Übungsaufgaben 11: Unterräume

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum.

1. (a) Seien U_1, U_2 Unterräume von V. Zeige: Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(i) Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich eindeutig in der Form $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2$ schreiben.

(ii) $U_1 \cap U_2 = 0,\ U_1 + U_2 = V.$

(Man nennt dann V die *direkte Summe* von U_1, U_2 und schreibt $V = U_1 \oplus U_2$.)

(b) Zeige: Ist $0 \neq U \subset V$ ein echter Unterraum von V und ist V endlich erzeugt, so gibt es mindestens zwei Unterräume U' mit $V = U \oplus U'$.

(Die Aussage (b) gibt auch für unendlich-dimensionale Vektorräume V, man braucht aber die Existenz einer Basis von V).

2. Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume von V.

(a) Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich eindeutig in der Form $v = u_1 + u_2 + u_3$ mit $u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2,\ u_3 \in U_3$ schreiben.

(ii) $U_1 \cap U_2 = 0,\ (U_1 + U_2) \cap U_3 = 0,\ U_1 + U_2 + U_3 = V.$

(Man nennt V die *direkte Summe* von U_1, U_2, U_3 und schreibt $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.)

(b) Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume von V. Zeige: Die Aussage (1) impliziert (2), und (2) impliziert (3), die umgekehrten Implikationen gelten dagegen nicht:

(1) $U_1 \cap U_2 = 0,\ (U_1 + U_2) \cap U_3 = 0.$

(2) $U_1 \cap U_2 = 0,\ U_1 \cap U_3 = 0,\ U_2 \cap U_3 = 0.$

(3) $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = 0.$

(Man kann also in (a) die Bedingung (ii) nicht abschwächen, indem man (1) durch (2) oder (3) ersetzt!)

3. Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume von V. Zeige:

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) \supseteq \big(U_2 + (U_3 \cap U_1)\big) \cap \big((U_3 + (U_1 \cap U_2)\big)$$

und

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) \subseteq \big(U_2 \cap (U_3 + U_1)\big) + \big((U_3 \cap (U_1 + U_2)\big)$$

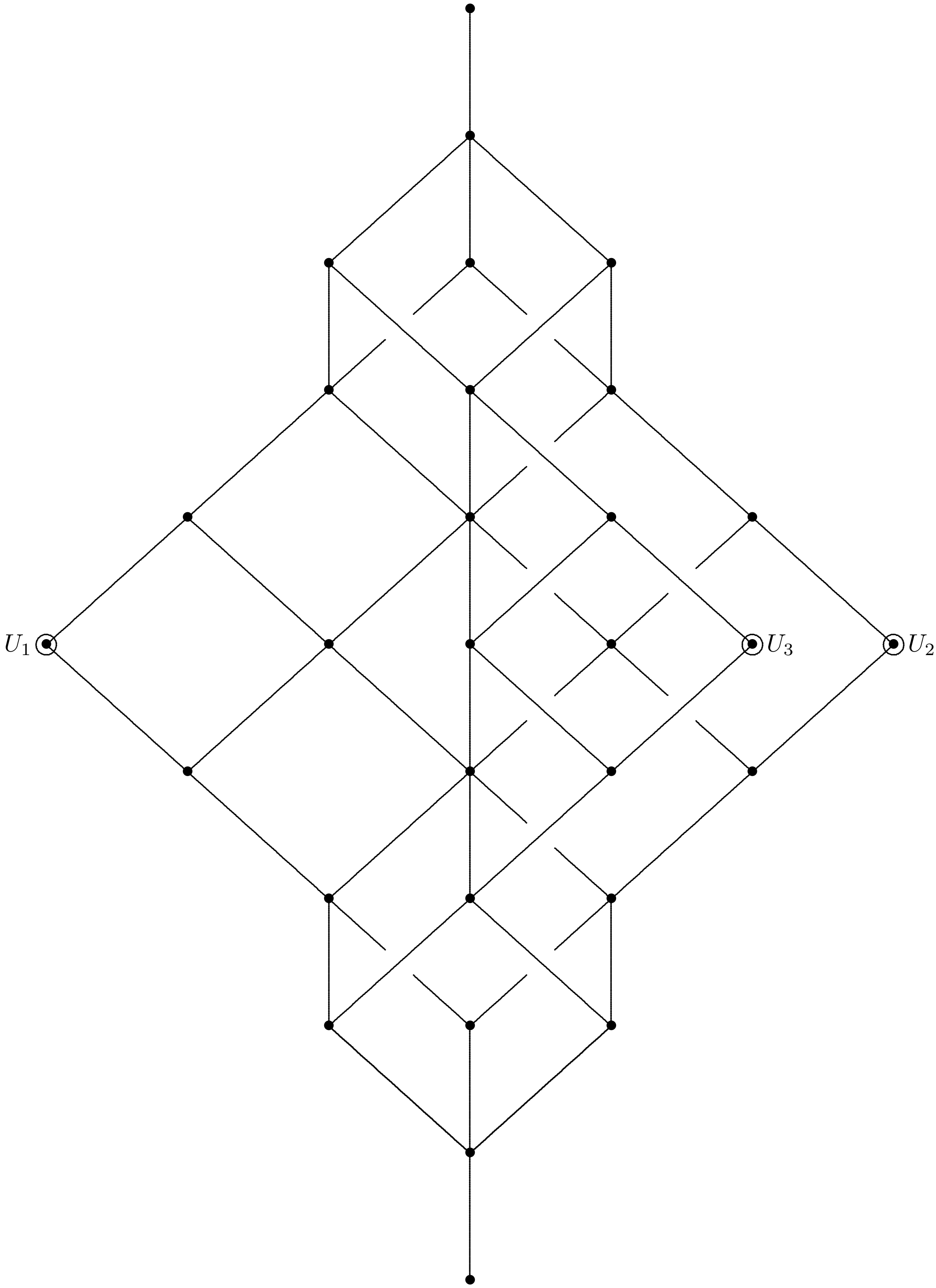
Setzt man also für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$

$$U_i' = U_i + (U_j \cap U_k) \quad \text{und} \quad U_i'' = U_i \cap (U_j + U_k).$$

so gilt (auch dies ist zu zeigen):

$$U_1' \cap U_2' = U_1' \cap U_3' = U_2' \cap U_3', \quad \text{und} \quad U_1'' + U_2'' = U_1'' + U_3'' = U_2'' + U_3''.$$

4. Seien U_1, U_2 vier-dimensionale Unterräume von K^6. Welche Möglichkeiten gibt es für $\dim(U_1 \cap U_2)$? Man gebe jeweils ein Beispiel an.



U_1
U_3
U_2