < -5$) und dementsprechend $|x+5| = -x-5$. Wir wollen mit dem zweiten Fall beginnen:

$x < -5$: Die Ungleichung wird zu $-x-5-x-9 < 0$, und weiter erhält man $-2x-14 < 0$, $-2x < 14$ und letztendlich $x > -7$. Die erste Lösungsmenge ist also das Intervall $L_1 = (-7, -5)$.

$x \geq -5$: Jetzt liest sich die Ungleichung $x+5-x-9 < 0$ oder vereinfacht $-4 < 0$. Das ist eine wahre Aussage, es ist also $L_2 = [-5, \infty)$.

Die gesamte Lösungsmenge ist die Vereinigung $L = L_1 \cup L_2 = (-7, \infty) = \{x | x > -7\}$.

Man bestimme alle reellen x, für die gilt: $|x-2| + \dfrac{2}{x} + |x+2| > 0$

$x < -2$: $-x+2+\frac{2}{x}-x-2 > 0$ bzw. $-2x+\frac{2}{x} > 0$. Nun multipliziert man mit x; da dieses kleiner als Null ist, dreht sich das Ungleicheitszeichen um: $-2x^2+2 < 0$ bzw. $2x^2-2 > 0$ oder vereinfacht: $x^2 > 1$. Diese Ungleichung gilt sicher für alle $x < -2$, da hier ja x^2 sogar immer größer als vier ist. $L_1 = \{x | x < -2\}$.

$-2 \leq x < 0$: $-x+2+\frac{2}{x}+x+2 > 0$ bzw. $4+\frac{2}{x} > 0$. Mit x multipliziert ergibt sich $4x+2 < 0$ bzw. $2x < -1$. Diese Ungleichung wird von allen $x < -\frac{1}{2}$ erfüllt, $L_2 = \{x | -2 \leq x < -\frac{1}{2}\}$.

$x > 0$: $|x-2| + \frac{2}{x} + |x+2| > 0$ gilt für alle $x > 0$, $L_3 = \{x | \, x > 0\} = \mathbb{R}_0^+$.

Der Fall $x = 0$ muss ohnehin ausgeschlossen werden, demnach ist die gesamte Lösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x | x < -\frac{1}{2} \vee x > 0\}$

Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt: $\dfrac{|x-2| \cdot (x+2)}{x} < |x|$

$x < 0$: $\dfrac{(-x+2)\cdot(x+2)}{x} < -x \iff -x^2-2x+2x+4 > -x^2 \iff 4 > 0$
Da das eine wahre Aussage ist, ist $L_1 = \{x | x < 0\}$.

$0 < x < 2$: $\dfrac{(-x+2)\cdot(x+2)}{x} < x \iff -x^2-2x+2x+4 < x^2 \iff 2 < x^2$
Diese Aussage gilt nur in $L_2 = \{x | \sqrt{2} < x < 2\}$.

$x \geq 2$: $\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{x} < x \iff x^2+2x-2x-4 < x^2 \iff -4 < 0$
Wiederum eine wahre Aussage, also ist $L_3 = \{x | x \geq 2\}$

Gesamte Lösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x | x < 0 \vee x > \sqrt{2}\}$

5 Lösungen (algebraische Strukturen)

Um welche algebraische Struktur handelt es sich bei den ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ mit den üblichen Rechenregeln für Addition und Multiplikation?

Das Assoziativgesetz für die Addition ist auf jeden Fall erfüllt; es gibt ein Nullelement $n = 0$ und für jede Zahl a ein inverses Element $-a$. Da zusätzlich das Kommutativgesetz gilt, handelt es sich zumindest einmal um eine kommutative Gruppe.
Bei der Multiplikation sind Distributiv- und Assoziativgesetz erfüllt, ebenso das Kommutativgesetz. Dazu gibt es ein Einselement $e = 1$. Allerdings läßt sich nicht für jede ganze Zahl ein inverses Element bezüglich Multiplikation finden, das ebenfalls eine ganze Zahl ist. Für $a = 2$ z.B. wäre $a^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Also handelt es sich nicht um einen Körper, sondern um einen kommutativen Ring mit Einselement.

$\mathbb{K}$ sei ein Körper. Beweisen Sie, daß das kartesische Produkt $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ mit den Operationen $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ und $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + \lambda bd, ad + bc)$ einen Körper bildet, sofern $x^2 \neq \lambda$ für alle $x \in \mathbb{K}$!

Die Körperaxiome für die Addition sind leicht nachzuprüfen, z.B. das Assoziativgesetz: $((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = (a + c + e, b + d + f) = (a, b) + (c + e, d + f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$.
Das Nullelement ist $n = (0, 0)$. Für die Multiplikation sind Assoziativ-, Kommutativ-, und Distributivgesetz ebenfalls erfüllt, wie man wieder durch Einsetztzen zeigt, z.B.: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + \lambda bd, ad + bc) = (ca + \lambda db, da + cb) = (c, d) \cdot (a, b)$.
Für das neutrale Element erhält man $e = (1, 0)$. Das einzige kritische Thema ist das inverse Element. Es sei $(a, b)^{-1} = (a', b')$, dann muß gelten $(a, b) \cdot (a', b') = (1, 0)$, also $(aa' + \lambda bb', ab' + ba') = (1, 0)$. Man erhält also das Gleichungssystem $aa' + \lambda bb' = 1$ und $ab' + ba' = 0$ mit der Lösung $a' = \frac{a}{a^2 - \lambda b^2}$ und $b' = -\frac{b}{a^2 - \lambda b^2}$. Das inverse Element ist also $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - \lambda b^2}, -\frac{b}{a^2 - \lambda b^2}\right)$. Dieses ist in zwei Fällen nicht definiert: Entweder wenn $a = b = 0$ ist – aber das Nullelement hat ja sowieso kein inverses Element bzgl. Multiplikation – oder aber wenn $\lambda = (\frac{a}{b})^2$. Diesen Fall kann man nur ausschließen, wenn tatsächlich $x^2 \neq \lambda$ für alle $x \in \mathbb{K}$ ist. Dann allerdings hat man tatsächlich einen Körper vorliegen.

Man beweise die kleine Schwarzsche Ungleichung $|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

Da beide Seiten positiv sind, darf man die Gleichung quadrieren und erhält dabei $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2)$ oder, wenn man ausmultipliziert, $a_1^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_2^2 \leq a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2$. Die Terme $a_1^2 b_1^2$ und $a_2^2 b_2^2$ fallen auf beiden Seiten weg, und übrig bleibt $2a_1 a_2 b_1 b_2 \leq a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2$. Bringt man alles auf eine Seite, erhält man $a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 \geq 0$. Die linke Seite ist aber ein Quadrat, $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$, und weil wir es nur mit geordneten Körpern zu tun haben, ist diese Ungleichung mit Sicherheit richtig.

6 Lösungen (vollständige Induktion)

Man beweise durch vollständige Induktion: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 < \frac{n^3}{3}$ *für alle natürlichen* n.

$n=1$: $0 < \frac{1}{3}$ ist offensichtlich richtig

$n \to n+1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 + n^2 \overset{\text{laut Induktionsannahme}}{<}$

$$< \frac{n^3}{3} + n^2 = \frac{n^3+3n^2}{3} < \frac{n^3+3n^2+3n+1}{3} = \frac{(n+1)^3}{3}$$

Man beweise für natürliche Zahlen $n \geq 2$: $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)$

$n=2$: $\displaystyle 1-\frac{2}{2\cdot(2+1)} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{2}\right)$ stimmt.

$n \to n+1$: $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)\,(n+2)}\right) \overset{\text{lt. Ind.-Ann.}}{=}$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{(n+1)\,(n+2)-2}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n\,(n+3)}{(n+1)\,(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{n+3}{n+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{n+1+2}{n+1} = \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$, was zu beweisen war.

Man zeige für $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(n+k)\,(n-k) = \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6}$

$n=1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(1+k)\,(1-k) = 1 = \frac{1\cdot2\cdot3}{6}$ stimmt.

$n-1 \to n$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n+1+k)\,(n+1-k) = \sum_{k=0}^{n-1}(n+1+k)\,(n+1-k) + (2n+1) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left((n+k)\,(n-k)+(2n+1)\right)+(2n+1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(n+k)\,(n-k) + \sum_{k=0}^{n-1}(2n+1) + (2n+1) \overset{\text{laut Induktionsannahme}}{=}$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6} + n\,(2n+1) + (2n+1) = \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6} + \frac{6\,(n+1)\,(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\,(4n^2-n+12n+6)}{6} = \frac{(n+1)\,(4n^2+8n+3n+6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\,(n+2)\,(4n+3)}{6}$$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Man beweise, dass 5^n-1 *durch 4 teilbar ist.*

$n=1$: $5-1=4$ ist natürlich durch 4 teilbar.

