Übungen zu Vertiefung Elementare Zahlentheorie

WS 2010/2011, Blatt 3

Aufgabe 9. Seien a und b ganze Zahlen > 0, wobei

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$$

mit Primzahlen $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ und Exponenten $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, \ldots, n_r \geq 1$. Beweisen Sie: Es gilt $b \,|\, a$ genau dann, wenn

$$b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}$$

mit Exponenten $0 \leq m_1 \leq n_1, 0 \leq m_2 \leq n_2, \ldots, 0 \leq m_r \leq n_r$.

Aufgabe 10. Für jede ganze Zahl $a > 0$ bezeichnet man mit $\tau(a)$ die Anzahl der Teiler > 0 von a. Bestimmen Sie $\tau(1024)$ und $\tau(5040)$.

Aufgabe 11. Beweisen Sie für ganze Zahlen a, b, r, s mit $r > 0$, $s > 0$:

$$r \,|\, s \text{ und } \frac{s}{r} \text{ ungerade} \quad \Longrightarrow \quad a^r + b^r \,|\, a^s + b^s.$$

Aufgabe 12. Beweisen Sie: Ist $2^N + 1$ (N ganz ≥ 1) eine Primzahl, dann ist N eine Zweierpotenz, d.h. $N = 2^n$ mit n ganz ≥ 0.
(*Hinweis:* Aufgabe 11.)

Abgabe bis Freitag, 5.11.2010, 12:00 Uhr