Ein distributionentheoretischer Zugang zur Kirillov-Theorie

Rainer Felix (Eichstätt)

Dem eher algebraischen Zugang Kirillovs zur Beschreibung der irreduziblen Darstellungen einer nilpotenten Liegruppe G durch die koadjungierten Bahnen im Dual der Liealgebra wird ein eher analytischer Zugang entgegengestellt, der die Distributionentheorie im Euklidischen Raum stärker ins Spiel bringt.

Ausgangspunkt ist ein von Godement vermutetes und von Schiffmann bewiesenes Resultat über zentrale positiv definite Distributionen, mit dessen Hilfe Rothschild die Spurformel auf sehr knappe und elegante Weise beweisen konnte.

Mittels des Rothschildschen Beweises kann jeder irreduziblen Darstellung eine (koadjungierte) Bahn zugeordnet werden. Nun kann – wiederum mit distributionentheoretischen Mitteln – ohne Rückgriff auf die Kirillovsche Konstruktion gezeigt werden, daß diese Zuordnung bijektiv ist und mit der Kirillov-Korrespondenz übereinstimmt. Die verwendeten Methoden erlauben auch eine einfache Formulierung der geometrischen Beschreibung darstellungstheoretischer Operationen wie Einschränkung und Induktion.

Als Anwendungsbeispiel dieser geometrischen Beschreibung wird die ~~konjugierte~~ Konjugations-Darstellung $U(a)f(x) = f(a^{-1}xa)$, $a \in G$, $f \in L^2(G)$, und deren Beziehung zur regulären Darstellung untersucht. Für sehr viele Gruppen stimmt die ~~konjugierte~~ Konjugations-Darstellung mit der regulären Darstellung der Gruppe G/Z (Z = Zentrum von G) überein, aber nicht für alle Gruppen.

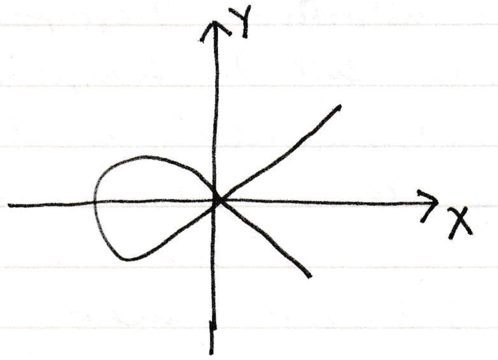
6. Januar 1989 Rainer Felix

SINGULARITIES

13 January 1989

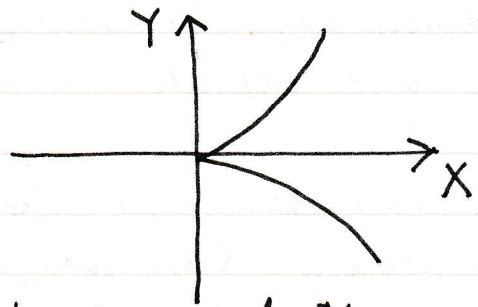
Shreeram S. Abhyankar
Math Dept, Purdue Univ., West Lafayette, IN 47907
U.S.A.

As simplest singularities of plane curves we have



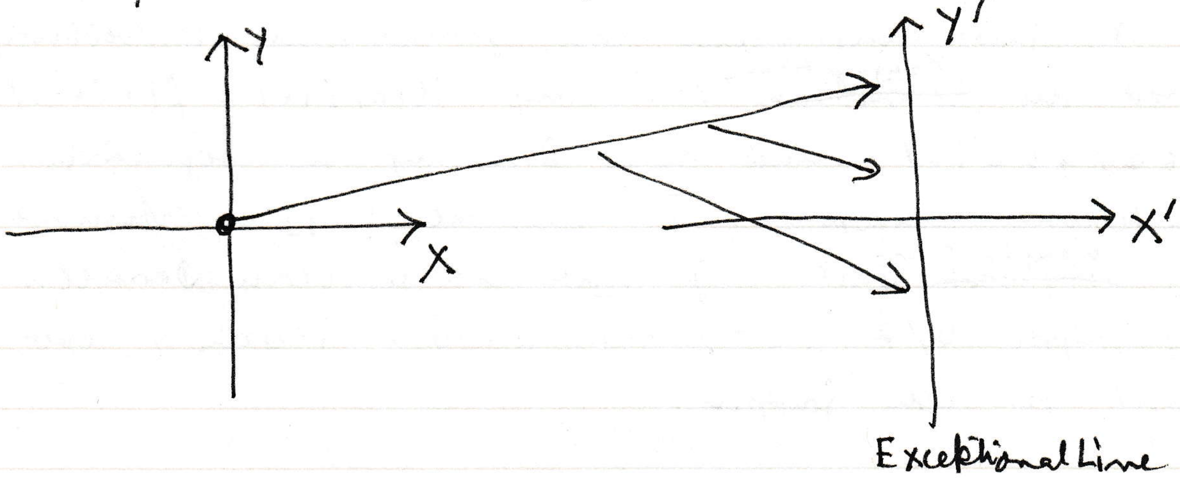
the nodal cubic
$$Y^2 - X^2 - X^3 = 0$$

and



the cuspidal cubic
$$Y^2 - X^3 = 0$$

having respective a node and a cusp at the origin. Note that a node is a double point having two distinct tangents whereas a cusp is a double point having only one tangent. To resolve these singularities we make a QDT = a quadratic transformation in the following sense. Between the (X, Y)-plane and the (X', Y')-plane consider the transformation whose equations are



$$X' = X$$
$$Y' = \frac{Y}{X}.$$
Now at the origin X & Y are both zero and

hence Y' has the indeterminate form $\frac{0}{0}$ and hence Y' takes all possible values. Thus the origin in the (X,Y)-plane explodes into ~~the line~~ Y'-axis i.e. the line $X'=0$ in the (X',Y')-plane. ~~So~~ To see this more convincingly, consider the inverse transformation given by

$$X = X'$$
$$Y = X'Y'.$$

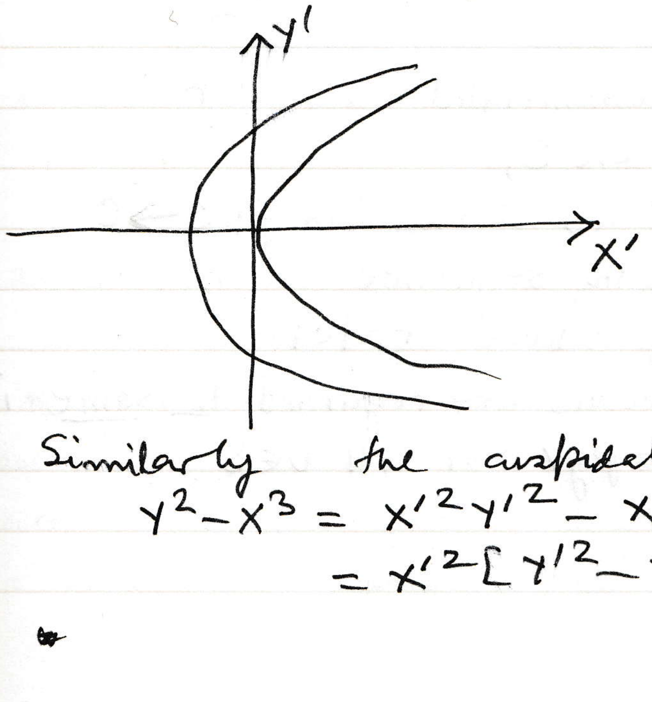
In this putting $X'=0$ & $Y'=$ any value we get $X=Y=0$, thus showing that the Y'-axis shrinks to the origin ~~$X=Y=0$.~~ in the (X,Y)-plane. Substituting this in the nodal cubic we get

$$Y^2 - X^2 - X^3 = X'^2Y'^2 - X'^2 - X'^3$$

and factoring out X'^2 we have

$$= X'^2[Y'^2 - 1 - X']$$

which is a parabola intersecting the exceptional line in two points



Similarly the cuspidal ~~c~~ cubic gives

$$Y^2 - X^3 = X'^2Y'^2 - X'^3$$
$$= X'^2[Y'^2 - X']$$

which is a parabola tangent to the exceptional line.