$n \to n+1$: $5^{n+1}-1 = 5\cdot5^n-1 = \underbrace{4\cdot5^n}_{\text{durch 4 tb.}} + \underbrace{5^n-1}_{\text{tb. lt. Ann.}}$ ist ebenfalls durch 4 teilbar.

Man beweise induktiv die beiden Summenformeln a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$ *und b)* $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

a) $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$ stimmt.

$n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} + (n+1) \overset{\text{nach Annahme}}{=} \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) =$

$= \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{2\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}.$

b) $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q}$ stimmt.

$n \to n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\text{nach Annahme}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} =$

$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$

Man beweise $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, *wenn alle* $x_k \in (-1,0)$ *oder alle* $x_k > 0$ *sind und leite daraus die Bernoulli-Ungleichung* $(1+a)^n \geq 1 + n\,a$ *für* $a > -1$ *ab.*

$n=1$: $1 + x_k \geq 1 + x_k$ ist eine wahre Aussage.

$n \to n+1$: Unter den Voraussetzungen für x_k ist $x_j\,x_k > 0$ und $1 + x_k > 0$.

$\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) = (1+x_{n+1}) \cdot \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \overset{\text{lt. Ann.}}{\geq} (1+x_{n+1}) \cdot (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$

$= 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+1}x_1 + \ldots x_{n+1}x_n > 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}.$

Für die Wahl $x_1 = \ldots = x_n = a$ erhält man sofort die Bernoulli-Ungleichung für $a \in (-1,0)$ oder $a > 0$, für den Fall $a = 0$ erhält man trivialerweise $1^n \geq 1 + n \cdot 0$. Schließt man den Fall $a = 0$ aus, so erhält man für $n \geq 2$ statt des „$\geq$“ ein echt „$>$“.

Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ *die Formel* $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + 2^{n+1} \cdot (n-1)$.

$n=1$: $1 \cdot 2 = 2 + 2 \cdot 0$ stimmt natürlich.

$n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k + (n+1) \cdot 2^{n+1} \overset{\text{laut Induktionsannahme}}{=}$

$= 2 + 2^{n+1} \cdot (n-1) + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2 + 2^{n+1} \cdot (n - 1 + n + 1) =$

$= 2 + 2^{n+1} \cdot 2n = 2 + 2^{n+2}\,n.$

Scheitert der Beweis von „$2n+1$ *ist gerade für alle* $n \geq 100$ *am Induktionsanfang, am Induktionsschritt oder an beidem?*

201 ist ungerade, womit der Induktionsanfang nicht gegeben ist, der Induktionsschritt hingegen läßt sich vollziehen: $2\,(n+1) + 1 = \underbrace{2n+1}_{\text{gerade nach Annahme}} + 2$ wäre gerade.

7 Lösungen (explizite Folgen)

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = n - n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

$$a_n = n \cdot \left(1 - \sqrt{1 + \tfrac{1}{n}}\right) = \frac{n \cdot \left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{1 + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{n \cdot \left(1 - (1 + \frac{1}{n}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{n \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = -\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

Damit erhält man problemlos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{1 + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \dfrac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = -\dfrac{1}{2}$

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \dfrac{\sqrt{4n(n-2)} - \sqrt{2n(n-1)}}{\sqrt{3n(n+3)}}$.

$$a_n = \frac{\sqrt{4n(n-2)} - \sqrt{2n(n-1)}}{\sqrt{3n(n+3)}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{4(1-\frac{2}{n})} - \sqrt{2(1-\frac{1}{n})}}{\sqrt{3(1+\frac{3}{n})}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4(1-\frac{2}{n})} - \sqrt{2(1-\frac{1}{n})}}{\sqrt{3(1+\frac{3}{n})}} = \frac{\sqrt{4(1-0)} - \sqrt{2(1-0)}}{\sqrt{3(1+0)}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Man untersuche die Folgen $a_n = (-1)^n \sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ *und* $b_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$ *auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls die Grenzwerte.*

$$a_n = (-1)^n \sqrt{n} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = (-1)^n \sqrt{n} \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Nun ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}$; wegen des $(-1)^n$ ist $\{a_n\}$ also divergent.

$$b_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{n\,(n+1)/2}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n(n+1)}{2(n+2)} = \frac{n^2+n-n^2-2n}{2(n+2)} = -\frac{n}{2n+4}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{n}{2n+4} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2+\frac{4}{n}}\right) = -\frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{2(1+2+\ldots+n)}{1+2+\ldots+(2n-1))-2(1+2+\ldots+(n-1))} = \tfrac{2\,\frac{n\,(n+1)}{2}}{\frac{(2n-1)\,2n}{2} - 2\,\frac{(n-1)\,n}{2}} = \\ &= \tfrac{n\,(n+1)}{n(2n-1)-(n-1)n} = \tfrac{n+1}{2n-1-n+1} = \tfrac{n+1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$.

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \frac{n^2+n-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 1$$

Man zeige, dass mit $[a_n, b_n]$, wobei $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)$ und $b_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k$ ist, eine Intervallschachtelung vorliegt. Welche reelle Zahl wird dadurch definiert?

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{\ell=1}^{n}\ell = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) = \frac{n\,(n+1)}{2(n+1)^2} = \frac{n}{2(n+1)}$$

$$b_n = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n+1}k = \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{n+1}{2}(n+2)\right) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Man erkennt schon $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$. Mit diesem Wissen kann man versuchen, die Folgenglieder noch etwas umzuformen:

$$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2(n+1)} + \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \text{ wächst streng monoton}$$

$$b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2(n+1)} + \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \text{ fällt streng monoton}$$

Für die Differenz der beiden Folgen gilt: $b_n - a_n = \frac{1}{n+1} \to 0$. Da beiden Folgen den gleichen Grenzwert haben, die eine monoton wächst, die andere monoton fällt, liegt eine Intervallschachtelung vor, sie definiert die Zahl $\frac{1}{2}$.

Gegeben ist $a_n = \left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^{(-1)^n} + \dfrac{(-1)^n\,n}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2}$. Man bestimme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Bei Ausdrücken, in denen vorkommt, bieten sich meist Fallunterscheidungen an:

$$\begin{array}{lll} \text{gerade:} & n = 2k & a_{2k} = \dfrac{4k}{6k+1} + \dfrac{2k}{4k+2} - \dfrac{1}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{4}{6} + \dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3} \\ \text{ungerade:} & n = 2k+1 & a_{2k+1} = \left(\dfrac{4k+2}{6k+4}\right)^{-1} - \dfrac{2k+1}{4k+4} - \dfrac{1}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{6}{4} - \dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Demnach ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

Man zeige, daß die Folge $a_n = \frac{(n+a)^n\,a^n}{n^n\cdot n!}$ für jede reelle Zahl a konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Wir wissen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n+a)^n}{n^n}\cdot\dfrac{a^n}{n!}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+a}{n}\right)^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}$.

Nun kennt man bereits (oder sollte zumindest kennen) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+a}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$.

Weiters ist $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$ – das sieht man am einfachsten, indem man ein beliebiges Fologenglied explizit anschreibt: $\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$. Sowohl im Zähler als auch im Nenner steht ein Produkt von n Faktoren, aber während diese über dem Bruchstrich den immer den Wert a haben, werden sie darunter mit wachsendem n immer größer, und für $n\to\infty$ geht der Ausdruck gegen Null. Beide Grenzwerte existieren, damit ist der Grenzwert des Produkts gleich dem Produkt der Grenzwerte, und man erhält $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^a\cdot 0 = 0$.

8 Lösungen (rekursive Folgen)

$\{a_n\}$ ist definiert durch $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Man beweise: $\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq a_n \leq 2^n$

Induktiv: $n = 0$: $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1 \leq 1 \leq 1 = 2^0$ stimmt; $n = 1$: $\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} \leq 2 \leq 2 = 2^1$ stimmt ebenfalls.

$(n, n+1) \to n+2$ $\quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n > \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \leq 2^{n+1} + 2^n = 3 \cdot 2^n < 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$$

Man untersuche $a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n}$, $a_1 = 0$ auf Konvergenz und bestimme ggf. den Limes.

