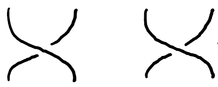
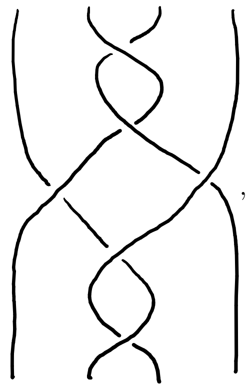
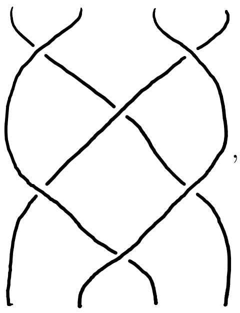
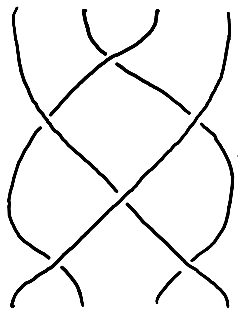
Dr. S. Witzel
Prof. Dr. K.-U. Bux

Lösung des 1. Übungsblatts zur Vorlesung Zopfgruppen

Aufgabe 1.1 (Multiplikation von Zöpfen) Die Zöpfe b_2 und b_3 kommutieren. Nennen wir das Produkt b_{23}. Man erhält

$b_{23} \cdot b_1 =$  , $b_1 \cdot b_{23} =$  ,

$b_2 \cdot b_1 \cdot b_3 =$  , $b_3 \cdot b_1 \cdot b_2 =$  .

Aufgabe 1.2 (Gruppenaxiome) Für einen geometrischen Zopf b seien wieder $b_i \colon I \to \mathbb{R}^2$ Parametrisierungen der Stränge.

a) Sei $\sigma \colon I \times I \to I$ gegeben durch

$$\sigma(t,s) := \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2}s\right)t & t \le \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{2}s & \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4} \\ t - \frac{1}{2}s(1-t) & \frac{3}{4} < t. \end{cases}$$

Dann funktioniert die Isotopie $(i,t,s) \mapsto ((b_1 \cdot (b_2 \cdot b_3))_i(x, y, \sigma(t,s)), t)$.

b) Hier ist eine mögliche Isotopie $(i,t,s) \mapsto (b_i(\min((1+s)t, 1)), t)$.

c) Eine Isotopie ist gegeben duch $(i,t,s) \mapsto \begin{cases} (b_i(\max(2t,s)), t) & t \le 1/2 \\ (b_i(\min(2-2t,s)), t) & t \ge 1/2 \end{cases}$.

Aufgabe 1.3 (Zöpfe und Permutationen)

Da Isotopien die Enden der Stränge festhalten, ist die Abbildung wohldefiniert.

Für einen Zopf b bezeichnen wir mit s_b die Permutation, die gegeben ist durch $b_i(1) = (s_b(i), 0)$ (wobei $b_i(0) = (i, 0)$). Dann ist der Pfad $(b \cdot b')_i$ gleich dem Pfad b_i gefolgt von $b'_{s_b(i)}$. Dieser endet in $(s_{b'}(s_b(i)), 0)$. Demnach ist $b \mapsto s_b$ ein Antihomomorphismus und somit $b \mapsto s_b^{-1}$ ein Homomorphismus.

Schließlich ist es leicht Zöpfe anzugeben, die zwei benachbarte Elemente vertauschen. Somit ist der Homomorphismus surjektiv.

Aufgabe 1.4 (Abstand von Zöpfen)

Siehe Seite 10 von Kassel, Turaev, “Braid Groups”.