Universität Bielefeld
Dr. Guido Elsner
Dr. Holger Kösters Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 1 (Mengensysteme, Inhalte und Maße)

Einige Definitionen
Es seien Ω eine nicht-leere Menge und $\mathfrak{P}(\Omega)$ die zugehörige Potenzmenge.

(1) $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *Ring*, wenn $\emptyset \in \mathcal{A}$ gilt und wenn $\mathcal{A}$ stabil gegenüber der Bildung von Differenzen sowie von endlichen Vereinigungen ist (d. h. es gilt $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ sowie $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, \dots, N; N \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{A}$).

(2) $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *Algebra*, wenn $\emptyset \in \mathcal{A}$ gilt und wenn $\mathcal{A}$ stabil gegenüber der Bildung von Komplementen sowie von endlichen Vereinigungen ist (d. h. es gilt $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ sowie $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, \dots, N; N \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{A}$).

(3) $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra*, wenn $\emptyset \in \mathcal{A}$ gilt und wenn $\mathcal{A}$ stabil gegenüber der Bildung von Komplementen sowie von abzählbar-unendlichen Vereinigungen ist (d. h. es gilt $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ sowie $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$).

(4) $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt *Inhalt* auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wenn $\mathcal{A}$ ein Ring ist, $\mu(\emptyset) = 0$ gilt und μ additiv ist (d.h. für alle paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, \dots, N; N \in \mathbb{N})$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$).

(5) $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt *Prämaß* auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wenn $\mathcal{A}$ ein Ring ist, $\mu(\emptyset) = 0$ gilt und μ σ-additiv ist (d.h. für alle paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$).

(6) $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt *Maß* auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und μ ein Prämaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

(7) $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* [W.maß] auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wenn μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu(\Omega) = 1$ ist.

Sie sollten sich gegebenfalls davon überzeugen, dass diese Definitionen zu denen aus der Vorlesung gleichwertig sind.

Die folgenden Aufgaben sollen nicht abgegeben, sondern in der Woche vom 19.10.2009 bis 23.10.2009 in den Tutorien besprochen werden.

Aufgabe 1
(a) Es seien Ω eine nicht-leere Menge und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ Algebren [σ-Algebren]. Untersuchen Sie, ob dann auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ Algebren [σ-Algebren] sind. (*Beweis bzw. Gegenbeispiel!*)

(b) Es seien Ω, Ω' nicht-leere Mengen, $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$, $\mathcal{A}' \subset \mathfrak{P}(\Omega')$ Algebren [σ-Algebren] und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Untersuchen Sie, ob dann auch $f(\mathcal{A}) := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ bzw. $f^{-1}(\mathcal{A}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$ Algebren [σ-Algebren] sind. (*Beweis bzw. Gegenbeispiel!*)

Aufgabe 2
Sei Ω eine abzählbar-unendliche Menge,

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}$$

und

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & ; \text{ falls } A \text{ endlich} \\ 1 & ; \text{ falls } A^c \text{ endlich} \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

(a) Untersuchen Sie, ob $\mathcal{A}$ eine Algebra bzw. eine σ-Algebra ist.

(b) Untersuchen Sie, ob μ ein Inhalt bzw. ein Prämaß ist.

Aufgabe 3
Sei Ω eine nicht-leere Menge. Für beliebige Teilmengen $A, B \subset \Omega$ sei $A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die *symmetrische Differenz*.
Zeigen Sie: Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ist genau dann ein Ring (im Sinne der obigen Definition), wenn $\mathcal{A}$ mit den Verknüpfungen Δ als Addition und $\cap$ als Multiplikation einen kommutativen Ring (im Sinne der Algebra) bildet.

Die folgenden Aufgaben sollen wie üblich abgegeben und danach in den Tutorien besprochen werden.

Aufgabe 4 (4 + 4 = 8 Punkte)
Es seien Ω eine nicht-leere Menge, $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie (ausgehend von der Definition einer σ-Algebra), dass die folgenden Mengen wieder in $\mathcal{A}$ liegen:

(i) $\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$

(ii) $\{\omega \in \Omega : \omega \notin A_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$

(iii) $\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$

(iv) $\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$

Beschreiben Sie außerdem die Komplemente dieser Mengen möglichst einfach.

Aufgabe 5 (4 + 4 = 8 Punkte)
Sei Ω eine überabzählbar-unendliche Menge,

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$$

und

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & ; \text{ falls } A \text{ abzählbar, d.h. endlich oder abzählbar-unendlich} \\ 1 & ; \text{ falls } A^c \text{ abzählbar} \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{A})\,.$$

(a) Untersuchen Sie, ob $\mathcal{A}$ eine Algebra bzw. eine σ-Algebra ist.

(b) Untersuchen Sie, ob μ ein Inhalt, ein Prämaß bzw. ein Maß ist.

Aufgabe 6 (4 + 4 = 8 Punkte)
Es seien Ω, Ω' nicht-leere Mengen, $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra, μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung.

(a) Untersuchen Sie, ob das Mengensystem $\mathcal{A}' := \{A' \subset \Omega' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra ist. (*Beweis bzw. Gegenbeispiel!*)

(b) Untersuchen Sie, ob die Funktion $\mu'(A') := \mu(f^{-1}(A'))$ $(A' \in \mathcal{A}')$ ein Maß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ ist. (*Beweis bzw. Gegenbeispiel!*)

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Es seien Ω eine nicht-leere Menge, $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein endlicher Inhalt (d.h. es gilt $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$). Zeigen Sie: Für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{I \subset \{1,\ldots,N\} \,:\, |I|=k} \mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\,.$$

Abgabe: Mittwoch, 21. Oktober 2009, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden Sie im Internet unter der Adresse:
`http://www.math.uni-bielefeld.de/~guide/lehre/wise200910/main0910.html`