Übungsaufgaben 4.

Weiteres zur Matrizen-Multiplikation

1. Zur Gauss-Elimination. Sei K ein Körper und $A \in M(m\times; n, R)$. Sei l das Minimum von m und n.

Zeige: Man braucht höchstens $m\cdot l$ Einzelschritte, um A in Schubert-Normalform zu bringen. Dabei soll unter einem Einzelschritt eine der drei Operationen verstanden werden:
- Vertauschen zweier Zeilen,
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile,
- Multiplikation einer Zeile mit einem von Null verschiedenen Skalar

Zum Knobeln. Kann man die Schranke $m \cdot l$ verbessern?

2. Seien $\lambda, \mu \in K$. Man bestimme alle (2×2)-Matrizen A mit Koeffizienten in K, für die gilt:

$$A \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} A.$$

Hinweis: Es gibt **zwei** wesentlich verschiedene Fälle. Welche?

3. Betrachte die $(n \times n)$-Matrix $J = (c_{ij})_{ij}$ mit $c_{i,i+1} = 1$ für $1 \leq i < n$ und $c_{ij} = 0$ sonst. Zeige: Ist $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$ so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $AJ = JA$

(ii) Es ist $a_{ij} = 0$ für $i > j$ und es ist $a_{i,j} = a_{s,t}$ falls gilt $j - i = t - s \geq 0$.

(iii) A ist eine Linearkombination der Matrizen $I, J, J^2, \ldots J^{n-1}$.

4. Sei R ein kommutativer Ring. Ist $A = (a_{ij})_{ij}$ eine $(n \times n)$-Matrix mit Koeffizienten in R, so nennt man $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die **Spur** von A.
Zeige: Sind $A, B \in M(n \times n, R)$, so haben die Matrizen AB und BA die gleiche Spur.