$L^2(X,\mu)$ als Hilbertraum

<u>Def</u>: Ein $\mathbb{K}$-Banachraum $(H, \|\cdot\|)$ ist ein **Hilbertraum**, wenn es auf H eine positiv definite symmetrische / hermitesche Bilinearform / Sesquilinearform

$$\langle -, - \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$$

gibt mit

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} \qquad \forall\, \underline{v} \in H$$

<u>Bsp</u>: $L^2(X,\mu)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle := \int_X f \bar{g} \, d\mu$$

<u>Bew</u>: Bilinearität / Sesquilinearität ist klar.

$$\langle f, f \rangle = \int_X f \bar{f} \, d\mu = \int_X |f|^2 \, d\mu = \|f\|_2^2$$

Daraus folgt auch die positive Definitheit. $\boxtimes$

<u>Def</u>: Für $A \subseteq H$ und $\underline{u} \in H$ heißt

$$d(\underline{u}, A) := \inf \{ \|\underline{a} - \underline{u}\| \mid \underline{a} \in A \}$$

Abstand zwischen $\underline{u}$ und A.

Projektionssatz: Sei H ein Hilbertraum und $A \subseteq H$ ein abgeschlossener Unterraum. Zu jedem $\underline{u} \in H$ gibt es genau ein $\underline{a} \in A$ mit

$$d(\underline{u}, A) = \| \underline{a} - \underline{u} \|$$

Bew: Eindeutigkeit: Seien $\underline{a}, \underline{a}' \in A$ mit

$$\| \underline{a} - \underline{u} \| = \| \underline{a}' - \underline{u} \| = d(\underline{u}, A) =: r$$

Wäre $\underline{a} \neq \underline{a}'$, so wäre $\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{a}' \in A$ näher an $\underline{u}$. ↯

Existenz: Sei $\underline{a}_*$ eine Folge, so daß

$$\| \underline{a}_* - \underline{u} \| \longrightarrow r$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit:

$$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{B}_{r+\delta}(\underline{u}) \setminus \mathbb{B}_r(\underline{u}) \implies \| \underline{x} - \underline{y} \| < \varepsilon$$

⌜ $\delta := \sqrt{r^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} - r$ ⌟

Kor: $\underline{a}_*$ ist Cauchyfolge.

⌜ Zu $\varepsilon > 0$ wähle N so, daß $\| \underline{a}_m - \underline{u} \| < \delta$ ist für $m \geq N$. Dann folgt $\| \underline{a}_m - \underline{a}_n \| < \varepsilon$ für $m, n \geq N$. ⌟

H: Hilbertraum, A: abg. $\implies \underline{a} := \lim \underline{a}_* \in A$.

Stetigkeit von $\| \cdot \| \implies \| \underline{a} - \underline{u} \| = r$. ☐

Projektionssatz: Sei H ein Hilbertraum und $A \leq H$ ein abgeschlossener Unterraum. Zu jedem $\underline{u} \in H$ gibt es genau ein $\underline{a} \in A$ mit

$$r := d(\underline{u}, A) = \|\underline{a} - \underline{u}\|$$

Bew: Beh: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ mit

$$\forall_{\underline{x}, \underline{y} \in A} : \; r \leq \|\underline{x} - \underline{u}\|, \|\underline{y} - \underline{u}\| < r + \delta \Rightarrow \|\underline{x} - \underline{y}\| < \varepsilon$$

$$\ulcorner \; \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 + \underbrace{\|\underline{x} + \underline{y}\|^2}_{\geq 4r^2} = 2\underbrace{(\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2)}_{\leq 4(r+\delta)^2}$$

$$\Rightarrow \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 \leq 8r\delta + 4\delta^2 \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \quad \lrcorner$$

Kor: Sind $(\underline{a}_m)$ und $(\underline{b}_n)$ Folgen in A mit $\|\underline{a}_m - \underline{u}\|, \|\underline{b}_n - \underline{u}\| \to r$, so sind sie Cauchy-parallel.

