Typische Klausuraufgaben 2.

1. Seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$. Bilde die $n \times n$-Matrix

$$B = B(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sei U der kleinste B-invariante Unterraum von K^n, der den kanonischen Basisvektor $e_1 = [1\ 0\ \cdots\ 0]^t$ enthält. Welche Dimension hat U ? (Ohne Beweis).

2. Sei V ein Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, \ldots, v_m$ Eigenvektoren zu f mit paarweise verschienden Eigenwerten. Sei $v = \sum_{i=1}^m v_i$. Zeige:

$$L(v, f(v), \ldots, f^{m-1}(v)) = L(v_1, \ldots, v_m).$$

3. Sei V ein Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, \ldots, v_m$ Eigenvektoren zu f mit Eigenwert λ. Sei $v = \sum_{i=1}^m v_i$. Wie bestimmt man die Dimension von $U = L(v, f(v), \ldots, f^{m-1}(v))$?

4. Betrachte den nilpotenten Jordanblock $J_5 \in M(5 \times 5, K)$ und gib alle J_5-invarianten Unterräume an. (Ohne Beweis).

5. Sei V n-dimensionaler Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$. Wie sieht die Jordansche Normalform aus? (ohne Beweis),

6. Sei V ein Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Beweise: Sind U_1, U_2 ein f-invariante Unterräume, so ist auch $U_1 + U_2$ f-invarianter Unterraum.

7. Man gebe einen Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, so dass 0, $\mathbb{R}^2$ und die Geraden $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $\{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ die einzigen f-invarianten Unterräume sind.

8. Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

mit $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Für welche Werte a_0, a_1, a_2, a_3 sind die Matrizen A, B ähnlich?

9. Zeige oder widerlege: Seien $c, d \in \mathbb{C}$. Ist $c + d \in \mathbb{R}$ und $cd \in \mathbb{R}$, so ist $d = \overline{c}$.

10. Man bestimme alle komplexen Zahlen ω mit $\omega^8 = 1$.

11. Gegeben seien $(n \times n)$-Matrizen A, B mit $AB = BA$. Zeige: Ist $\mathrm{Eig}(A,\lambda)$ eindimensional, und ist v ein Eigenvektor zu A mit Eigenwert λ, so ist v auch Eigenvektor zu B.

12. Seien B, C quadratische Matrizen und sei

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Beweise oder widerlege: Es ist $\mu_A = \mu_B \mu_C$ (dabei sei μ_D das Minimalpolynom einer Matrix D).

13. Welche invarianten Unteräume gibt es zur reellen Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Ohne Beweis.)

14. Das charakteristische Polynom der Matrix A sei $\chi_A = T^4 - T^2$. Welche Möglichkeiten gibt es dann für das Minimalpolynom μ_A? (Ohne Beweis.)

15. Sei $f\colon V \to V$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$. Bestimme das Minimal-Polynom von f. (Ohne Beweis.)

16. Beweise. Ist λ Eigenwert eines Automorphismus f, so ist λ^{-1} Eigenwert zu f^{-1}.

17. Sei $A \in M(n \times n, K)$ und $B = A^2 + A$. Beweise: $\mathrm{Kern}(l_B)$ ist A-invarianter Unterraum.

18. Seien U_1, U_2 Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$. Sei $p\colon V \to V$ die Projektionsabbildung mit Bild U_1 und Kern U_2. Welche Eigenwerte λ besitzt p und wie sehen die Eigenräume $\mathrm{Eig}(p,\lambda)$ aus?

19. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

(1) Das charakteristische Polynom einer Matrix A ist ein Teiler des Minimalpolynoms der Matrix A.

(2) Diagonalisierbare $n \times n$-Matrizen mit gleichem Minimalpolynom sind ähnlich.

(3) Sind A, B $n \times n$-Matrizen, so ist das charakteristische Polynom von $A+B$ die Summe der charakteristischen Polynome von A und von B.

(4) Sind A, B $n \times n$-Matrizen, so ist das charakteristische Polynom von AB das Produkt der charakteristischen Polynome von A und von B.

Bemerkungen: Aufgabe 1: siehe 3.3. Aufgaben 2 und 3 sind Teile von 4.1. Aufgabe 4: siehe 4.2. Aufgabe 5: siehe 4.4. Aufgabe 6 ist P4.1. Aufgabe 7: siehe P4.3. Aufgabe 8: siehe 5.1. Aufgabe 9 ist Teil von 5.4. Aufgabe 10: siehe P5.4. Aufgabe 11 ist Teil von 5.2. Aufgabe 12: siehe 6.2. Aufgabe 13: siehe 6.4. Aufgabe 14: siehe P6.1. Aufgabe 15 ist P6.3.