Generalizing this we obtain Max Noether's Theorem which says that the singularities of any plane curve can be resolved by a finite succession of QDT's.

Similar results hold for surfaces & varieties of higher dimensions.

Shreeram S. Abhyankar

An Intuitive Geometric Approach To The Polya Enumeration Theorem

January 20, 1989

Jean Pedersen
Santa Clara University, Santa Clara, CA.

We illustrate the Polya Enumeration Theorem by using it to count the number of distinct colorings of the vertices of a regular hexagon, which is allowed to move freely in space. We pay particular attention to the question of what constitutes distinctness.

What the theorem asserts is that if

S is a set of objects,

C is a set of "colors", enumerated $1, 2, 3, \dots, r$,

G is a group acting on S,

and we have an <u>assignment</u> as a function $\rho: S \to C$ where the <u>pattern</u> of ρ is the sequence

$\{|\rho^{-1}(1)|, |\rho^{-1}(2)|, \dots |\rho^{-1}(r)|\}$ where $r = |C|$

and two assignments of colors are regarded <u>the same</u> if $\exists\, g \in G$ such that $\rho' v = \rho g v$ for all $v \in S$.

Then the Pólya Enumeration Theorem enables one to count the number of distinct assignments for the given pattern.

Jean Pedersen

Non-cancellation in group theory and homotopy theory

Peter Hilton, 20/1/89

We show how to construct examples of groups $N, \bar{N}$ such that

(i) $N \ncong \bar{N}$; (ii) $N \lhd \bar{N}$ with quotient a finite cyclic group ; (iii) $\bar{N} \lhd N$ with quotient a finite cyclic group; (iv) $H_j N \cong H_j \bar{N}$; (v) $N \times C \cong \bar{N} \times C$, where C is infinite cyclic; (vi) if $N, \bar{N}$ are nilpotent they are in the same genus; (vii) we can calculate k so that the k^{th} direct powers $N^k, \bar{N}^k$ are isomorphic.

In fact, we can construct arbitrarily large finite families of groups $N_0, N_1, \ldots, N_{s-1}$ with these properties.

We may then use these constructions to describe spaces $X, \bar{X}$ (compact polyhedra, nilpotent if $N, \bar{N}$ are nilpotent), which are circle-bundles over the same base, such that

(i) $X \not\simeq \bar{X}$; (ii) X is a finite-sheeted cyclic covering of $\bar{X}$; (iii) $\bar{X}$ is a finite-sheeted cyclic covering of X; (iv) $H_j X \cong H_j \bar{X}$; (v) $X \times S^1 \simeq \bar{X} \times S^1$; (vi) if $X, \bar{X}$ are nilpotent they are in the same genus ; (vii) $X^k \simeq \bar{X}^k$ if $N^k \cong \bar{N}^k$.

In fact, N = group of free homotopy classes of S^1 into ΩX, and $\bar{N}$ is likewise related to $\bar{X}$. Again we can construct arbitrarily large finite families of such spaces.

Peter Hilton

Idempotents of Hecke algebras

Marie-France Vignéras 1/27/89

Let e be an idempotent in $\mathbb{C}[G]$, G any group. Kaplansky showed that

$e(1)$ is an algebraic totally real number, and

$0 < e(1) < 1$ if $e \neq 0,1$.

and Zaleski proved that: for a field $K \supset \mathbb{F}_p$, and an idempotent $e \in K[G]$

$e(1) \in \mathbb{F}_p$

From these two results, one deduces that $e(1) \in \mathbb{Q}$.

Kaplansky's proof can be extended to Hecke algebras (as defined in Bourbaki), and it would be interesting to describe the Hecke algebras such that Zaleski proof's extends.

For a reductive p-adic group, one proves using the existence of a discrete cocompact torsion free subgroup that for any idempotent e in the Hecke algebra,

"$e(1) \in \mathbb{Q}$"

This is a generalisation of the property that formal degrees are rational.

M.F. Vignéras

Einige Anwendungen der Arithmetik der Modulformen in der Arithmetischen Geometrie

Lösungen der Gleichung: $A - B = C$ können studiert werden, indem man arithmetische Eigenschaften der elliptischen Kurven $E: Y^2 = X(X-A)(X-B)$ untersucht. Zum Beispiel folgt die A-B-C-Vermutung von Masser und Oesterlé aus der Höhenvermutung für elliptische Kurven, die besagt: Zu gegebenem Zahlkörper K gibt es Konstanten c und d, so daß die Faltings Höhe $h(E)$ von E beschränkt ist durch $h(E) \leq c \cdot \log |N_E| + d$, wobei N_E die Norm des Führers von E ist. Es ist klar, daß aus dieser Abschätzung u.a. eine asymptotische Form der Fermatschen Vermutung folgen würde. Will man noch näher an die Fermatsche Vermutung herankommen, so muß man die Darstellungen der Galoisgruppe von K auf den Torsionspunkten von E untersuchen.

Eine mögliche Annäherung an die Höhenvermutung für elliptische Kurven könnte durch die Parshin-Konstruktion, angewendet auf Modulkurven $X(N)$, erreicht werden. Für $K = \mathbb{Q}$ ist der Zusammenhang mit Modulformen noch enger: Unter der Annahme, daß E eine modulare elliptische Kurve ist, ist die Höhe gleich dem Grad der (minimalen) modularen Parametrisierung; die von Ribet bewiesenen Resultate über modulare Darstellungen beweisen sogar, daß eine

Kurve $y^2 = X(X-z_1^p)(X-z_2^p)$ mit $z_1^p - z_2^p = z_3^p$ nicht modular sein kann. Folglich gilt: Falls die Taniyama-Vermutung ("Jede elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$ ist modular") richtig ist, so gilt auch die Fermatsche Vermutung.

7.2. 1989 Gerhard Frey

Some remarks on the Lichtenbaum conjecture for quadratic fields

Let F be a quadratic field over $\mathbb{Q}$. Define its zeta function $\zeta_F(s)$ to be (as usual): $\sum_{n\geq 1} a_n/n^s$, where a_n is the number of ideals of norm n in the ring of integers $\mathcal{O}_F$. It has a simple pole at $s=1$, and its extension to the whole s-plane is analytic at every every $s \neq 1$. It is also non-zero at s with real part > 1. One sees by the functional equation (of Hecke) that $\mathrm{ord}_{s=0}\, \zeta_F(s) = 1$ if F: real and 0 if F: complex, while $\mathrm{ord}_{s=-1}\, \zeta_F(s) = 0$ if F: real and 1 if F: complex. Let cl_F denote the ideal class group of F. Then a classical result (of Dirichlet and Dedekind) asserts that: (i) the group of units $\mathcal{O}_F^* = T \times \mathbb{Z}^r$, where the torsion subgroup T has order $w(F)$, the number of roots of unity in F, and $r=1$ if F: real and 0 if F: complex, and (ii) the leading coefficient of $\zeta_F(s)$ at $s=0$ is $(\# cl_F / w(F))$ if F: complex and $(\# cl_F/w(F)) \log \varepsilon$ if F: real, where ε is a fundamental unit. In the real quadratic case, Birch and Tate conjectured that $\zeta_F(-1) = \# K_2(\mathcal{O}_F)/w_2(F)$, where $w_2(F)$ is the largest n such that 2 annihilates $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})/\mathbb{Q})$. This was proved up to 2-torsion, and even the generalization to all totally real abelian number fields, by A. Wiles and B. Mazur. (This has now been extended to all totally real number fields by A. Wiles). When F is imaginary quadratic, there is a conjecture of Lichtenbaum which asserts that $\zeta'(F,-1)$ is $(\# K_2(\mathcal{O}_F)/w_2(F))$ times $D(\varepsilon_2)$ (up to 2-torsion), where ε_2 is a generator of the free part of $K_3(\mathcal{O}_F)$, which has rank 1 by Borel, and D is the regulator of Borel and Bloch defined by the imaginary part of the dilogarithm. For every prime p, there is also a p-adic analog (of the Riemann zeta function): $\zeta_p(s)$, which is defined by interpolation of the values at negative integers of $\zeta(s)$, which are rational by Euler. For every abelian character χ of $\mathbb{Q}$, we can also define the Kubota-Leopold p-adic L-function $L_p(\chi, s)$. In my recent joint work with S. Lichtenbaum, I have shown that, if all the p-adic $L_p(\chi,s)$'s do not vanish at $s=2$, then the Lichtenbaum conjecture above holds (up to 2-torsion). This uses an explicit version of results of Bloch and Coleman, ~~and~~ the ~~work~~ proof of Iwasawa's main conjecture by Mazur and Wiles (in the abelian case), and a comparison of analytic and algebraic p-adic regulators at $s=2$. I hope that, by using the ideas in a recent paper of Bloch and Kato, one can remove the plausible, but difficult to verify, hypothesis of the non-vanishing of $L_p(\chi, 2)$.

