1. Beweise: Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Zeige: Die Abbildung $f\colon\ \mathrm{GL}(n, K) \to \mathrm{GL}(n, K)$, die durch $f(B) = A^{-1}BA$ definiert ist, ist ein Gruppen-Homomorphismus.

2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) $\mathbb{N}$ ist ein Ring.
(2) $\mathbb{R}[T]$ ist ein Körper.
(3) $(\mathbb{C}, \cdot)$ ist eine Gruppe.
(4) $(\{1, -1\}, \cdot) \subset (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Untergruppe.
(Nur Antwort)

3. Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ und $\lambda \in K$. Ganz allgemein gilt: Ist λ ein Eigenwert von AB, so auch von BA. Man führe den Beweis für $\lambda \neq 0$.

4. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) Jede symmetrische Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist diagonalisierbar.
(2) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und nilpotent, so ist $A = 0$.
(3) Sei $A \in M(n \times n, K)$. Das charakteristische Polynom χ_A ist ein Teiler des Minimalpolynoms.
(4) Es gibt eine hermitesche Matrix A mit Determinante 2.
(Nur Antwort)

5. Betrachte die Polynome $f = T^3 + T^2 + T + 1$ und $g = T^4 + T^3$ in $\mathbb{R}[T]$. Sei h der größte gemeinsame Teiler von f und g. Man gebe Polynome u und v in $\mathbb{R}[T]$ an mit $h = uf + vg$. (Nur Antwort),

6. Man beweise: Ist $p\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums mit $p^2 = p$, so gilt $p(V) + \mathrm{Kern}(p) = V$.

7. Sei $A \in M(5 \times 5, \mathbb{R})$. Das charakteristische Polynom von A sei $\chi_A = T^5 - T^3$, das Minimalpolynom sei $T^4 - T^2$. Wie sieht die Jordan'sche Normalform aus? (Nur Antwort.)

8. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ nilpotenter Endomorphismus mit eindimensionalem Kern. Zeige: es gibt $v \in V$, sodass die Vektoren $v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)$ eine Basis bilden. (Alle in der Vorlesung bewiesenen Sätze dürfen verwendet werden).

9. Man gebe drei verschiedene Endomorphismen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an mit

$$\mathrm{Eig}(f; 1) = \{ \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

(Nur Antwort.)

10. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) Das Quadrat einer Gleitspiegelung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Translation.

(2) Jede endliche Untergruppe G von $\mathcal{B}(2)$ besitzt einen Fixpunkt.
(3) Sei $g \in \mathcal{B}(n)$, sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $g(X) \subseteq X$. Dann gilt $g(X) = X$.
(4) Sei q ein reelles quadratisches Polynom, sodass $F = V(q)$ ein zweischaliges Hyperbolid im $\mathbb{R}^3$ ist. Liegt der Punkt P auf der Fläche F, so gibt es eine Gerade G auf der Fläche F mit $P \in G$.

(Nur Antwort)

11. Beweise: Das Polynom $T^2 + T + 1 \in \mathbb{F}_2[T]$ ist irreduzibel.

12. Beweise oder widerlege: Sei V ein Vektorraum mit Unterräumen U, U_1, U_2, und es gelte $V = U_1 \oplus U_2$. Ist $U_1 \subseteq U$, so ist $U = U_1 + (U \cap U_2)$.

13. Beweise: Jede reelle quadratische Matrix A ist Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix. (Eine reelle Matrix B heißt schiefsymmetrisch, falls $B^t = -B$ gilt.)

14. Man gebe vier verschiedene unitäre Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} a & ab \\ ai & -a \end{bmatrix}$$

an (mit $a, b \in \mathbb{C}$). (Nur Antwort)

15. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

Bestimme, wenn möglich, einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, mit $v^t A v < 0$. (Nur Antwort).