Ausrechnen:	$\{a_n\} = \{0, 2, 2.73, 2.93, \ldots\}$
Vermutung:	$\{a_n\}$ ist monoton wachsend und $a_n \leq 3$
Monotonie:	$a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{1 + a_{n+1}} - \sqrt{1 + a_n}$; wenn $a_{n+1} > a_n$ ist, muss demnach auch $a_{n+2} > a_{n+1}$ sein. Weil $a_2 = 2 > 0 = a_1$ ist, wächst die Folge monoton.
Schranke:	$a_1 < 3$. Induktionsannahme: $a_n < 3$, daraus folgt $a_{n+1} < 1 + \sqrt{1+3} = 3$, die Folge ist nach oben beschränkt und wegen der Monotonie konvergent.
Grenzwert:	$a = 1 + \sqrt{1 + a}$ bzw. $a - 1 = \sqrt{1 + a}$ und nach Quadrieren $a^2 - 2a + 1 = 1 + a$ bzw. $a^2 - 3a = a(a-3) = 0$. Von den beiden Lösungen $a = 0$ und $a = 3$ kommt nur die zweite in Frage: $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

Man untersuche $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, $a_1 = \frac{1}{4}$ auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Aus $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ und $a_1 > 0$ folgt weiter $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n - a_n = a_n^2$ ist die Folge streng monoton wachsend und durch $a_1 = \frac{1}{4}$ nach unten beschränkt. $a_{n+1} = a_n \cdot (a_n + 1) \geq a_n \cdot \frac{5}{4} \geq a_{n-1} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \geq \ldots \geq a_1 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^n$ wächst über jede Schranke. Demnach ist $\{a_n\}$ nach oben unbeschränkt, also divergent.
Alternativer Nachweis der Divergenz: Der formale Grenzübergang $n \to \infty$ liefert die implizite Gleichung $a = a^2 + a$ mit der einzigen Lösung $a = 0$. Dies steht aber im Widerspruch zum monotonen Wachsen einer Folge mit positiven Gliedern, $\{a_n\}$ kann deshalb nicht konvergent sein.

Gegeben ist die Folge $a_{n+1} = 2a_n - 1$ mit $a_1 = a \in \mathbb{R}$. Man bestimme ein explizites Bildungsgesetz für die Folgenglieder und untersuche, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Folge konvergiert.

Eine Berechnung der ersten Glieder zeigt: $a_1 = a$, $a_2 = 2a - 1$, $a_3 = 2(2a-1) - 1 = 4(a-1) + 1$; $a_4 = 2(4(a-1)+1) - 1 = 8(a-1) + 1$. Man kann vermuten: $a_n = 2^{n-1}(a-1) + 1$, was allerdings noch mittels vollständiger Induktion bewiesen werden sollte:
$A_{n+1} = 2a_n - 1 \overset{\text{Ann}}{=} 2(2^{n-1}(a-1) + 1) - 1 = 2^n(a-1) + 2 - 1 = 2^n(a-1) + 1$
Der Induktionsanfang ist bereits gemacht, demnach stimmt die Rekursionsformel. Man erkennt auch sofort, daß die Folge divergiert, wenn nicht gerade $a = 1$ ist (der Ausdruck wächst für $a > 1$ über und fällt für $a < 1$ unter jede Schranke). Die Folge ist also nur konvergent für $a = 1$.

9 Lösungen (Reihen)

Der Erwartungswert einer Größe ist die Summe aller Möglichkeiten gewichtet mit jeweils der Wahrscheinlichkeit für ihr Eintreten. So ist der Erwartungswert eines (fairen) n-seitigen Würfels

$$\langle W_n \rangle = \frac{1}{n}\,(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{n}\,\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Berechnen Sie, wie sich dieser Wert durch die Zusatzregel ändert, dass beim Würfeln der höchsten Zahl n jeweils weitergewürfelt und das Ergebnis immer zum bisherigen addiert wird.

Aus dem Erwartungswert $\frac{1}{n}\,(1+2+\ldots+n)$ wird nun

$$\langle W_n^+ \rangle = \frac{1}{n}\left(1+\ldots+n+\frac{1}{n}\left(1+\ldots+n+\frac{1}{n}(\ldots)\right)\right)$$

Aus der Summe ist eine unendliche Reihe geworden, die man mit $N = 1+\ldots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ einfacher schreiben kann als:

$$\begin{aligned}\langle W_n^+ \rangle &= \frac{1}{n}N + \frac{1}{n^2}N + \frac{1}{n^3}N + \ldots = N\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} = N\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^k} - 1\right) = N\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1\right) = \\ &= N\cdot\left(\frac{n}{n-1} - 1\right) = N\cdot\frac{1}{n-1} = \frac{n\,(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

Der Erwartungswert erhöht sich also um einen Faktor $\frac{n}{n-1}$.

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:
a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+n^2}$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}2^{-3n-1}$

a) $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2^{\frac{n-1}{n}}} \to \frac{1}{2}$, die Reihe ist konvergent nach Wurzelkriterium

b) Abschätzung $a_n = \frac{1}{n+n^2} \leq \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergent ist, ist auch diese Reihe konvergent.

c) Es ist $a_n = \binom{2n}{n}2^{-3n-1} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}2^{-3n-1}$ und damit gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+2)!\,2^{-3n-4}}{(n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{n!\,n!}{(2n)!\,2^{-3n-1}} = \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,2^{-3}}{(n+1)\,(n+1)} = \frac{4n^2+6n+2}{2^3\,(n^2+2n+1)} \to \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 1$, die Reihe ist also konvergent.

Man untersuche die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+3)}{n\,!}$ *auf Konvergenz.*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+3)\,(2n+5)\cdot n\,!}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+3)\cdot(n+1)\,!} = \frac{(2n+5)\cdot n\,!}{(n+1)\cdot n\,!} = \frac{2n+5}{n+1} \to 2 > 1, \text{ divergent}$$

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\sqrt{n}}{n^{5/2}}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n}}{n^{5/4}}$

a) $\displaystyle\left|(-1)^n\frac{\sin\sqrt{n}}{n^{5/2}}\right|\le\frac{1}{n^{5/2}}$, die Reihe konvergiert, da auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ konvergiert.

b) $\displaystyle\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{3^{n+1}/(n+1)^3}{3^n/n^3}=\frac{3^{n+1}\cdot n^3}{3^n\cdot(n+1)^3}=3\cdot\frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1}\to 3>1$, divergent

c) Vgl. mit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{9/8}}$: $\displaystyle\frac{a_n}{b_n}=\frac{\ln\sqrt{n}/n^{5/4}}{1/n^{9/8}}=\frac{\ln\sqrt{n}\,n^{9/8}}{n^{5/4}}=\frac{\ln(n^{1/2})}{n^{5/4-9/8}}=\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n^{1/8}}\to 0$, da der Logarithmus „im Unendlichen“ langsamer wächst als jede Potenz. Also ist die Reihe c) „konvergenter“ als die bereits konvergente Vergleichsreihe.

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(\sqrt{n}+1)}{n^2+5n-1}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\pi\cdot\left(n+\frac{4}{n}\right)\right)$

a) Vergleich mit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ liefert: $\displaystyle\frac{a_n}{b_n}=\frac{(n^{3/2}+n)\cdot\sqrt{n}}{n^2+5n-1}=\frac{n^2+n^{3/2}}{n^2+5n-1}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}\to 1$, die Reihen haben gleiches Konvergenzverhalten und divergieren demnach beide.

b) Wurzelkriterium: $\displaystyle\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{1}\left(\frac{1}{3}+0\right)=\frac{1}{3}<1$, konvergent

c) $\displaystyle\sin^2\left(\pi\cdot\left(n+\frac{4}{n}\right)\right)=\sin^2\left(n\pi+\frac{4\pi}{n}\right)=\sin^2\left(\frac{4\pi}{n}\right)=\left(\frac{4\pi}{n}\right)^2\left(\sin^2\left(\frac{4\pi}{n}\right)\Big/\frac{4\pi}{n}\right)\le\frac{(4\pi)^2}{n^2}$, d.h. die Reihe ist konvergent, weil $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergent ist.