March 30, 1989.

Dinakar Ramakrishnan
Dept of Mathematics
California Institute of Technology
Pasadena, CA 91125
USA.

Homologische Endlichkeitseigenschaften einiger arithmetischer Gruppen

Eine Gruppe Γ heißt vom Typ F_n, wenn ein $K(\Gamma,1)$-Komplex Y existiert, der in allen Dimensionen $\leq n$ nur endlich viele Zellen besitzt. Dieses Konzept verallgemeinert endliche Erzeugbarkeit ($\Leftrightarrow F_1$) und endliche Präsentierbarkeit ($\Leftrightarrow F_2$).
Während für große Klassen S-arithmetischer Gruppen im Zahlkörperfall sich der Typ F_∞ nachweisen läßt (Borel, Serre 1974, 1976: $G(O_S)$ vom Typ F_∞, falls $O_S = \mathbb{Z}$ oder G reduktiv), ist die genaue Endlichkeitslänge im Funktionenkörperfall nur für wenige Serien von Gruppen bekannt:

1) (Stuhler) $SL_2(O_S)$ ist vom Typ $F_{|S|-1}$, nicht $F_{|S|}$.
2) (Abels, Abramenko) $SL_n(\mathbb{F}_q[t])$ ist vom Typ F_{n-2}, nicht F_{n-1}, falls $q \geq 2^{n-2}$ (Abels) bzw. $q \geq \max_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}$ (Abramenko).

Angedeutet wurden zum Schluß des Vortrags, die Methoden, mit denen das letzte Resultat hergeleitet werden kann und weswegen bzgl. der Größe des Grundkörpers eine Einschränkung zu machen ist (Operation von $SL_n(\mathbb{F}_q[t])$ auf dem zugehörigen Bruhat-Tits-Gebäude, simplizialer Fundamentalbereich, Linkbetrachtungen).

Peter Abramenko
Universität Frankfurt

14. April 1989

A Canonical Relationship between diffeomorphisms of S^1 and the Teichmüller spaces (via string theory).

In the "loop space" approach to (bosonic) string theory the Frechet Lie group $\mathrm{Diff}(S^1)$ occurs as fundamental, since it is the reparametrization group of a closed string. Two homogeneous spaces occuring as coadjoint orbits of $\mathrm{Diff}(S^1)$ — namely

$$M = \mathrm{Diff}(S^1) / \mathrm{Rotations}(S^1)$$

$$N = \mathrm{Diff}(S^1) / \text{Möbius}(S^1)$$
(i.e. $PSL(2,\mathbb{R})$)

(the only ones that are)
are holomorphically homogeneous Complex manifolds with an (essentially) uniquely determined homogeneous Kähler metric. These structures, & the curvature of these metrics was important for the physicists (Bowick, Rajeev, Zumino, Kirillov et. al.).

Now, the "sum-over-moduli" approach to string theory involves the Teichmüller spaces of Riemann surfaces. We show that there is a natural relation between these approaches by exhibiting a HOMOMORPHIC, HOLOMORPHIC & KÄHLER-ISOMETRIC embedding of $\mathrm{Diff}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ into the universal Teichmüller space $T(1)$.

Indeed, $T(1)$ is a complex Banach manifold and the Kähler structure induced on the embedded image of $\mathrm{Diff}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ is nothing but the (generalised) WEIL-PETERSSON Kähler metric.

We use the Kähler-metric identification result to show that, for example, the finite dimensional Teichmüller spaces (like T_g) [which sit within $T(1)$ as complex submanifolds] are "transverse" to $\mathrm{Diff}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$. This result connects with Mostow rigidity in (real) dimension 1 and Bowen's theorem asserting the fractality of G-invariant quasicircles.

April 21st 1989.

Subhashis Nag
International Centre for Theoretical Physics,
34100 Trieste, Italy

28 April 1989 г.

Gerade unimodulare euklidische Gitter.

Wir studieren gerade, unimodulare, euklidische Gitter in Dimension 32 (der erster unbekanter Fall). Wir betrachten Gitter ohne Wurzel, d.h. ohne $\lambda \in \Lambda$, $(\lambda, \lambda) = 2$. Das sind 32-dimensionale Anlogen des Leech'sche Gitter. Für solche Gitter sind verschiedene numerische invarianten eingeführt. Besonders interessant ist eine invariante λ, der nimmt die ganzzahlige Werte $1 \leq \lambda \leq 32$. Wenn $\lambda = 32$ dann wird das Gitter konstruiert aus einem ~~K~~ Kode, genau dasselbe wie Leech'sche Gitter aus dem Golayschen Kode und es gibt 5 solchen Gitter. Wenn $\lambda = 1$ dann ist das verbunden mit einer endlicher Steinersche Geometrie, die hat folgende parametern: die anzal von Punkten ist 496, jede Gerade besteht aus 6 Punkten und durch jede zwei verschiede Punkte geht genau ein Gerade. Der allgemeiner Fall ist eine Vermischung von diesen extremen Fällen. Auch ist es bewiesen, daß jede Gitter (ohne Wurzeln) ~~ist~~ wird durch kürzeste Vektoren erzeugt.

Boris Venkov

28. April 1989

LOMI, Leningrad
Fontanka 27, UdSSR.

5.5.89 Braid groups and Galois groups

Y. Ihara (Tokyo)

The talk is on the following comparison:

$\sigma = \{\exp(\frac{2\pi i}{N}) \to \exp(\frac{2\pi i a}{N})\}$

....

(A) Pure braid group P_r $(r \geq 2)$ | ~~Its profinite completion~~ The Galois group $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ($\mathbb{Q}$: the rationals) $\bar{\mathbb{Q}}$: its alg. closure

(B) The free group of rk r $F_r = \pi_1(\mathbb{C} - \{a_1, \cdots, a_r\}; +\infty) = \langle x_1, \cdots, x_r \rangle$ | Its (profinite) completion $\hat{F}_r = \pi_1^{alg}(\mathbb{C} - \{a_1, \cdots, a_r\}; +\infty)$ $a_i \in \mathbb{Q}$

(C) The natural faithful repr $\varphi : P_r \to \mathrm{Aut}\, F_r$ ($r = 2$ case is trivial) | The natural faithful rep $\varphi : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}\, \hat{F}_r$ ($r=2$ case; already interesting and fundamental)

(D) The Magnus anti 1-cocycle $\psi : P_r \to GL_{r-1}(\mathbb{Z}[F_r])$ | Anti 1-cocycle $\psi : G_{\mathbb{Q}} \to GL_{r-1}(\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{F}_r]])$

$(D)^{abel}$ the abelianization of ψ (the reduced Gassner rep) $\psi^{ab} : P_r \to GL_{r-1}(\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_r^{\pm 1}])$ ≀ the action of P_r on F_r/F_r'' ≀≀ the Alexander polynomial | ψ^{ab}: $G_{\mathbb{Q}} \to GL_{r-1}(\hat{\mathbb{Z}}[[u_1, \cdots, u_r]])$ ≀≀ The action of $G_{\mathbb{Q}}$ on $\hat{F}_r/\hat{F}_r''$ ≀≀ $r=2$ the Adelic beta series (special values Jacobi sum coefficients roots of circular units.

