Aufgabenzettel 7.

7.1. Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere $\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x$. (In der Vorlesung wurde schon $\sigma = \sigma_1$ thematisiert.)

(a) Man zeige, dass die Funktion σ_x für jedes x multiplikativ ist und gebe eine Formel für $\sigma_x(n)$ an, die die Primfaktorzerlegung von n verwendet.

(b) Für welche x ist σ_x stark multiplikativ?

7.2. Die Funktionen μ und τ (Einzeilenbeweise). Man zeige:

(a) Dann und nur dann hat n eine ungerade Anzahl von Teilern, wenn n eine Quadratzahl ist.

(b) Man berechne $\mu(t!)$ für alle natürlichen Zahlen t.

(c) Es ist $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(\frac{n}{d}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Die Anzahl der Teiler d von n mit $\mu(d) \neq 0$ ist eine Zweierpotenz.

7.3 (Euklid). Man nennt n *vollkommen,* wenn $\sigma(n) = 2n$. Zeige: Sei $p = 2^t - 1$ eine Primzahl. Dann ist $2^{t-1}p$ vollkommen.

Man gebe (ohne Beweis) die ersten 10 vollkommenen Zahlen an.

(Euler zeigte, dass die folgende Umkehrung gilt: Ist n vollkommen und gerade, so ist n von der Form $n = 2^{t-1}(2^t - 1)$, und $2^t - 1$ ist Primzahl, auch das ist recht einfach zu beweisen. Es ist unbekannt, ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt!)

7.4. Zeige: Jede Fermat-Zahl $F_n = 2^{2^n} + 1$, jede Mersenne-Zahl $M = 2^p - 1$ (mit p Primzahl) ist selbst entweder eine Primzahl oder aber Pseudo-Primzahl zur Basis 2.

7.5. Zusatzaufgabe (für Extrapunkte). Man nennt $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ die n-*te harmonische Zahl.* Zeige: Für $n \geq 2$ gilt

$$\sigma(n) < H_n + \exp(H_n)\ln(H_n).$$

7.1. Let $x \in \mathbb{R}$. Define $\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x$. (The function $\sigma = \sigma_1$ has been introduced already in the lecture).

(a) Show that σ_x is multiplicative and provide a formula for $\sigma_x(n)$ which refers to the prime factorization of n.

(b) For which values x is σ_x strongly mutiplicative?

7.2. The functions μ and τ (One-line-arguments). Show:

(a) The number n has an odd number of divisors if and only if n is a square number.

(b) Calculate $\mu(t!)$ for all natural numbers t.

(c) It is $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(\frac{n}{d}) = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$.

(d) The number of divisors d of n with $\mu(d) \neq 0$ is a power of 2, for any natural number n.

7.3 (Euklid). A natural number n is said to be *perfect,* provided $\sigma(n) = 2n$. Show: If $p = 2^t - 1$ is a prime number, then $2^{t-1}p$ is perfect.

What are the first 10 perfect numbers? (Without proof).

(The following converse is due to Euler and is quite easy to show: If n is perfect and even, then $n = 2^{t-1}(2^t - 1)$, with $2^t - 1$ a prime. It is not known whether there exists an odd perfect number!)

7.4. Claim: Any Fermat number $F_n = 2^{2^n}+1$, any Mersenne number $M = 2^p-1$ with p a prime is either itself a prime or else a pseudo prime for the basis 2. Prove it!

7.5. Additional problem. The number $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ is called the n*-the harmonic number.* Show that for $n \geq 2$

$$\sigma(n) < H_n + \exp(H_n)\ln(H_n).$$

Präsenz-Aufgaben.

P7.1. Zeige direkt: $\sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d}$.

P7.2. Man formuliere die Aussage (1) als Eigenschaft der Dirichlet-Faltung.

P7.3. Beweise oder widerlege: Ist f stark multiplikativ, so ist auch $f * U$ stark multiplikativ.

P7.4. Zeige: Ist f eine zahlentheoretische Funktion, so gibt es höchstens ein $c \in \mathbb{C}^*$, sodass cf multiplikativ ist.

P7.5. Für $t > 1$ gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n mit $\tau(n) = t$.

P7.6. Für jedes t gibt es nur endlich viele natürliche Zahlen n mit $\sigma(n) = t$.

P7.7. Ist n vollkommen (siehe Aufgabe 7.3), so ist $\sum_{d|n,d>1} \frac{1}{d} = 1$. Man schreibt auf diese Weise 1 als Summe paarweise verschiedener Stammbrüche.

P7.8. Gesucht ist eine natürliche Zahl n, die **nicht** vollkommen ist, und eine Menge M von Zahlen d mit $d|n$ und $d > 1$, sodass $1 = \sum_{d\in M} \frac{1}{d}$ gilt.