Man untersuche die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ *und* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{4n}{3n}^{-1}$ *auf Konvergenz.*

1. Weil $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ monoton wächst und $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ ist, ist $\displaystyle\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ eine monoton fallende Nullfolge und die Reihe ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.
2. Es ist $\displaystyle a_n=\binom{4n}{3n}^{-1}=\left(\frac{(4n)!}{(3n)!\,n!}\right)^{-1}=\frac{(3n)!\,n!}{(4n)!}$ und damit $\displaystyle\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{(3n+3)!\,(n+1)!}{(4n+4)!}\cdot\frac{(4n)!}{(3n)!\,n!}=\frac{(3n+3)\,(3n+2)\,(3n+1)\,(n+1)!}{(4n+4)\,(4n+3)\,(4n+2)\,(4n+1)}=\frac{27n^4+\ldots}{256n^4+\ldots}\to\frac{27}{256}<1$, konvergent.

Man bestimme alle $x\in(-\pi,\pi)$, *für die die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sin 2x)^n$ *konvergiert.*

$\sqrt[n]{|a_n|}=|\sin 2x|$ ist kleiner Eins außer für $2x=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\ldots\iff x=\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4},\ldots$. In diesen Fällen erhält man die divergenten Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}1$ bzw. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Die Reihe konvergiert also für $x\in(-\pi,\pi)\setminus\{-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\}$.

10 Lösungen (Stetigkeit)

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & -3 \leq x < -2 \\ x + 1 & -2 \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ x^2 + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & -3 \leq x < -1;\ x \neq -2 \\ 2 + x & -1 \leq x < 1 \\ x^2 + |x| + 1 & 1 \leq x < 2 \\ 9 - x & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

mit den Definitionsbereichen $D_f = [-3, 2]$ und $D_g = [-3, 3] \setminus \{-2\}$. Man überprüfe beide Funktionen auf Stetigkeit und skizziere ihre Graphen.

Da die f an den „Zwischenstücken“ als Zusammensetzung stetiger Funktionen selbst stetig ist, sind nur jene Punkte zu untersuchen, an denen die Funktion umdefiniert wird:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2}(x^2-5) = (-2)^2 - 5 = -1 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2}(x+1) = -2+1 = -1 \end{array}\right\} = \lim_{x\to-2} f(x) = -1 = f(-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0}(x+1) = 0+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0} 2x = 2\cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \neq$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1} 2x = 2\cdot 1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(x^2+1) = 1^2+1 = 2 \end{array}\right\} = \lim_{x\to1} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$$

In $x = -2$ existieren links- und rechtsseitiger Limes, sie sind gleich, also existiert auch der Limes selbst; da er gleich dem Funktionswert ist, ist f dort stetig. In $x = 0$ sind links- und rechtsseitiger Grenzwert ungleich; in $x = 1$ sind sie zwar gleich, und der Grenzwert selbst existiert deshalb, er ist aber ungleich dem Funktionswert. An $x = 0$ und $x = 1$ ist die Funktion f also unstetig, auf $D(f) \setminus \{0, 1\}$ ist sie stetig.

Für g gilt im Prinzip analog zu f, dass die Funktion an den „Zwischenstücken“ stetig ist; allerdings sind zusätzliche Punkte zu beachten, wo das Argument eines Betrages das Vorzeichen wechselt:

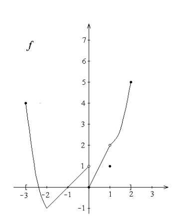
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-(x+2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2}(-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2} 1 = 1 \end{array}\right\} \neq$$

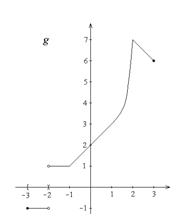
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-1}(2+x) = 2-1 = 1 \end{array}\right\} = \lim_{x\to-1} f(x) = 1 = f(-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1}(2+x) = 2+1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1}(x^2+|x|+1) = 1^2+|1|+1 = 3 \end{array}\right\} = \lim_{x\to1} f(x) = 3 = f(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2}(x^2+|x|+1) = 2^2+|2|+1 = 7 \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2}(9-x) = 9-2 = 7 \end{array}\right\} = \lim_{x\to2} f(x) = 7 = f(2)$$

Nur bei $x = -2$ sind links- und rechtsseitiger Grenzwert ungleich; da dieser Punkt aber aus der Definitionsmenge ausgenommen wurde und überall sonst der Grenzwert existiert und gleich dem Funktionswert ist, ist g überall auf D_g stetig.





11 Lösungen (Ableitungen)

Man berechne die erste Ableitung f' der folgenden Funktionen:

1) $f(x) = e^{ax^2+bx+c}$ *2)* $f(x) = \ln \dfrac{1}{1+x^2}$ *3)* $f(x) = x^2 e^{-x}$

4) $f(x) = \dfrac{\cosh x}{x^2+3x+1}$ *5)* $f(x) = \arcsin(ax+b)$ *6)* $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+2x+1}$

1. Kettenregel: $f'(x) = (2ax+b)\, e^{ax^2+bx+c}$
2. $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{1+x^2}} \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = (1+x^2)\, \left((1+x^2)^{-1}\right)' = (1+x^2)\,(-1)\,(1+x^2)^{-2}\, 2x = -\dfrac{2x}{1+x^2}$
3. Produktregel: $f'(x) = 2x\, e^{-x} - x^2\, e^{-x} = (2x - x^2)\, e^{-x}$
4. Quotientenregel: $f'(x) = \dfrac{\sinh x \cdot (x^2+3x+1) - \cosh x \cdot (2x+3)}{(x^2+3x+1)^2}$
5. Kettenregel: $f'(x) = \dfrac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$
6. Quotientenregel: $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot (x^2+2x+1) - e^x \cdot (2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

Man berechne die erste Ableitung f' der folgenden Funktionen:

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ *2)* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ *3)* $f(x) = \sqrt{g(x)}\,;\;\; g(x) \geq 0 \;\forall x \in D_g$

4) $f(x) = \cos(\ln(x^2))$ *5)* $f(x) = x^x$ *6)* $f(x) = x^{(x^x)}$

1. $f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1\right)$
2. $f'(x) = \left((1+\cos^2 x)^{-1/2}\right)' = -\dfrac{1}{2}\,(1+\cos^2 x)^{-3/2} \cdot 2\cos x\,(-sinx) = \dfrac{\cos x\, \sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$
3. $f'(x) = \left(g(x)^{1/2}\right)' = \dfrac{1}{2}\, g(x)^{-1/2}\, g'(x) = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
4. $f'(x) = -\sin(\ln(x^2)) \cdot \dfrac{2x}{x^2} = -\dfrac{2\,\sin(\ln(x^2))}{x}$
5. $f'(x) = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x}\,(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}) = x^x\,(1 + \ln x)$
6. $f'(x) = \left(x^{(x^x)}\right)' = \left(e^{x^x \cdot \ln x}\right)' = e^{x^x \cdot \ln x} \cdot \left(x^x \cdot \dfrac{1}{x} + x^x\,(1+\ln x)\,\ln x\right)$

Man erhält für die ersten Ableitung von $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ die Ausdrücke

$$\begin{array}{rclrcl} f'(x) & = & \frac{1}{2}\,(1+x)^{-1/2} & f^{(3)}(x) & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\,(1+x)^{-5/2} \\ f''(x) & = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,(1+x)^{-3/2} & f^{(4)}(x) & = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}\,(1+x)^{-7/2} \end{array}$$

und kann für den allgemeinen Ausdruck (mit $n \geq 2$) vermuten:

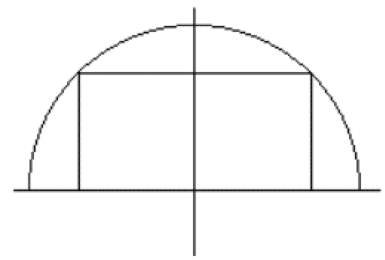
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(x)\, \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n}\, (1+x)^{-(2n-1)/2}$$

Zum Beweis bildet man (im Induktionsschritt)

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= -\frac{2n-1}{2}(-1)^{n+1}(x)\,\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\,(1+x)^{-(2n-1)/2-1} \\ &= (-1)^{n+2}(x)\,\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}\,(1+x)^{-(2n+1)/2}, \end{aligned}$$

die Formel stimmt tatsächlich.

Einem Halbkreis mit Radius a ist das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben, daß zwei der Eckpunkte auf der Kreislinie und zwei auf der x-Achse liegen.