$(D)^{nil}$	?	$\psi^{nil}: G_{\mathbb{Q}} \to GL_{r-1}(\hat{\mathbb{Z}}[[u_1, \dots, u_r]]_{nc})$ non-commu. formal p. series coefficient of $\psi^{nil}(\sigma)$ $\parallel\!\mid$ formula mod N action of σ on "higher circular units"
(E)	The Jones polynomials	?
(F)	The finite factor groups of $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \text{link } \hat{\sigma})$	Constr. of Gal. extns over $\mathbb{Q}(t)$

⋮

[Names] ∃: V. G. Belyi, Y. Ihara, P. Deligne, Tak. Oda, G. W. Anderson, R. Coleman, M. Kaneko, Y. Yukinari ...

伊原康隆

12 May 1989

A new approach to multiplicative properties of solutions of quadratic Diophantine equation. (Of class rings of automorphes of integral quadratic forms)

One of the main specific features of quadratic Diophantine equations and systems is existence certain multiplicative properties of their solutions. Usually it is reflectet in existence of sertain algebraic system (a ring, as a rule) whose multiplication is in a sence compatible withe the Diophantine equations. Those are ring of integers of quadratic fields for the binary quadratic forms, rings of quaternions for forms in 4 variable, also rings of Hecke operators on spaces of Modular forms. In the talk a new ring is introduced, ~~which~~ ; the ring of classes of automorphes of systems of quadratic forms which is constracted of representations of quadratic forms by each other, which in particulary, puts together two kind of rings mentioned above: the rings of compositions of solutions (which exist only in cases of 2 and 4 variables) and Hecke rings, but have the advantage that they are defined for all nondegenerate quadratic form, including indefinite forms. The fist results on the structure of the rings of classes of automorphes were discussed.

12.05.1989

Anatoli Andrianov
Mathematical Institute
Fontanka 27, Leningrad D-11 USSR

17 May 1989 Reflection groups in Lobachevsky spaces and Del Pezzo surfaces.

In the theory of discrete groups generated by reflections it was proved that there are not reflection groups with fundamental polyhedron of finite volume in Lobachevsky space of dimensions > 995. We show that the same methods can be applied to other closed polyhedrons in Lobachevsky spaces. They are called log-terminal polyhedrons. We apply these results to the classification of algebraic Del Pezzo surfaces with log-terminal singularities.

Steklov Mathematical Institute, Moscow. Nikulin Никулин

19 May 1989

Dedekind sums and elliptic functions.

H. Ito (Nagoya)

Dedekind sums have been studied since 19-th century. Recently a very interesting generalization of the classical Dedekind sums was obtained by Sczech. These Dedekind sums can be viewed from the point of view of Eisenstein cohomology due to Harder. I explain about Dedekind sums from the point of view.

Let

$k/\mathbb{Q}$: a finite extension

G : a semi-simple algebraic group $/k$, $\mathrm{rank}_k G = 1$

$k_\infty = k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$

$G_\infty = G(k_\infty)$

K : a maximal compact subgroup of G.

$X = G_\infty / K$

$\Gamma \subset G(k)$: an arithmetic subgroup.

To prove that

every element of $H^*(\Gamma \backslash X, \mathbb{C})$ can be represented by a harmonic form,

Harder defined a subspace $H^*_{\mathrm{inf}}(\Gamma\backslash X, \mathbb{C})$, using Eisenstein series, such that

$$H^*(\Gamma\backslash X, \mathbb{C}) = H^*_!(\Gamma\backslash X, \mathbb{C}) \oplus H^*_{\mathrm{inf}}(\Gamma\backslash X, \mathbb{C})$$

where

$$H^*_!(\Gamma\backslash X, \mathbb{C}) = \{ [\omega] ;\ \omega \text{ is compactly supported} \}$$

In general, not so much is known about the space $H^*_{\mathrm{inf}}(\Gamma\backslash X, \mathbb{C})$. However, if $G = SL_2$, Harder has given a good description of $H^*_{\mathrm{inf}}(\Gamma\backslash X, \mathbb{C})$. Furthermore, if $k = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ $(0 < d \in \mathbb{Z})$, then we can evaluate explicitly periods of classes in $H^1_{\mathrm{inf}}(\Gamma\backslash X, \mathbb{C})$, and in this way we get Dedekind sums.

If $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $G = SL_2$, these Dedekind sums are constructed with elliptic function. They have many arithmetic application. For example,

1) Algebraicity of periods.
2) Special values of L-series of a certain type.
3) Relation to power residue symbols.
4) Kummer's criterion.

To consider generalization to other algebraic groups $G \neq SL_2$ will be interesting.

Hiroshi Ito

25 May 1989 <u>Delta Matroids</u>

Some of the reasons for interest in matroids are: the existence of many concrete classes of examples, the fact that one can optimize any linear function over them by a greedy algorithm, the fact there is a nice polyhedral description (i.e. linear programming interpretation of optimization) and the existence of a number of beautiful constructions of new matroids from old. Recently a more general class of objects, called delta matroids, has been discovered independently by Dress and Havel, Bouchet, and Chandrasekaran and Kabadi. To a remarkable extent the above properties of matroids extend to the new class. We describe some of the details giving results of the above researchers, as well as some new ones.

W. H. Cunningham
(Carleton U., Ottawa, and U. Bonn)

2 June 1989 <u>p-group actions on manifolds.</u>

Let G be a finite group acting on a manifold M^m. One of the first questions one may ask is "Is the fixed set of G non-empty?" i.e. if $M^G = \{m \in M \text{ s.t. } gm = m \text{ \underline{all} } g \in G\}$, is $M^G \neq \phi$? If G is of composite prime order, then M^G is rather flexible, for example Conner-Floyd showed $\mathbb{Z}/pq$ may act without fixed points on $\mathbb{R}^m$, and Oliver has obtained comprehensive results for general G acting on D^m or $\mathbb{R}^m$ (D^m the closed disk). On the other hand for p-groups G, the situation is better behaved. For example Smith showed in 1930's that a p-group G acting on $\mathbb{R}^m$ fixes some point.

Restricting to p-groups G:
"Give criteria for M^G to be non-empty, in terms of properties of M, and invariants of the action".

<u>Theorem</u> Let G be an abelian p-group, $p \neq 2$ acting on a manifold M^m, and let $f: M^m \to N^m$ be a G-map into another, with degree $f \not\equiv 0 \bmod p$. For $x_0 \in N^G$, $f^{-1}(x_0) \cap M^G \neq \phi$.
<u>Cor.</u> G, M, f, N as above, $M^G \neq \phi \Leftrightarrow N^G \neq \phi$.
<u>Cor.</u> G abelian p-group ($p \neq 2$) acting on M, then $M^G \neq \phi \Leftrightarrow \exists$ G-map $f: M^m \to V \cup \infty$ of degree $\not\equiv 0 \bmod p$, where V is a linear representation, $V \cup \infty$ the 1-point compactification.

(For smooth actions see Inventiones 1987, but now holds for M a $\mathbb{Z}_{(p)}$-homology manifold).

The theorem may applied more delicately to show that if M^G is a discrete (finite set) then the local (linear) representations at the fixed points "add up to zero" in an oriented homotopy sense, mod p. For example if the representations are all the same (in an oriented sense) the number of fixed points is divisible by p.

These results are false for non-abelian p-groups. They hold for abelian 2-groups with some strong orientability assumptions.