Eindeutigkeit $\|\underline{a} - \underline{u}\| = r = \|\underline{b} - \underline{u}\|$

$$\Rightarrow \underline{a}, \underline{a}, \dots \parallel \underline{b}, \underline{b}, \dots \Rightarrow \underline{a} = \underline{b}$$

Existenz: $r = \inf \dots \Rightarrow \exists (\underline{a}_m) : \|\underline{a}_m - \underline{u}\| \to r$

Dann ist $(\underline{a}_m)$ Cauchyfolge und

$\underline{a} = \lim \underline{a}_m \in A$:abg. tut's. $\square$

Beob: Die Abb. $pr_A : H \to A$ ist die orthogonale Projektion. D.h. für $\underline{u} \in H$ und $\underline{a} \in A$ sind äquivalent:

1) $\underline{u} - \underline{a} \perp \underline{b} \qquad \forall\, \underline{b} \in A$

2) $\underline{u} - \underline{a} \perp \underline{b} - \underline{a} \qquad \forall\, \underline{b} \in A$

3) $\underline{a} = pr_A(\underline{u})$

Bew: $1 \Leftrightarrow 2$ folgt aus $A = \{\, \underline{b} - \underline{a} \mid \underline{b} \in A \,\}$

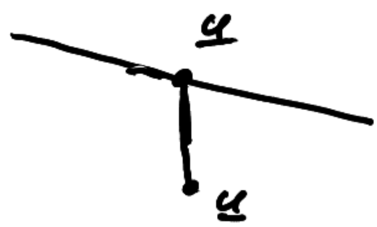
Beh. Bedingung (2) charakterisiert $\underline{a}$ eindeutig

⌜ Erfülle $\underline{a}'$ ebenfalls (1). Dann wäre

ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln. ⌟

Beh: $(3) \Rightarrow (2)$. Wir zeigen: $\cancel{(2)} \Rightarrow \cancel{(3)}$

⌜ Es gibt eine Gerade in A durch $\underline{a}$ nicht orthogonal zu $\underline{a} - \underline{u}$. Dann liegt darauf ein Punkt, der näher an $\underline{u}$ ist. ⌟



Kor: $(2) \Longleftrightarrow (3)$.

$\square$

Kor: Die Abb. $pr_A : H \twoheadrightarrow A$ ist linear.

Der Kern
$$A^\perp := \{ \underline{u} \mid pr_A(\underline{u}) = 0 \} = \{ \underline{u} \mid \underline{u} \perp A \}$$
heißt <u>orthogonales Komplement</u> von A und ist ein abg. UR von H mit
$$H = A \oplus A^\perp$$

Bew: $\underline{u} - pr_A(\underline{u}) \perp A \qquad \underline{v} - pr_A(\underline{v}) \perp A$

$$\Rightarrow \quad \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} - \left(\alpha\, pr_A(\underline{u}) + \beta\, pr_A(\underline{v}) \right) \perp A$$

$$\Rightarrow \quad pr_A(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) = \alpha\, pr_A(\underline{u}) + \beta\, pr_A(\underline{v}).$$

Die Abb. $H \to A \oplus A^\perp$ ist gegeben durch
$$\underline{u} \mapsto \left(pr_A(\underline{u}),\ \underline{u} - pr_A(\underline{u}) \right)$$
$\square$

<u>Def</u>: Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum. Dann heißt

$$E' := \{\lambda : E \to \mathbb{K} \mid \lambda \text{ stetig linear}\}$$

der <u>stetige Dual</u> von E.

<u>Prop</u>: E' ist bezüglich der Operatornorm

$$\|\lambda\|_{op} := \inf\{C \in \mathbb{R}^{\geq 0} \mid |\lambda(\underline{v})| \leq C\|\underline{v}\|\}$$

ein Banachraum.

Genauer: Für Banachräume E und F ist

$$\mathcal{B}(E;F) = \{\varphi : E \to F \mid \varphi \text{ stetig lin.}\}$$

wieder ein Banachraum.

<u>Bew</u>: Sei φ_* eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(E;F)$.

Sei $\underline{v} \in E$.

<u>Beh</u>: $\varphi_*(\underline{v})$ ist Cauchyfolge in F.

$$\ulcorner\ \|\varphi_n(\underline{v}) - \varphi_m(\underline{v})\|_F = \|(\varphi_n - \varphi_m)(\underline{v})\|_F$$

$$\leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_{op}\ \underbrace{\|\underline{v}\|_E}_{\text{unabh. von } m \text{ und } n}\ \lrcorner$$

Setze $\varphi(\underline{v}) := \lim_{m\to\infty} \varphi_m(\underline{v})$.

<u>D.h.</u>: φ ist punktweiser Limes der φ_{*}.

<u>Klar</u>: φ ist linear.

<u>Beob</u>: $\|\varphi_{*}\|$ ist beschränkt.