Man kann das Problem mit gutem Gewissen symmetrisch ansetzen. Der rechte obere Eckpunkt habe die Koordinaten (x, y), die anderen drei müssen demnach $(-x, y)$, $(x, 0)$ und $(-x, 0)$ haben. Die Fläche des Rechtecks ist $2xy$, diese Funktion ist zu maximieren. Als Nebenbedingung hat man die Kreisgleichung $x^2+y^2=a^2$, mit deren Hilfe man eine Variable explizit ausrechnen kann, etwa $y = \sqrt{a^2-x^2}$. Das kann man nun in die Fläche einsetzen: $A = 2x\sqrt{a^2-x^2} = 2x\,(a^2-x^2)^{1/2}$, diese Funktion soll ein Maximum annehmen.
Die Ableitung nach der Produktregel ergibt

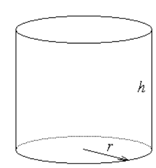
$$\frac{dA}{dx} = 2\sqrt{a^2-x^2} + 2x\,\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

diesen Ausdruck muß man nun Null setzen: $2\sqrt{a^2-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0$ bedeutet $\sqrt{a^2-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ und nach Multiplikation mit $\sqrt{a^2-x^2}$ ergibt sich $a^2-x^2 = x^2$. Also ist $a^2 = 2x^2$ und damit $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (die negative Lösung kommt nicht in Betracht). Aus der Nebenbedingung erhält man $y^2 = x^2$, das flächengrößte Rechteck hat also Eckpunkte mit den Koordinaten $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$ und $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Eigentlich müßte man auch noch überprüfen, ob es sich auch wirklich um ein Maximum handelt, und nicht etwa ein Minimum oder einen Sattelwert. Im allgemeinen kann es natürlich eventuell Randextrema geben, die das eigentliche Optimum darstellen. (Hier liegen allerdings nur die Randminima $x = a$ und $x = 0$ mit der Fläche $A = 0$ vor.)

Wie ist für eine zylindische Dose das Verhältnis von Höhe zu Radius zu wählen, damit das Verhltnis von Volumen zu Oberfläche möglichst günstig (maximal) wird?

Die beiden Kenngrößen für eine Dose mit Grundflächenradius r und Höhe h sind Volumen $V = r^2\pi h$ und Oberfläche $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$. Aus einer dieser Größen muss nun eine Variable explizit ausgedrückt werden, günstig ist hier $h = \frac{V}{r^2\pi}$. Setzt man das ein, so erhält man $O = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$. Die Ableitung nach r liefert $\dfrac{dO}{dr} = 4r\pi - \dfrac{2V}{r^2} \overset{!}{=} 0$ Löst man diese Gleichung nach r auf, so erhält man $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Setzt man das in den Ausdruck für h ein, so erhält man $h = \frac{V}{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}\pi} = \frac{V\,2^{2/3}}{V^{2/3}\pi} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ und für das Verhältnis

$$\frac{h}{r} = \frac{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{8\pi V}{\pi V}} = 2,$$



die Höhe der Dose ist also gleich ihrem Durchmesser.

12 Lösungen (Kurvendiskussionen)

Man diskutiere die Funktion $f(x) = (x - a) \cdot e^{x-a}$:

- **Untersuchung des Definitionsbereiches:**
  Alle vorkommenden elementaren Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert; es gibt auch keine Brüche, deren Nenner Null werden könnten, also ist $D_f = \mathbb{R}$.

- **Nullstellen:**
  Nullsetzen der Funktion liefert $(x - a) \cdot e^{x-a} = 0$. Da die Exponentialfunktion nie Null werden kann, ist das nur erfüllt, wenn $x - a = 0$, also $x = 0a$ ist. ,

- **Kritische Punkte, Monotonie:**
  Bildung der ersten Ableitung $f'(x) = e^{x-a} + (x - a)\, e^{x-a} = (x + 1 - a)\, e^{x-a}$. Nullsetzen liefert mögliche Extremwerte: $(x+1-a)\, e^{x-a} = 0$ kann nur gelten für $x = a-1$. Das ist also der einzige Kandidat für eine Extrmestelle. (Ist $f'(x) \neq 0$ im ganzen Definitionsbereich, so ist f entweder streng monoton wachsend ($f'(x) > 0$) oder fallend ($f'(x) < 0$).

- **Zweite Ableitung:**
  Man erhält $f''(x) = e^{x-a} + (x + 1 - a)\, e^{x-a} = (x + 2 - a)\, e^{x-a}$. Einsetzen des kritischen Punktes von oben: $f''(a - 1) = e^{-1} > 0$, es liegt also ein Minimum vor. (Für $f''(x_k) < 0$ hätte man ein Maximum, im Falle $f''(x_k) = 0$ könnte man allein anhand der zweiten Ableitung keine Ausage machen.)

- **Wendepunkte:**
  Nullsetzen der zweiten Ableitung liefert Kandidaten für Wendepunkte: $(x+2-a)\, e^{x-a} = 0$ hat als einzige Lösung $x = a - 2$. (Wäre $f''(x)$ überall ungleich Null, so wäre f entweder streng konvex ($f''(x) > 0$) oder streng konkav ($f''(x) < 0$).) Nun betrachtet man die dritte Ableitung $f^{(3)}(x) = (x + 3 - a)\, e^{x-a}$. Hier ist $f^{(3)}(a - 2) = e^{-2} \neq 0$, es handelt sich also tatsächlich um einen Wendepunkt.

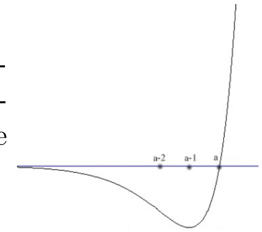
- **Asymptoten:**
  In diesem Fall gibt es keine Definitionslücken mit $\lim_{x \to x_0^\pm} = \pm\infty$, also auch keine senkrechten Asymptoten. Nun berechnet man die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-a)\cdot e^{x-a}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-a)}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} e^{x-a} = \infty \\
k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-a)\cdot e^{x-a}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-a)}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} e^{x-a} = 0 \\
d_2 &= \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} (x-a)\cdot e^{x-a} = 0
\end{aligned}$$

  Die einzige Asymptote ist also $y = 0$ (für $x \to -\infty$).

- **Skizze:**

  Skizzieren des Funktionsgraphen mit Hilfe von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten, dem Monotonieverhalten sowie den Asymptoten, im Zweifelsfalle zusätzlich noch mit Funktionswerten für einzelne zusätzliche Punkte.

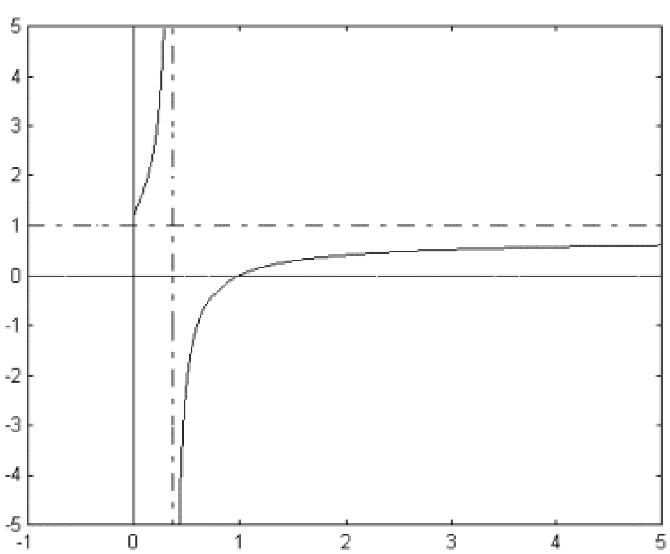


Man diskutiere die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$
(Definitionsmenge, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Bildmenge, Asymptoten, Skizze)