W. Browder (Princeton Univ., z.Z. Max-Planck-Inst., Bonn).

9. June 1989. Geometric Hyperplanes.

Let $\Gamma = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ be an incidence system of points and lines (with no repeated lines so, lines may be regarded as sets of points). A subspace is a subset S of L such that $|L \cap S| \geq 2$ implies $L \subseteq S$. A geometric hyperplane is a subspace H of Γ such that $L \cap H \neq \emptyset$ for each each line L of $\mathcal{L}$.

These arise in Theorems based on affine planes — for example Thm (Cohen - Shult) Let Γ be a gamma space in which any two intersecting lines which lie in a clique, lie in an proper affine plane subspace. Suppose for each affine plane A and point x not in A, $x^\perp \cap A$ is never a single point. Then Γ is a non-degenerate polar space with a geometric hyperplane removed.

A projective embedding $e: \Gamma \longrightarrow P(V)$ is a map of points of Γ into points of projective space $P(V)$ and lines ~~onto~~ into projective lines of $P(V)$ so that the point map is injective with images spanning $P(V)$ and as p ranges over all points of a line L, the images of p "fill up" all projective points incident with the image of L. Let H_V be an ordinary projective hyperplane of the projective space $P(V)$. Then ~~[illegible]~~ $e^{-1}(e(\mathcal{P}) \cap H_V) = H$ is a geometric hyperplane of Γ. Do all geometric hyperplanes arise this way? This is true for $\Gamma = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ the truncation of a projective space to points and lines (the geometry $A_{n,1}$) and from theorems of Buekenhout-Lefevre and Dienst it is true for all hyperplanes of classical (embeddable) polar spaces. Recent results of Cooperstein-Shult & Shult yield:

Theorem 1. Let $\Gamma=(P,\mathcal{L})$ be one of the following Lie incidence geometries: (i) the half-spin geometry $D_{5,5}(k)$, k a field,
(ii) the geometry $E_{6,1}(k)$ k a field,
(iii) the Grassman spaces $A_{n,2}(k)$ or $A_{n,3}(k)$ where $|k|>2$, k a field.
Then every geometric hyperplane of Γ arises from an embedding.

There are just 2 such hyperplanes for D_{55}, 3 for $E_{6,1}$, and those for the Grassman spaces correspond to alternating bilinear and trilinear forms.

Also ~~we~~ have

Theorem 2. Let H be a geometric hyperplane of a near hexagon $\Gamma=(P,\mathcal{L})$ with quads, with the property that $H\cap Q$ is a star, for each quad Q.
(1) Then H is generalized hexagon isometrically embedded in Γ
(2) Moreover if Γ is a finite regular near hexagon, then Γ is a classical dual polar space of type $\Omega(7,q)$ and H is the generalized hexagon of type $G_2(q)$ arising from ~~a~~ projective hyperplane of the 8-dimensional spin module, which provides an embedding of Γ.

Last remarks: Dynkin's algorithm implies that ~~the~~ virtually every Lie incidence geometry $(\mathcal{L}_{k,e})$ ($\mathcal{L}_k$ = some Dynkin diagram of k nodes) has an embedding, one provided by the highest weight module V_λ for ~~minimal~~ fundamental weight λ associated with node k. With the possible exception of $F_{4,1}$, it seems likely that all geometric hyperplanes of these modules arise from hyperplanes of these weight modules.

Ernest E. Shult
Kansas State University
(visiting Freiburg 1988-89
via A.v. Humboldt Stiftung)

Siegelsche Modulformen und Thetareihe

16.6.88

Einer positiv definiten quadrat. Form $x^t S x = \sum_{i,j=1}^{m} s_{ij} x_i x_j$ $(2s_{ij}\in\mathbb{Z},\ s_{ii}\in\mathbb{Z})$

ordnet man die Siegelsche Thetareihe n-ten Grades

$$\vartheta_S^n(Z) = \sum_{X\in\mathbb{Z}^{(m,n)}} e^{2\pi i\,\mathrm{Spur}(X^t S X\cdot Z)}$$

zu; dabei ist $Z\in\mathbb{H}_n$ (= Siegelscher Halbraum n-ten Grades)

Offenbar ist ϑ_S^n eine Klasseninvariante von S;

es stellt sich das folgende Problem:

gegeben seien $S_1,\dots,S_e$, alle m-reihig, ganz, $\det(S_i)=D$, die S_i paarweise inäquivalent.

Sind dann die $\vartheta^n_{S_i}$ paarweise verschieden (oder stärker: linear unabhängig)??

Die Antwort hängt von n ab – für $n\geq m$ ist die Antwort trivialerweise „ja"!
Ein arithmetisches Resultat von Kitaoka (1976) besagt, daß auch $n\geq m-1$ genügt; eine Vermutung von Andrianov–Yoshida besagt, daß $n\geq\frac{m}{2}$ genügen sollte – diese Vermutung ist i. allg. falsch (sofern man lineare Unabhängigkeit untersucht).
Im Vortrag werde ich den Fall $m=4$, $S\sim$ Normformen zu Idealen in Quaternionenalgebren näher untersuchen. Hier kann man genau angeben, in welchem Umfang die obige Vermutung falsch ist. Der „Raum der Gegenbeispiele" wird parametrisiert durch gewisse elliptische Spitzenformen vom Gewicht 2, deren L-Reihe an der Stelle $s=1$ verschwindet.
Die noch möglichen linearen Abhängigkeiten sind allerdings von der Gestalt, daß man immer noch bekommt, daß

$$\vartheta_S^{(2)} \neq \vartheta_{\tilde S}^{(2)}, \quad \text{für } S \text{ inäquivalent zu } \tilde S.$$

Diese Resultate gehören zu einem gemeinsamen Projekt mit R. Schulze-Pillot.

S. Böcherer, Freiburg

21 June 1989

Regular decompositions of hyperbolic spaces and manifolds.

We present fixe methods that make it possible to obtain discrete groups of motions of hyperbolic space by means of the synthetic geometry of this space: the method of variation of one parameter, the method of variation of several ~~parametkes~~ parameters, the method of truncation of ideal faces the method of gluing and the method of buffer polyhedra. The action of the method is illustrated by examples.

Также были даны примеры построения многообразий постоянной отрицательной кривизны, обладающие теми или иными интересными свойствами и указан путь нахождения групп движений таких многообразий

Mathematical Institute, Moldavia, USSR
Kishinev

V. Makarov
В. С. Макаров.

June 23, 1989

Stability Conditions for n-Predators (Preys) - One-Prey (Predator) Systems

M. Farkas (Budapest)

A simple classical criterion due to Rosenzweig and MacArthur is generalized to $n+1$ dimensional systems. Either there are n predators competing for a single prey species or there are n prey species, and a predator is feeding on them. Geometrical and population dynamical intuition is gained from the $n=2$ case. Conditions are given for the existence of a positive equilibrium point and then sufficient conditions are proved for the asymptotic stability of the latter. The whole problem and the results are related to bifurcation theory, to conditions of permanence, and even to graph theory.

Farkas

June 28, 1989

Analytic Properties of Densities of Stable Semigroups of Measures on Nilpotent Lie Groups

Let N be a homogeneous group and $\{\mu_t\}$ a stable semigroup of measures on N. Suppose moreover that $\mu_t(dx) = h_t(x)\,dx$, where $h_t \in L^1(N)$ and dx is Haar measure on N. Then for every $0 < \alpha' < \alpha$, α being the characteristic exponent of $\{\mu_t\}$, there exists an $\Omega \in L^1(\Sigma)$ such that

$$h_t(x) \leq t^{\alpha'/\alpha}\,\Omega(\bar{x})\,|x|^{-Q-\alpha'}, \qquad x \in N \setminus \{0\},$$

and

$$\int_\Sigma |\Omega(\omega\bar{x}) - \Omega(\bar{x})|\,d\bar{x} < A\,\|\omega - I\|^{\varepsilon}$$

for some constants $A, \varepsilon > 0$, where ω is a rotation of the Lie algebra $\mathfrak{n}$ of N and $d\bar{x}$ stands for the rotation invariant smooth measure on $\Sigma = \{\bar{x} \in N : |\bar{x}| = 1\}$.

