Übungsaufgaben 13.

Hauptachsentransformation.

1. Bestimme zur folgenden Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix S, so daß ${}^tSAS$ eine Diagonalmatrix ist.

2. Sei $\langle -, - \rangle$ die durch die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ gegebene Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^4$.
Gesucht sind
(a) drei 2-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist.
(b) drei 1-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ negativ definit ist.
(c) drei 2-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ identisch Null ist.

3. (a) Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Setze $f(x) = {}^txAx$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige: Die Menge

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(x+z) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Bestimme seine Dimension in Abhängigkeit vom Rang der Matrix A.

(b) Nimm die Liste der isometrischen Normalformen reeller quadratischer Formen f in 3 Variablen und bestimme in allen Fällen $Z(f)$.
(Auf der Rückseite findet sich die Liste der isometrischen Normalformen aller reellen quadratische Polynome, hier interessieren uns nur diejenigen, die homogen sind).

4. Sei Q einschaliges Hyperboloid oder hyperbolisches Paraboloid im $\mathbb{R}^3$. Zeige: Zu jedem Punkt $p \in Q$ gibt es genau zwei Geraden g_1, g_2 mit $p \in g_i \subset Q$, für $1 \leq i \leq 2$.

Hinweis: Hier die entsprechenden Gleichungen (schon in isometrischer Normalform):

einschaliges Hyperboloid:	$r_1X_1^2 + r_2X_2^2 - r_3X_3^2 - 1$
hyperbolisches Paraboloid:	$r_1X_1^2 - r_2X_2^2 - X_3$

mit positiven reellen Zahlen r_1, r_2, r_3.

Hinweis. Die

Vorstellung des Lehrangebots im WS 05/06

der Fachschaft findet am 13.07. ab 18 Uhr in H 7 statt. Dies sollte für alle Studierende von Interesse sein!

Die isometrischen Normalformen im Fall $n = 2$.

	m	m'	p	Polynom P	Bezeichnung für $V(P)$
Fall (a) $m' = m$					
	1	1	1	$+T_1^2$	(Doppel-)Gerade
	2	2	1	$+r_1 T_1^2 - T_2^2$	Zwei sich schneidende Geraden
	2	2	2	$+r_1 T_1^2 + T_2^2$	Punkt
Fall (b) $m' = m + 1$					
	1	2	0	$-r_1 T_1^2 - 1$	$\emptyset$
	1	2	1	$+r_1 T_1^2 - 1$	Zwei parallele Geraden
	2	3	0	$-r_1 T_1^2 - r_2 T_2^2 - 1$	$\emptyset$
	2	3	1	$+r_1 T_1^2 - r_2 T_2^2 - 1$	Hyperbel
	2	3	2	$+r_1 T_1^2 + r_2 T_2^2 - 1$	Ellipse
Fall (c) $m' = m + 2$					
	1	3	1	$+r_1 T_1^2 - T_2$	Parabel

Die isometrischen Normalformen im Fall $n = 3$.

	m	m'	p	Polynom P	Bezeichnung für $V(P)$
Fall (a) $m' = m$					
	1	1	1	$+T_1^2$	(Doppel-)Ebene
	2	2	1	$+r_1 T_1^2 - T_2^2$	Zwei sich schneidende Ebenen
	2	2	2	$+r_1 T_1^2 + T_2^2$	Gerade
	3	3	2	$+r_1 T_1^2 + r_2 T_2^2 - T_3^2$	elliptischer Kegel
	3	3	3	$+r_1 T_1^2 + r_2 T_2^2 + T_3^3$	Punkt
Fall (b) $m' = m + 1$					
	1	2	0	$-r_1 T_1^2 - 1$	$\emptyset$
	1	2	1	$+r_1 T_1^2 - 1$	Zwei parallele Ebenen
	2	3	0	$-r_1 T_1^2 - r_2 T_2^2 - 1$	$\emptyset$
	2	3	1	$+r_1 T_1^2 - r_2 T_2^2 - 1$	Hyperbolischer Zylinder
	2	3	2	$+r_1 T_1^2 + r_2 T_2^2 - 1$	Elliptischer Zylinder
	3	4	0	$-r_1 T_1^2 - r_2 T_2^2 - r_3 T_3^2 - 1$	$\emptyset$
	3	4	1	$+r_1 T_1^2 - r_2 T_2^2 - r_3 T_3^2 - 1$	Zweischaliges Hyperboloid
	3	4	2	$+r_1 T_1^2 + r_2 T_2^2 - r_3 T_3^2 - 1$	Einschaliges Hyperboloid
	3	4	3	$+r_1 T_1^2 + r_2 T_2^2 + r_3 T_3^2 - 1$	Ellipsoid
Fall (c) $m' = m + 2$					
	1	3	1	$+r_1 T_1^2 - T_2$	Parabolischer Zylinder
	2	4	1	$+r_1 T_1^2 - r_2 T_2^2 - T_3$	Hyperbolisches Paraboloid
	2	4	2	$+r_1 T_1^2 + r_2 T_2^2 - T_3$	Elliptisches Paraboloid

Es gilt jeweils: die Zahlen r_i sind **positive** reelle Zahlen.
Die Zahlen m, m', p haben folgende Bedeutung: Sei $P = P_2 + P_1 + P_0$, mit P_i homogen vom Grad i, und $P_2 \neq 0$. Sei A die Koeffizientenmatrix von P_2 und A' die (erweiterte) Koeffizientenmatrix von P.
Es ist $m = \mathrm{rang}(A)$ und $m' = \mathrm{rang}(A')$, und A hat die Signatur $(p, m - p, n - m)$.