- $\ln x$ ist nur definiert für $x > 0$, daher ist $D_f \subset \mathbb{R}^+$. Weiters ist Division durch Null nicht erlaubt, $(1 + \ln x) = 0$ für $x = \frac{1}{e}$, daraus folgt für die Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{1}{e}\}$. Übrigens ist $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, die Funktion wäre also mit $f(0) = 1$ stetig ergänzbar.
- $f'(x) = \dfrac{1}{x\,(1+\ln x)^2}$ ist für $x > 0$ immer positiv, weil sowohl der Zähler als auch das Quadrat im Nenner immer < 0 sind. Das bedeutet, $f(x)$ ist auf allen Teilintervallen von D_f streng monoton wachsend, es gibt keine Extrema. (Die stetige Ergänzung mit $f(0) = 1$ hätte in $x = 0$ ein relatives (Rand-)Minimum.)
- $f''(x) = -\dfrac{3+\ln x}{x^2\,(1+\ln x)^3}$ ist Null genau dann, wenn $3 + \ln x = 0$, also für $x = \frac{1}{e^3}$. Es ist $f(\frac{1}{e^3}) = \frac{3}{2}$, also hat der einzige Wendepunkt die Koordinaten $\left(\frac{1}{e^3}, \frac{3}{2}\right)$.
- Für sehr kleine positive x ist $\ln x$ einerseits negativ, andererseits betragsmäßig sehr groß, also hat $f(x)$ einen Wert knapp über Eins. Von da an steigt die Funktion bis $x = \frac{1}{e}$ ins Unendliche an. Für alle $x > \frac{1}{e}$ steigt f von minus Unendlich weg wieder an. Für große x wird $\ln x$ wieder betragsmäßig groß, ist aber diesmal positiv, d.h. der Bruch ist immer kleiner als Eins. Insgesamt wird also auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ abgebildet.
- $x = \frac{1}{e}$ ist die einzige senkrechte Asymptote. Für negative Zahlen ist die Funktion gar nicht definiert, der Grenzübergang nach $-\infty$ entfällt. Die beiden anderen Grenzwerte existieren dafür:

  $$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\,\frac{\ln x}{1+\ln x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{1+\ln x} = 0\cdot 1 = 0 \\ d &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{1+\ln x} = 1 \end{aligned}$$

  Es gibt also eine zusätzliche Asymptote $y = 1$.
- Aus den Informationen über Asymptoten und Montonie kann man nun auch leicht eine Skizze des Funktionsgraphen erstellen:



Man diskutiere die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2} + 4$

- Untersuchung des Definitionsbereiches: f ist nicht definiert an Nullstellen des Nenners: $x^2 - 2 = 0$, also $x = \pm 2$. Damit ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

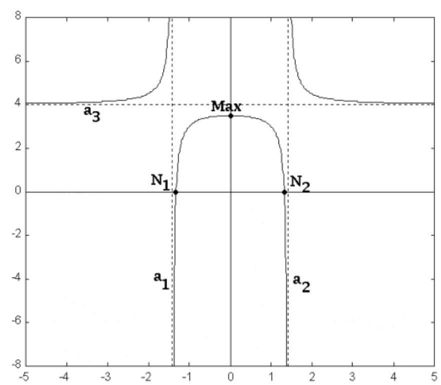
- Nullstellen: $\dfrac{1}{x^2 - 2} + 4 = 0$, $1 + 4(x^2 - 2) = 0$, $x^2 = \frac{7}{4}$, $N_1(-\frac{\sqrt{7}}{2}, 0)$, $N_2(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0)$,

- Bildung und Nullsetzen der ersten Ableitung: $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}$. $2x = 0$, also ist $x = 0$ der einzige kritische Punkt.

- Bildung der zweiten Ableitung $f''(x) = \dfrac{-2\,(x^2-2)^2 + 2x\,2\,(x^2-2)\,2x}{(x^2-2)^4} = \dfrac{6x^2+4}{(x^2-2)^3}$, Einsetzen des kritischen Punktes von oben: $f''(0) = -\frac{1}{2} < 0$, es liegt also ein (relatives) Maximum vor, $M_1(0, \frac{7}{2})$.

- Wendepunkte: $6x^2 + 2$ ist immer positiv, $(x^2 - 2)^3$ ist für $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ immer negativ, für $x \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ immer positiv, also gibt es keine Wendepunkte.

- Asymptoten: An den Definitionslücken gilt:



$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\sqrt{2}^-} f(x) &= \lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = \infty \\ \lim_{x \to -\sqrt{2}^+} f(x) &= \lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

also gibt es zwei Asymptoten: $a_1 :\ x = -\sqrt{2}$ und $a_2 :\ x = \sqrt{2}$. Außerdem ist

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$$

demnach existiert noch eine dritte: $a_3 :\ y = 4$.

- Skizze (mittels Nullstellen und Extrema sowie Asymptoten): siehe oben

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sinh\sqrt{1-x}$. *Man bestimme Definitionsbereich, Nullstellen, Extrema und Monotonieverhalten!*

- Das Argument der Wurzel ist nur dann nicht negativ, wenn $x \le 1$ ist. Das ist auch schon die einzige Einschränkung, also ist $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1\}$.

- Die einzige Nullstelle des Sinus hyperbolicus liegt bei Null, für die Nullstelle muss daher gelten: $\sqrt{1-x} = 0$ und damit $x = 1$.

- $f'(x) = \cosh\sqrt{1-x} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$. Der Cosinus hyperbolicus ist im Reellen stets positiv, auch die Wurzel kann nie negativ werden, daher ist wegen des negativen Vorzeichens der inneren Ableitung $f'(x) < 0$ für alle $x \in D_f$. Die Funktion ist streng monoton fallend.

- Wegen $f'(x) \neq 0$ gibt es keine inneren Extrema, sehr wohl aber ein Randextremum: Die Nullstelle $N(1, 0)$ ist zugleich auch das absolute Minimum.

13 Lösungen (De l'Hospital)

Insgesamt gibt es sieben Typen von unbestimmten Formen, auf die alle entweder die Regeln von De l'Hospital anwendbar sind oder die durch entsprechende Umformungen auf eine passende Form gebracht werden können:

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

Entweder (u.U. wiederholte) Anwendung der Regeln von DE L'HOSPITAL

Bsp: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$

Oder (bei $x\to\infty$) Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz dividieren (Vorsicht bei Wurzeln!) und $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$ für $n>0$ verwenden.

Bsp: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{x^2+\sqrt{x^4-x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$

$\boxed{\frac{0}{0}}$

Anwendung der Regeln von DE L'HOSPITAL, u.U. auch mehrmals.

BSP: $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=1$

BSP: $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sinh x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\cosh x}{\cos x-x\sin x}=1$

$\boxed{0\cdot\infty}$

Auf $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ umformen, Behandlung wie oben.

Bsp: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\,e^x}=0$

Bsp: $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$

$\boxed{0^0}$, $\boxed{1^\infty}$, $\boxed{\infty^1}$

Logarithmieren, zuerst auf $0\cdot\infty$, dann weiter auf $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ umformen (den Logarithmus dabei möglichst im Zähler lassen!), Behandlung wie oben.

Bsp: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\exp\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\exp\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}=$

$\displaystyle=\exp\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-1/x^2}=\exp\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x}=\exp 1=e$

Bsp: $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x=\exp\lim_{x\to0^+}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x=\exp\lim_{x\to0^+}x\ln\frac{1}{x}=\exp\lim_{x\to0^+}x\frac{\ln\frac{1}{x}}{1/x}=$

$\displaystyle=\exp\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1/x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-1/x^2}=\exp\lim_{x\to0^+}x=e^0=1$

$\boxed{\infty-\infty}$

Umformung auf $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$, Behandlung wie oben.

Bsp: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0$

Die Form „$0^{\pm\infty}$" ist zwar ebenfalls unbestimmt, es läßt sich aber durch Umformen ohne die Regel von De l'Hospital feststellen, dass dieser Grenzwert 0 oder ∞ ergibt. Noch klarer sind Ergebnisse wie $\frac{0}{\infty}=0$ oder $\frac{\infty}{0}=\infty$.

Bsp: $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}}=e^{-\infty}=0$

Bsp: $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}\ln x}=e^{-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}}=e^{\infty}=\infty$

Beispiel: Man ermittle die folgenden Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sinh x}{x^3-x^4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{e^x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x\cdot(x+1)}-x\right)$	$\lim\limits_{x\to1^+}(\ln x)^{x-1}$

Versuchen, ob Lösen durch reines Umformen möglich ist; sonst durch Einsetzen die Form bestimmen.