As a consequence, we get a weak type (1,1) estimate for the maximal function

$$f \longmapsto \sup_{t>0} |f * \mu_t(x)|$$

which is valid even if the measures μ_t are no longer absolutely continuous with respect to Haar measure on N. This result is proved by using a theorem of E. Stein.

Paweł Głowacki (Wrocław)

Gibt es eine Quotientheorie für beliebige Hopfalgebren?

Der Einfachheit halber sei k ein Körper, $\otimes = \otimes_k$.
Eine Hopfalgebra H ist eine Algebra und eine Coalgebra über k, so daß die Coalgebrastruktur Abbildungen $\Delta: H \to H\otimes H$, $\varepsilon: H \to k$ Algebra-abbildungen sind, und wobei eine Antipode $S: H \to H$ existiert mit $\sum x_1 S(x_2) = \varepsilon(x)\cdot 1 = \sum S(x_1)x_2$, wobei wie üblich $\Delta(x) = \sum x_1 \otimes x_2$ abgekürzt wird.
Hopfalgebren, die nicht kommutativ oder co-kommutativ sind, kommen heute in der Physik unter dem Namen Quantengruppen vor.
Dadurch soll der Gruppenbegriff verallgemeinert werden. Kommutative bzw. cokommutative Hopfalgebren beschreiben affine bzw. formale Gruppen über k. Eine H-Galoiserweiterung ist eine Erweiterung von Algebren $B \subset A$, wobei A eine H-Comodulstruktur $\Delta_A: A \to A\otimes H$ besitzt, die Algebraabbildung ist, und $B = A^{co\,H} := \{a \in A \mid \Delta_A(a) = a \otimes 1\}$ der Ring der co-invarianten Elemente ist.

Sind A und H kommutativ, so bedeutet dies, daß die affine Gruppe $Sp(H)$ von rechts auf dem affinen Schema $Sp(A)$ mit affinem Quotienten (gebildet in der Kategorie der affinen Schemata) $Sp(B)$ operiert.

<u>Satz</u>: Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) a) A ist als H-Comodul injektiv

b) $\mathrm{kan}: A \underset{B}{\otimes} A \to A \otimes H,\ x \otimes y \mapsto \sum x y_0 \otimes y_1$, ist surjektiv

2) $M \mapsto M \underset{B}{\otimes} A$ ist eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der B-Rechtsmoduln und der (A,H)-Hopfmoduln

3) $M \mapsto A \underset{B}{\otimes} M$ ist eine Äquivalenz

4) a) ${}_B A$ ist treuflach

b) kan ist bijektiv

5) a) A_B ist treuflach

b) kan ist bijektiv.

Dieser Satz kann als ein Indiz dafür gesehen werden, daß eine Quotiententheorie für beliebige Hopfalgebren existiert. Sind A und H kommutativ, so enthält er Ergebnisse von U. Oberst und Cline, Parshall, Scott (1977) über die Frage, wann Quotienten (in der Kategorie der Schemata) affin sind, insbesondere die Aussage:

Sei G' eine abgeschlossene Untergruppe der algebraischen Gruppe G. Dann ist G/G' genau dann affin, wenn der Induktionsfunktor von den G'- in die G-Moduln exakt ist.
Die duale Version des Satzes gilt ebenfalls und ergibt, spezialisiert auf cokommutative Coalgebren und Hopfalgebren, den Hauptsatz über die Quotientenbildung bei freien Operationen formaler Gruppen nach Gabriel.
Auch von dem Hauptsatz über die Quotienten bei freien Operationen endlicher Gruppenschemata nach Grothendieck, Gabriel gibt es eine Version für beliebige Algebren und Hopfalgebren.

H.-J. Schneider

Ziemlich symmetrische hyperbolische 4-Mannigfaltigkeiten

Satz. Die total Mannigfaltigkeit Σ von einem Scheiben-bündel über eine orientierbare geschlossene Fläche M vom Geschlecht ~~g~~ g, Eulercharakteristik $\chi = 4 - g$, mit Selbstschnitt $\chi^{\perp}$ der 0-Sektion, kann eine Vollständige hyperbolische Struktur haben $\Sigma = \mathbb{H}^4/\pi_1(M)$ ~~haben~~, wenn $|\chi^{\perp}/\chi| \leq 1/3$, und mit einer Zyklische Gruppe C_{4g} von Isometrien. Die verwandte kompakte Kreis-bündel hat eine konform euklidische Structure. Die Konstruktion geht mit Pflasterungen von $\mathbb{H}^4$, mit Pflaster die auch C_{4g}-symmetrie haben, mit Identifizierung von gegenüber liegende "Seiten". Die Symmetrie ist die von einem regelmäßigen $4g$-gon in S^3 auf einen geschlossene Helix

$$(z_1, z_2) = (\cos c \cdot e^{qit}, \sin c \cdot e^{pit}) \quad q = 1$$

N. H. Kuiper Institut des Hautes Études Scientifique. Bures sur Yvette Frankreich.

(5.10.89)

Space groups to given fundamental domain

Emil Molnár (Budapest) 13 October 1989
Universität Bielefeld

Each isometry group G, acting discontinuously on a simply connected space M^d of constant curvature, has a fundamental polyhedron P_G such that the G-images of P_G tile M^d. The isometries, mapping P_G onto its facet neighbours in the fundamental tiling, generate G and induce on P_G an involutive facet pairing and further identifications on lower dimensional faces, down to vertices.

The inverse question is due to H. Poincaré (1882). If we start with a polyhedron P, which conditions do guarantee that P will be a fundamental domain for a discontinuous isometry group in a space of constant curvature. Poincaré developed this method on the Bolyai-Lobachevskian hyperbolic plane and indicated the 3-dimensional extension under some restricting assumptions. B. Maskit (1971) completed the statement and proved it, assuming that the group G consists of orientation preserving isometries. T. Morokuma (1978) attempted the higher dimensional generalization, but he made very restricting assumptions.

Recently the lecturer has extended the Poincaré theorem in an algorithmic way, using a method of A.D. Aleksandrov. If we are given a polyhedron P combinatorially, with a d-dimensional flag structure, then an algorithm enumerates all the involutive facet pairings I on P. For a fixed I it determines the possible stabilizers for the lower dimensional face equivalence classes up to some freedom. Namely, the order ν_e of the "rotation subgroup", fixing pointwise a $d-2$-dimensional face, can arbitrarily be given for each $d-2$-face class e (e means edge in dimension 3).

Then the question is whether P and the group $G(P, I, \{\nu_e\})$ are realizable metrically in a space of constant curvature. This leads to an inductive geometrical procedure.

We illustrate the method by indicating the enumeration of all crystallographic groups for Euclidean simplices and cube. The 3-dimensional algorithm has been implemented on computer in a joint work with István Prok (Budapest, Technical University).

New hyperbolic groups and compact hyperbolic 3-manifolds can be constructed in this manner, e.g. nonorientable infinite series, Archimedean "football" manifolds and manifolds, being Seifert fibre spaces, which cannot wear any metric of constant curvature.

Eötvös Loránd University
Department of Geometry
Budapest

Molnár Emil

Doppelgebäude und Kac-Moody Gruppen (20.10.1989)

The theory of spherical buildings (buildings with finite Weyl groups) is rather rich in results such as: complete classification in rank ≥ 3 (irreducible type), structure of automorphism groups, Moufang condition etc. An essential reason for this is the existence in such buildings of opposite chambers. Inspired by work of the speaker on Kac-Moody groups, M. Ronan had the idea that also by nonspherical buildings one could try to ascribe opposite chambers to chambers of the building, but these opposite chambers would lie in another building. Axiomatisation of that concept (by Ronan and the speaker) lead to the notion of twin buildings ("immeubles jumelés"), to which many of the results concerning spherical buildings can be extended. As one of several applications one gets a geometrical approach to a large class of Kac-Moody groups.

