Universität Bielefeld SS 2007
Prof. W. Hoffmann

Klausur Analysis C

1. Es seien A und B konvexe Mengen in einem reellen Vektorraum. Beweisen Sie, dass auch die Menge
$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$$
konvex ist.

2. Für jede der folgenden Mengen begründe man entweder, warum eine beliebige stetige Selbstabbildung einen Fixpunkt besitzt, oder man gebe ein Gegenbeispiel an.

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\, y \geq 0\}$,
   (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$.

3. Bestimmen Sie die Minkowski-Funktionale der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$,
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 1 < y < x + 1\}$.

4. Finden Sie alle Fixpunkte der Korrespondenz $f : [0, 1] \to [0, 1]$, die durch
$$f(x) = \operatorname{conv}\{1 - x, 4x(1 - x)\}$$
gegeben ist.

5. Bestimmen Sie im Fall von zwei Gütern die Budgetmenge $B(p, e)$ und die Nachfragemenge $D(p, e)$ für den Preisvektor $p = (1, 2)$ in Abhängigkeit von der Erstausstattung e eines Akteurs, dessen Präferenzordnung durch die Nutzenfunktion $F(x_1, x_2) = x_1 x_2$ bestimmt ist.

6. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengenfamilien, ob sie ein Ring, eine Algebra bzw. eine σ-Algebra ist:

   (a) die Familie der endlichen Teilmengen und ihrer Komplemente in einer unendlichen Menge,
   (b) die Familie der abzählbaren Teilmengen einer überabzählbaren Menge,
   (c) die Familie aller Teilmengen einer endlichen Menge.

7. Berechnen Sie die Rauminhalte folgender Mengen:

   (a) $$\operatorname{conv}\{(0,1,2),(2,2,3),(0,-2,9),(5,5,0)\},$$

   (b) $$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-\tfrac{1}{2}\le z\le \tfrac{1}{2}-y^2\}.$$

8. Begründen Sie, dass die folgenden Integrale für alle $t\in\mathbb{R}$ entweder als Lebesgue-Integral oder als uneigentliches Riemann-Integral existieren:

$$F(t)=\int_0^\infty \frac{\sin(x^t)}{1+x^2}\,dx,$$
$$G(t)=\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x}\,dx.$$

   Welche der beiden Funktionen ist für alle $t\in\mathbb{R}$ stetig? Begründen Sie Ihre Entscheidung.