„$\frac{0}{0}$“	„1^∞“	„$\infty-\infty$“	„0^0“

Falls notwendig mit Umformungen (z.B. Logarithmieren) für Division durch höchste Potenz auf oder für Anwendung von de l'Hospital auf „$\frac{0}{0}$“ bzw. „$\frac{\infty}{\infty}$“ bringen.

keine Umformung notwendig	Logarithmieren $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left((1+e^{-x})^{e^x}\right)}$ umformen $e^{\lim\limits_{x\to\infty}e^x\ln(1+e^{-x})}$ und weiter auf $\frac{0}{0}$: $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}}$	Erweitern: $\cdot\frac{\sqrt{x(x+1)}+x}{\sqrt{x(x+1)}+x}$: $\frac{x(x+1)-x^2}{\sqrt{x(x+1)}+x}$ vereinfachen: $\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$	Logarithmieren $e^{\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left((\ln x)^{x-1}\right)}$ umformen: $e^{\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\ln(\ln x)}$ und weiter auf $\frac{\infty}{\infty}$: $e^{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln(\ln x)}{1/(x-1)}}$

Nun Regel von DE L'HOSPITAL anwenden = Zähler und Nenner getrennt differenzieren (unter Umständen auch mehrfach), bis keine unbestimmte Form mehr erhalten wird. (Für $x\to\infty$ stattdessen evtl. Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz dividieren.)

De l'Hospital: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cosh x}{3x^2-4x^3}$ $\frac{0}{0}$, De l'Hospital: $\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sinh x}{6x-12x^2}$ $\frac{0}{0}$, De l'Hospital: $\lim\limits_{x\to0}\frac{-\cosh x}{6-24x}$ $x=0$ einsetzen: $\frac{-\cosh 0}{6-24\cdot0}=-\frac{1}{6}$	De l'Hospital: $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}/(1+e^{-x})}{-e^{-x}}}$ kürzen $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}}$ Grenzübergang: $e^{\frac{1}{1+0}}=e$	Zähler und Nenner durch x dividieren: $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$ Grenzübergang: $\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$	De l'Hospital: $e^{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1/(x\cdot\ln x)}{-1/(x-1)^2}}$ Doppelbruch auflösen: $e^{-\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2}{x\cdot\ln x}}$ De l'Hospital: $e^{-\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2(x-1)}{\ln x+1}}$ $x=0$ einsetzen: $e^{-\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2(1-1)}{\ln 1+1}}=e^0=1$

Man berechne die folgenden Grenzwerte:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(e+x))^{1/x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\ln x)^2}{2x-2e^{x-1}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\cos x}{x}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} (\cosh x)^{2/x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$

1. $$\lim_{x\to 0^+} (\ln(e+x))^{1/x} = \exp \lim_{x\to 0^+} \ln\left((\ln(e+x))^{1/x}\right) = \exp \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\ln(e+x))}{x} =$$
$$= \exp \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\ln(e+x)} \cdot \frac{1}{e+x}}{1} = \exp \frac{1}{e\cdot \ln(e)} = e^{1/e}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1-x)/(1+x)} \cdot \frac{(-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{-1-x-1+x}{(1+x)\,(1-x)} = -2$$

3. $$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{2x-2e^{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{2\cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2-2e^{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-e^{x-1}} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-e^{x-1}} \cdot \frac{1}{1} =$$
$$= -\lim_{x\to 1} \frac{1}{x\,e^{x-1}} = -1$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x + \sin x}{2\sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos 2x + \cos x}{2\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{-4+1}{2-0} = -\frac{3}{2}$$

5. $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{x\cdot \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin x + x\cdot \cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{\cos x + \cos x - x\cdot \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{\cos x + \cos x - x \cdot \sin x} = 0$$

6. $$\lim_{x\to 0} (\cosh x)^{2/x^2} = \exp \lim_{x\to 0} \ln\left((\cosh x)^{2/x^2}\right) = \exp \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2\cosh x)}{x^2} = \exp \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\sinh x}{\cosh x}}{2x} =$$
$$= \exp \lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x} = \exp \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cosh^2 x}}{1} = \exp \frac{1}{\cosh^2 0} = e$$

7. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{1}{4}$$

8. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

9. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2} = \exp \lim_{x\to 0} \ln\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}\right] = \exp \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} =$$
$$= \exp\left[3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}\right] = \exp\left[3\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin x/x} \cdot \frac{x\,\cos x - \sin x}{x^2}}{2x}\right] =$$
$$= \exp\left[3\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x\,\cos x - \sin x}{2x^2\,\sin x}\right] = \exp\left[3\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(1-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)) - (x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5))}{2x^2\cdot (x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5))}\right] =$$
$$= \exp\left[3\cdot \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5))}{2x^3 + \mathcal{O}(x^5)}\right] = e^{-\frac{3\cdot\frac{1}{3}}{2}} = e^{-1/2}$$

14 Lösungen - Satz von Taylor

• Wir bestimmen nun das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion

$$f(x) = \cosh(x^2 - x)$$

mit Entwicklungsmitte $x_0 = 0$:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cosh(x^2 - x) & f(0) = 1 \\ f'(x) = \sinh(x^2 - x) \cdot (2x - 1) & f'(0) = 0 \\ f''(x) = \cosh(x^2 - x) \cdot (2x - 1)^2 + 2\sinh(x^2 - x) & f''(0) = 1 \end{array}$$

Damit ist also

$$T_2(x; 0) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2} x^2 = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

• Nun bestimmen wir $T_2(x; \sqrt{\pi})$ der Funktion

$$f(x) = e^{\sin(x^2)}.$$

Für die Ableitungen ergibt sich nach Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{\sin(x^2)} & f(\sqrt{\pi}) = 1 \\ f'(x) = e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x & f'(0) = -2\sqrt{\pi} \\ f''(x) = 4x^2 \cos^2(x^2) e^{\sin(x^2)} - 4x^2 \sin(x^2) e^{\sin(x^2)} + 2\cos(x^2) e^{\sin(x^2)} & f''(0) = 4\pi - 2 \end{array}$$

Einsetzen in die Taylor-Formel ergibt hier:

$$T_2(x; \sqrt{\pi}) = 1 - 2\sqrt{\pi}\,(x - \sqrt{\pi}) + (2\pi - 1)\,(x - \sqrt{\pi})^2$$

• Nach der speziellen Relativitätstheorie ist die Energie eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Körpers gegeben durch:

$$E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

wobei c die konstante Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Nun wollen wir eine Näherung für kleine Geschwindigkeiten, also $v \ll c$ bzw. $\frac{v}{c} \ll 1$ ermitteln:

Dazu entwickeln wir nach Taylor, wobei als Variable sofort $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ wählen kann. Läßt man die Konstanten vorläufig beiseite, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x}} = (1 - x)^{-1/2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2}(1 - x)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{2(1 - x)^{3/2}} \end{aligned}$$

also $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ und für das Taylorpolynom ersten Grades (also die lineare Näherung) $T_1(x; 0) = 1 + \frac{x}{2}$. Setzt man nun die ursprünglichen Variablen und die Konstanten wieder ein, so ergibt sich

$$E(v) \approx m_0 c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = m_0 c^2 + \frac{m_0\, v^2}{2}$$

Der erste, konstante Term entspricht dabei der (üblicherweise nicht in Erscheinung tretenden) Ruheenergie, der zweite hingegen ist genau die kinetische Energie der klassischen Newtonschen Mechanik. Diese ist ja gerade der für $v \ll c$ gültige Grenzfall der umfassenderen Relativitätstheorie.

Man bestimme die Taylorreihe von $f(x) = \frac{x}{1+x}$ mit Entwicklungsmitte $x_0 = \frac{1}{3}$.	Man bestimme die Taylorreihe von $f(x) = (1 + x) \cdot e^x$ um $x_0 = -1$.
$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x)-x\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$ $f''(x) = -\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$ Man sieht: Das Vorzeichen wechselt, der Zähler wächst nach einer Fakultät, die Potenz des Nenners nimmt bei jeder Ableitung um Eins zu. Vermutung: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ für $n \geq 1$.	$f'(x) = e^x + (1+x)\,e^x = (1+1+x)\,e^x$ $f''(x) = e^x + (1+1+x)\,e^x = (1+2+x)\,e^x$ $f^{(3)}(x) = (1+3+x)\,e^x$ $f^{(4)}(x) = (1+4+x)\,e^x$ $(1+n)e^x$ ergibt abgeleitet $(1+n)e^x$, die Ableitung von $x\,e^x$ ist $(1+x)\,e^x$, also ergibt sich $f^{(n)}(x) = (1+n+x)\,e^x$ sogar für alle $n \in \mathbb{N}_0$
Für $f(x)$ gilt: $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}$, für alle Ableitungen (hier schon ab der ersten): $f^{(n)}(\frac{1}{3}) = (-1)^{n+1}\frac{n\,!}{(\frac{4}{3})^{n+1}} = (-1)^{n+1}\; n\,!\;(\frac{3}{4})^{n+1}$ Nun kann man die Reihe anschreiben: $T(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\;(\frac{3}{4})^{n+1}\;(x-\frac{1}{3})^n$	Einsetzen von $x = -1$ liefert: $f(-1) = 0 \qquad f^{(n)}(-1) = ne^{-1} + 0\cdot e^{-1} = \frac{n}{e}$ Damit erhält man für die Reihe: $T(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(x+1)^n}{e\,n\,!} = \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n-1)\,!}$