Jacques Tits
Jacques Tits (Paris)

Computational complexity in polynomial algebra (27.10.89)

Recently some algorithms with the better complexity bounds for the problems in polynomial algebra were designed than was known before. Namely, a polynomial-time algorithm for polynomial factoring, subexponential-time algorithms for solving systems of algebraic equations over algebraically closed fields and systems of polynomial inequalities over real closed fields.

D. Yu. Grigor'ev (Leningrad, LOMI)

Topologie Projektiver Ebenen (3.11.1989)

Sei P der Punktraum und L eine Gerade einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene. Seit den 50er Jahren vermutet man, daß L wie in den klassischen Fällen über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ eine Mannigfaltigkeit sein muß, und zwar eine Sphäre der Dimension $l = 1, 2, 4,$ Für Geraden einer Dimension $l \leq 2$ weiß man dies seit längerem; in diesen Fällen hat auch P den klassischen Homöomorphietyp. Neuerdings konnte mit Mitteln der Garbentheorie gezeigt werden, daß L allgemein für $l < \infty$ eine Homologiemannigfaltigkeit ist. Das genügt um zu zeigen, daß L und die multiplikative Loop $L \setminus \{0, \infty\}$ den Homotopietyp von Sphären haben. Aufgrund eines bekannten Satzes von Adams folgt $l = 1, 2, 4$ oder Auch die Homologie von P läßt sich daraufhin berechnen: sie ist dieselbe wie in den klassischen Ebenen.

Rainer Löwen (Braunschweig)

THE ENUMERATION OF EVOLUTIONARY TREES

L.R. Foulds
School of Management Studies
University of Waikato
Hamilton
NEW ZEALAND

Abstract

Trees are used in Biology to illustrate postulated ancestral relationships between species and are often called phylogenetic trees. They can be characterized in graph theoretic terms by certain classes of labelled trees. Disjoint subsets of the labelling set are assigned to tree vertices so that all pendant vertices and any vertices of degree two are labelled. Here we determine exact and asymptotic numbers for various classes of trees. This paper completes work on the enumeration of various classes of phylogenetic trees.

Of interest to: Combinatorial Mathematics, Computer Science, Biology

16.11.81

[illegible]

co

ne

k

a

ne

su

b

p

f

17. 11. 1989

Some remarks on the trace formula for $U(1,2)$ and $U(3)$

We consider two unitary groups $G = U(1,2)$ and $G' = U(3)$; G is a quasi-split $\mathbb{Q}$-group and G' is an inner form of G. Moreover we have $G(\mathbb{Q}_\ell) \cong G'(\mathbb{Q}_\ell)$ at every finite place ℓ of $\mathbb{Q}$. For an irreducible representation ρ of $G'(\mathbb{R})$, we attach a holomorphic discrete series π of $G(\mathbb{R})$ so that there exist "character relations" between ρ and π. Let $\mathcal{U} = U_p \times \prod_{\ell \neq p} U_\ell$ be an adelic open compact subgroup of $G(\mathbb{A}_f) = G'(\mathbb{A}_f)$, where U_p is a fixed minimal parahoric subgroup of $G(\mathbb{Q}_p) = G'(\mathbb{Q}_p)$. We define the space of automorphic forms $\mathfrak{S}_\rho(\mathcal{U})$ on $G'(\mathbb{A})$ and the space of cusp forms $S_\pi(\mathcal{U})$ on $G(\mathbb{A})$. Then we have, for Hecke operators $T(\ )$,

$$\mathrm{tr}\, T(St_p \otimes \bigotimes_{\ell \neq p} \varphi_\ell) \,|\, \mathfrak{S}_\rho(\mathcal{U}) = \mathrm{tr}\, T(St_p \otimes \bigotimes_{\ell \neq p} \varphi_\ell) \,|\, S_\pi(\mathcal{U}).$$

Here St_p is a spherical function on $G(\mathbb{Q}_p) = G'(\mathbb{Q}_p)$ which is closely related with the Euler-Poincaré function of Kottwitz, and φ_ℓ is an arbitrary spherical function on $G(\mathbb{Q}_\ell) = G'(\mathbb{Q}_\ell)$.

H. Koseki (Univ. Tokyo, MPI)

24. 11. 89

Holomorphe Abbildungen zwischen Gebieten in komplexen Mannigfaltigkeiten

Seien D, D' beschränkte Gebiete mit C^∞-glatten bzw. C^ω-glatten Rändern. Die folgenden beiden Fragen wurden diskutiert:

a) Wann gibt es eigentl. holomorphe Abbildungen $f: D \longrightarrow D'$

b) Gilt für solche Abbn. automatisch $f \in C^\infty(\bar{D})$ bzw. $f \in \mathcal{O}(\bar{D})$ (im reell-analytischen Fall)

Die Verhältnisse sind für $n > 1$ wesentlich komplizierter als für $n = 1$. Erst seit 1974 wurden zunehmend allgemeine Antworten für $n > 1$ gefunden, ohne daß die Fragen bis heute aufgeklärt wären. Die Frage a) führt im C^∞-Fall auf komplizierte Untersuchungen über die globale Hypoelliptizität des $\bar{\partial}$-Neumann-Problems. Der C^ω-Fall wurde mit einer Verallgemeinerung des Schwarzschen Reflektionsprinzip auf $n > 1$ behandelt.

Klas Diederich
Universität Wuppertal

29.11.89

Endlichkeitsfragen im Zusammenhang mit Hilbert's 14. Problem

Ausgehend von Hilbert's 14. Problem wird Nagata's Gegenbeispiel als Beispiel einer Idealtransformierten, die nicht von endlichem Typ ist, diskutiert. Es wird ein Kriterium betrachtet, wann diese Art Idealtransformierte von endlichem Typ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein Veronesescher Unterring existiert, dessen Dimension des Ausnahmefaserringes über dem irrelevanten Ideal nicht den maximalen Wert hat. Als Anwendung zeigt sich beispielsweise, daß die symbolische Aufblasung des Koordinatenringes einer elliptischen Kurve in einem Primideal, das nicht zu einem Torsionspunkt gehört, keine Algebra von endlichem Typ ist. Beispielklassen, für die die symbolische Aufblasung endlich ist, sind monomiale Raumkurven im dreidimensionalen affinen Raum. Abschließend wird die Frage behandelt, wann eine beliebige Idealtransformierte endllich ist. Befriedigende Ergebnisse liegen vor, wenn der zugrundeliegende Ring zweidimensional ist.

Peter Schenzel
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

1. Dez. 1989

Sei M eine AW^*-Algebra und $\mathcal{U}_\infty$ der induktive Limes der unitären Gruppen von $M \otimes \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Ist $\tau : [0,1] \to \mathcal{U}_\infty$ eine geschlossene Kurve, so bezeichne $[\tau]$ die Klasse von τ in $\pi_1 \mathcal{U}_\infty$. Wir nehmen an, M sei vom Typ II_1. Dann ist $\pi_1 \mathcal{U}_\infty$ nichttrivial und für jedes $\alpha \in \pi_1 \mathcal{U}_\infty$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ gibt es ein β mit $\alpha = n \cdot \beta$. Sei S_k ein hermitesches Element aus M mit endlichem rationalen Spektrum. n_k sei der Hauptnenner der Spektralwerte von S_k. Dann ist

$$\sigma_{n_k S_k}(t) := \exp(2\pi i n_k S_k t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

eine geschlossene Kurve in $\mathcal{U}_\infty$. Definiere

$$\varphi(S_k) := \frac{1}{n_k} [\sigma_{n_k S_k}] \in \pi_1 \mathcal{U}_\infty$$

Ist S ein beliebiges hermitesches Element aus M und (S_k) eine Folge hermitescher Elemente mit endlichem rationalem Spektrum, und mit $\lim S_k = S$ (in der Normtopologie), so ist

$$\varphi(S) = \lim \varphi(S_k)$$

wohldefiniert. φ ist die Spur mit Werten in $\pi_1 \mathcal{U}_\infty$. Die Gruppe $\pi_1 \mathcal{U}_\infty$ ist bekannt (Periodizitätssatz).