<u>Kor</u>: φ ist beschränkt. $\square$

<u>Beob</u>: Sei H ein Hilbertraum. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} I : H &\longrightarrow H' \\ \underline{w} &\longmapsto \langle -, \underline{w} \rangle \end{aligned}$$

eine (sesqui)lineare Abbildung

$$I(\underline{w} + \underline{w}') = I(\underline{w}) + I(\underline{w}')$$

$$I(\alpha \underline{w}) = \overline{\alpha}\, I(\underline{w})$$ $\square$

<u>Beob</u>: $I : H \to H'$ ist injektiv.

<u>Bew</u>: $\langle -, \underline{v} \rangle = \langle -, \underline{w} \rangle$

$\Leftrightarrow \quad \forall \underline{u} : \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle = 0$

$\Rightarrow \quad \langle \underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w} \rangle = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{v} - \underline{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \underline{w}$ $\square$

Beob: I ist eine Isometrie: $\|\langle -, \underline{w}\rangle\|_{op} = \|\underline{w}\|$

Bew: Cauchy-Schwarz:

$$\langle \underline{u}, \underline{w}\rangle^2 \leq \langle \underline{u}, \underline{u}\rangle \langle \underline{w}, \underline{w}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad |\langle \underline{u}, \underline{w}\rangle| \leq \|\underline{w}\| \, \|\underline{u}\|$$

$$\Rightarrow \quad \|\langle -, \underline{w}\rangle\|_{op} \leq \|\underline{w}\|$$

$$|\langle \underline{w}, \underline{w}\rangle| = \|\underline{w}\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|\langle -, \underline{w}\rangle\| \geq \|\underline{w}\|$$ ☒

Beob: $I : H \to H'$ ist surjektiv.

Bew: Sei $\lambda : H \to \mathbb{K} \in H^*$, d.h., stetig lin..

Ist $\lambda = 0$, so ist $\lambda = \langle -, 0\rangle$.

Für $\lambda \neq 0$ haben wir eine kurze exakte Folge

$$N := \ker \lambda \hookrightarrow H \xrightarrow{\lambda} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$$

worin $N = \lambda^{-1}(0)$ abgeschlossen ist, weil λ stetig ist. Dann ist

$$\lambda|_{N^\perp} : N^\perp \twoheadrightarrow \mathbb{K}$$

bijektiv: surjektiv, weil λ surjektiv ist
injektiv, weil $N^\perp \cap N = 0$ ist.

Wähle $\underline{w} \in N^\perp$ mit $\|\underline{w}\| = 1$.

Dann ist $\underline{w} \notin N$, also $\alpha := \lambda(\underline{w}) \neq 0$.

Setze: $\underline{v} := \overline{\alpha}\, \underline{w} \neq 0$.

Bem: $\{\underline{w}\}$ ist Basis von $N^\perp$.

Beh: $\langle -, \underline{v} \rangle = \lambda$.

$\ulcorner$ Schreibe $\underline{u} \in H = N \oplus N^\perp$ als

$$\underline{u} = \underline{n} + \beta \underline{w}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle &= \langle \underline{u}, \underline{n} \rangle + \langle \beta \underline{w}, \underline{v} \rangle \\
&= \beta\, \overline{\overline{\alpha}} \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \\
&= \beta\, \lambda(\underline{w}) \\
&= \lambda(\underline{n}) + \lambda(\beta \underline{w}) \\
&= \lambda(\underline{n} + \beta \underline{w}) \\
&= \lambda(\underline{u})
\end{aligned}$$

$\lrcorner$ $\boxtimes$

Satz (Frechet-Riesz) Die Abbildung

$$\begin{aligned}
H &\longrightarrow H' \\
\underline{w} &\longmapsto \langle -, \underline{w} \rangle
\end{aligned}$$

ist ein Antiisomorphismus von Hilberträumen.

Kor: Jede stetige Linearform
$$\lambda : L^2(X,\mu) \to \mathbb{K}$$
wird beschrieben durch ein Element $g \in L^2$ vermöge:
$$\lambda(f) = \int_X f\bar{g}\, d\mu = \underline{\underline{\int_X f \, d\, \bar{g} \odot \mu}}$$

Jedes stetige Lineare Funktional ist also lediglich Integration mit einer Dichte aus L^2. ☒

Fakt (L^p-Dualität)

Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist
$$\begin{aligned} L^q &\longrightarrow L^{p\,\prime} \\ g &\longmapsto \left(f \mapsto \int_X f\bar{g}\, d\mu \right) \end{aligned}$$
ein Isomorphismus von Banachräumen.