Man bestimme die Taylorpolynome zweiten Grades mit Entwicklungsmitte $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \cos(e^x - 1) \qquad\qquad g(x) = \sin(\pi\cos x)$$

Zuerst berechnet man die Ableitungen der Funktionen:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \cos(e^x - 1) & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin(e^x - 1)\,e^x & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos(e^x - 1)\,e^{2x} - \sin(e^x - 1)\,e^x & f''(0) = -1 \\
g(x) = \sin(\pi\cos x) & g(0) = 0 \\
g'(x) = -\pi\sin x\cos(\pi\cos x) & g'(0) = 0 \\
g''(x) = -\pi^2\sin^2 x\sin(\pi\cos x) - \pi\cos x\cos(\pi\cos x) & g''(0) = \pi
\end{array}$$

und erhält damit

$$T_{2,f}(x;0) = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad T_{2,g}(x;0) = \frac{\pi}{2}x^2.$$

Im ersten Fall würde man das auch problemlos über Ineinandereinsetzen von bekannten Entwicklungen erhalten,

$$f(x) = 1 - \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^4)\Big|_{u=1+x+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)-1} = 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

Im zweiten Fall müßte man für diese Vorgangsweise allerdings die Entwicklung des Sinus um $u_0 = \pi$ verwenden, nicht die (allgemein bekannte) um 0.

15 Lösungen (Partielle Integration)

Man berechne das Integral $I = \int x\,\sin x\,dx$.

$$I = \int x\,\sin x\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right| = -x\,\cos x + \int \cos x\,dx = -x\,\cos x + \sin x + C$$

Man berechne das Integral $I = \int \frac{x}{\cosh^2 x}\,dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int x\,\frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\cosh^2 x} & v = \tanh x \end{array}\right| = x\cdot\tanh x - \int \tanh x\,dx = \\ &= x\cdot\tanh x - \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx = x\cdot\tanh x - \ln\cosh x + C \end{aligned}$$

Notwendig ist dabei nur die Kennnis des (Fast-)Standardintegrals $\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$ und die Anwendung der logarithmischen Integration. (Die Betragsstriche sind hier unnötig, da der Cosinus hyperbolicus ohnehin nie negativ werden kann.)

Man berechne das Integral $I = \int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\,dx$.

$$I = \int \ln(x^2)\,\frac{1}{x^2}\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = \ln(x^2) & u' = \frac{2x}{x^2} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array}\right| = -\frac{\ln(x^2)}{x} + \int \frac{2}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{x} + C$$

Man berechne das Integral $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} x\,\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\sin^2 x} & v = -\cot x \end{array}\right| = -x\,\cot x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot x\,dx = \\ &= \left[-x\,\cot x + \ln|\sin x|\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} + \ln 2 \end{aligned}$$

Man berechne das Integral $I = \int_0^1 r^2\,\sqrt{1-r}\,dr$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 r^2\,\sqrt{1-r}\,dr = \left|\begin{array}{cc} u = r^2 & u' = 2r \\ v' = (1-r)^{1/2} & v = -\frac{2}{3}(1-r)^{3/2} \end{array}\right| = \\ &= \underbrace{-\frac{2r^2}{3}(1-r)^{3/2}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{4}{3}\int_0^1 r\,(1-r)^{3/2}\,dr = \left|\begin{array}{cc} u = r & u' = 1 \\ v' = (1-r)^{3/2} & v = -\frac{2}{5}(1-r)^{5/2} \end{array}\right| = \\ &= \frac{4}{3}\left\{\underbrace{-\frac{2r}{5}(1-r)^{5/2}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{2}{5}\int_0^1 (1-r)^{5/2}\,dr\right\} = -\frac{4}{3}\,\frac{2}{5}\,\frac{2}{7}\,(1-r)^{7/2}\Big|_0^1 = \frac{16}{105} \end{aligned}$$

16 Lösungen (Substitution)

Beispiel: Man berechne das Integral $\displaystyle\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$.

Das Integral sieht vielleicht schlimm aus, aber keine Panik. Einfacher wäre die Rechnung sicher, wenn man es nicht mit dem Ausdruck $e^{\sin x}$ zu tun hätte, sondern nur mit e^u. Nun kann man sich aber abhelfen, indem man einfach eine neue Variable einführt: $u = \sin x$. Damit erhält das Integral die Form $\int \cos x\, e^u\, dx$. Noch ist damit nicht viel gewonnen, schließlich muß weiter über x integriert werden, nicht über u. Nun sagt aber die Kettenregel für Differentiale: $dx = \frac{dx}{du} du$, wenn $x = x(u)$ ist. Eine weitere Regel sagt $\frac{dx}{du} = 1/\frac{du}{dx}$. Also berechnet man einmal $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, damit ergibt sich

$$dx = \frac{dx}{du}\, du = \left(\frac{du}{dx}\right)^{-1} du = \frac{du}{\cos x}.$$

Diesen Ausdruck kann man für dx einsetzen und so das Integral auf eine wirklich angenehme Form bringen: $\displaystyle\int \cos x\, e^{sinx}\, \frac{du}{\cos x} = \int e^u\, du = e^u + C$. Jetzt kann man die ursprüngliche Variable wieder einführen, die Lösung des Integrals lautet also $e^{\sin x} + C$. Im allgemeinen werden natürlich nicht alle x im Integranden wegfallen, in solchen Fällen muß man die Umkehrfunktion $x = x(u)$ einsetzen. In diesem Beispiel wäre $x = \arcsin u$.

Beispiel: Wir bestimmen das Integral $I = \int_1^e \frac{dx}{x\,(1+\ln x)}\, dx$:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{dx}{x\,(1+\ln x)}\, dx = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & 1 \to 0; \quad e \to 1 \\ x = e^u & dx = \frac{dx}{du}\, du = e^u\, du \end{array} \right| = \\ &= \int_0^1 \frac{e^u\, du}{e^u\,(1+u)} = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln|1+u|\Big|_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

Alternativ hätte man natürlich auch die Grenzen nicht berechnen brauchen, dafür dann aber rücksubstituieren müssen:

$$I = \int_B \frac{du}{1+u} = \ln|1+u|\Big|_B = \ln|1+\ln x|\Big|_1^e = \ln 2$$

Dabei bezeichnet B den nicht näher bestimmte Integrationsbereich in der neuen Variablen u.

Beispiel: Nun ermitteln wir das Integral $I = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\, dx$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\, dx = \left| \begin{array}{cc} u = e^x & 0 \to 1; \quad 1 \to e \\ x = \ln u & dx = \frac{dx}{du}\, du = \frac{1}{u}\, du \end{array} \right| = \int_1^e \frac{u}{(1+u)^2}\, \frac{du}{u} = \\ &= \int_1^e (1+u)^{-2}\, du = -(1+u)^{-1}\Big|_1^e = -\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e} \end{aligned}$$

Beispiel: Im Integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\, dv$ substituieren wir $e = v^2$. Das ergibt $v = \pm\sqrt{e}$ und für das Differential $\frac{de}{dv} = 2v$, also $dv = \frac{de}{2v} = \frac{de}{\pm 2\sqrt{e}}$. Nun betrachten wir die v-Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(0, +\infty)$ getrennt, im ersten Fall kommt das negative Vorzeichen der Wurzel zum Tragen, im zweiten das positive:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\, dv = \int_{-\infty}^{0} f(v)\, dv + \int_0^{+\infty} f(v)\, dv = -\int_{+\infty}^{0} f(-\sqrt{e})\, \frac{de}{2\sqrt{e}} + \int_0^{+\infty} f(\sqrt{e})\, \frac{de}{2\sqrt{e}} = \\ &= \int_0^{+\infty} f(-\sqrt{e})\, \frac{de}{2\sqrt{e}} + \int_0^{+\infty} f(\sqrt{e})\, \frac{de}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{e}) + f(-\sqrt{e})}{\sqrt{e}}\, de \end{aligned}$$