Sei S ein hermitesches Element aus M mit ganzem Spektrum. Sei $\exp' 2\pi i S$ die Ableitung der Exponentialfunktion an der Stelle $2\pi i S$, d.h.

$$(\exp' 2\pi i S)(T) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \exp 2\pi i (S + tT), \quad \text{für alle } T \in M$$

Die Abbildung

$$\exp' 2\pi i S : M \to M$$

ist eine Idempotente mit nichttrivialem Kern (im Allgemeinen). Die Spur φ ist in S differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} \varphi(S + tT) = \varphi((\exp' 2\pi i S)(T)).$$

Ist $S = I$ so ist $(\exp' 2\pi i I) T = T$ und $\frac{d}{dt} \varphi(I + tT) = \varphi(T)$. Die Spur φ ist additiv genau dann, wenn φ in $S = I$ stetig differenzierbar ist.

M. Breuer, Marburg

8. Dez. 1989

Knotengruppen

Eine (klassische) Knotengruppe besitzt endliche Präsentationen, die man mit Hilfe verschiedener geometrisch ausgezeichneter Knotendarstellungen im $\mathbb{R}^3$ herleiten kann. (Brückendarstellungen, reguläre Projektionen, geschlossene Zöpfe, Einbettungen auf Flächen). Für gewisse Knotenklassen läßt sich die Minimalität der Erzeugendenzahl der Präsentationen beweisen.

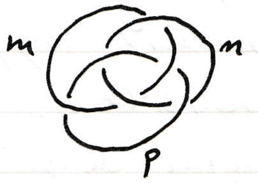
Darstellungen von Knotengruppen in $PSL(2, \mathbb{C})$ führen zu Thurston's hyperbolischen Strukturen auf Knotenaußenräumen. Darstellungen in die Untergruppe $SO(3)$ lassen sich mit Hilfe ebener algebraischer Kurven beschreiben; sie geben Auskunft auch über Darstellungen von Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten, die durch Dehn-Eingriffe an 2-Brückenknoten entstehen.

G. Burde, Ffm

Arithmetic and Geometry of the Borromean rings orbifolds (13·XII·89)

This is to report work in colaboration with Lozano and Hilden. Following Vinberg we say that a <u>lattice</u> $\Gamma \leq \mathrm{Iso}\, H^3$ (i.e. a discrete subgroup of $\mathrm{Iso}\, H^3$ such that $\mathrm{vol}(H^3/\Gamma) < \infty$) is <u>real-arithmetic</u> if there exists a (4×4) symmetric matrix F of type $(3,1)$ with entries in an algebraic field k

such that k is totally real and F^σ is definite ($\sigma: k \to \mathbb{R}$, $\sigma \neq 1$), and an isomorphism $\varphi: PSO(F,\mathbb{R}) \to PSO\left(\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},\mathbb{R}\right) = Iso^+H^3$, such that Γ and $\varphi(PSO(F,O))$ are commensurable, where O is the ring of integers of k. Since $Iso^+H^3 \cong PSL(2,\mathbb{C})$ (a complex Lie group) there is another source of lattices of $Iso\,H^3$ arithmetically defined. We will say that a subgroup $\Gamma \leq SL(2,\mathbb{C})$ is complex-arithmetic if there exists a quaternion algebra D over a field K, with only one complex place (such that $D \otimes_{\sigma(K)} \mathbb{R} = \mathbb{H}$ [Hamilton quaternions] for every $\sigma: K \to \mathbb{R}$) such that if H_k is the group of quaternions of norm 1, there exists an order O, and $O \cap H_k$ is commensurable with Γ in $D \otimes \mathbb{C} \cong M(2,\mathbb{C})$. We consider the orbifolds



$m,n,p > 2$

and show that they are hyperbolic by constructing a fundamental domain in H^3 for the fundamental group $B(m,n,p) \leq Iso^+H^3$ of the orbifold. We proof that exactly for 11 values of $(m,n,p) \in \{3,4,5,\dots,\infty\}$ the group $B(m,n,p) \leq Iso^+H^3$ is real-arithmetic. We show that for the same set of values the group $\tilde{B}(m,n,p) = p^{-1}B(m,n,p)$ in

$$p: SL(2,\mathbb{C}) \to PSL(2,\mathbb{C})$$

is complex-arithmetic. The motivation for this work was the observation we made that $B(4,4,4)$ is a universal group (i.e. for every 3-manifold closed & oriented M there exists a lattice $\Gamma \leq B(4,4,4)$ such that $H^3/\Gamma \cong M$) and the observation by Neumann that $B(4,4,4)$ was complex-arithmetic. A second motivation is the work of Helling-Kim-Mennicke on the arithmeticity of (essentially) the figure-eight knot orbifolds.

José Montesinos, Madrid.

Über Hopf-Algebren (Quantengruppen), 15.12.89

Im Vortrag werden zunächst Zusammenhänge zwischen Knoteninvarianten (z.B. Jones-Polynome), Lösungen der Yang-Baxter-Gleichung (siehe Anmerkung (1)) und quasitriangulierbaren Hopf-Algebren (2) dargelegt. Es wird ein Zugang zu den Jones-Polynomen über die Yang-Baxter-Gleichung skizziert. Danach werden die Zusammenhänge zwischen allgemeiner Theorie der Hopf-Algebren, quasitriangulierbaren Hopf-Algebren und Lösungen der Yang-Baxter-Gleichung beschrieben. Es geht darum, eines der mathematischen Motive für die Beschäftigung mit Hopf-Algebren und ihren Darstellungen zu beschreiben. Wir vertreten die Auffassung, daß die bekannten Beispiele von Quantengruppen ganz spezieller Art sind. Sie werden durch Cartan-Zerlegung, Deformation, Cartan-Zusammensetzung und Erweiterung aus klassischen Gruppen bzw. deren duale Hopf-Algebren gebildet. So ist z.B. ein sehr altes zufällig gefundenes Beispiel von G.I. Kac und V. Paljutkin (3) eine Erweiterung von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{R}$ in der Kategorie der Hopf-Algebren (bzw. einer analytischen Variante davon).

(1) k kommutativer Ring, V k-endlichdimensionaler freier k-Modul, $R: V\otimes_k V \to V\otimes_k V$ ist Lösung der Yang-Baxter-Gleichung, falls R invertierbar ist und $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$, wobei $R_{12} = R\otimes id_V$, $R_{23} = id_V \otimes R$, $R_{13} = \Pi_{12}\circ R_{23}\circ \Pi_{12}$ mit $\Pi: V\otimes_k V \to V\otimes_k V$, $\Pi(a\otimes b) = b\otimes a$.

(2) (H,R) ist quasitriangulierbare Hopfalgebra, wenn H eine Hopfalgebra (mit Comultiplikation Δ) ist und $R\in H\otimes H$ invertierbar ist und die Identitäten $R\Delta(.)R^{-1} = \Pi(\Delta(.))$ mit $\Pi(a\otimes b) = b\otimes a$, $(\Delta\otimes id)R = R_{12}R_{23}$ $\{$d.h. $= (id\otimes\Pi)(R\otimes 1)1\otimes R\}$, $(id\otimes\Delta)R = R_{13}R_{12}$ $\{= (id\otimes\Pi)(R\otimes 1)R\otimes 1\}$ erfüllt.

(3) von 1962, bei Drinfeld 1984 als "inspirierend" und später von anderen Autoren als "geheimnisvoll" bezeichnet.

E. Kirchberg (Heidelberg)