Übung 2

Satz 0.1 *Es sei K ein Körper. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben seien Matrizen $A_{ij} \in M(n \times n, K)$ für $i, j = 1, \ldots, m$, die miteinander kommutieren. Wir bezeichnen mit $R \subset M(n \times n, K)$ die kommutative K-Teilalgebra, die von den Matrizen A_{ij} erzeugt wird.*

Dann gilt:

$$\det_{K,n}(\det_{R,m}(A_{ij})) = \det_{K,nm}(A_{ij}). \tag{1}$$

Hier betrachten wir (A_{ij}) auf der linken Seite als eine Matrix in $M(m \times m, R)$ und auf der rechten Seite als eine Matrix in $M(mn \times mn, K)$, die in Blockform geschrieben ist.

Beweis: Wir beweisen das durch Induktion nach m. Der Fall $m = 1$ ist offensichtlich. Nach Induktionsvoraussetzung gilt (1) für Matrizen der Form:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \ldots & & (A_{ij})_{i,j\geq 2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{2}$$

Im allgemeinen Fall können wir auf die Matrix $(A_{ij}) \in M(m \times m, R)$ eine Zeilen- oder Spaltenscherung anwenden, ohne den Wert von $\det_{R,m}(A_{ij})$ zu ändern. Eine Scherung bedeutet, dass eine Zeile (bzw. Spalte) multipliziert mit einem Faktor aus R zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte) addiert wird. In Termen von Blockmatrizen wird dies durch die Multiplikation mit einer Blockmatrix von links (bzw. rechts) realisiert, deren Determinante $\det_{K,nm}$ gleich 1 ist. Deshalb ändert auch die rechte Seite von (1) bei einer solchen Scherung ihren Wert nicht. Um genügend Scherungen zur Verfügung zu haben fügen wir zu R noch alle Elemente r^{-1} hinzu, wobei $r \in R$ als Matrix invertierbar ist und betrachten die davon erzeugte kommutative Algebra. Wir können R durch diese größere kommutative Algebra ersetzen, ohne dass sich an der Aussage etwas ändert.

Wenn (A_{ij}) eine Matrix ist, so dass A_{11} invertierbar ist, so können wir sie durch Scherungen in die Form (2) bringen, ohne dass sich dabei die Werte der beiden Seiten von (1) ändern. Also gilt die Gleichung (1) in dem Fall wo A_{11} invertierbar ist.

Für den allgemeinen Fall setzen wir voraus, dass K unendlich ist. Das ist erlaubt, da wir zu einem Erweiterungskörper von K übergehen können.

Wir ersetzen in der Blockmatrix (A_{ij}) den Block A_{11} durch $A_{11} - \lambda E_n$, wobei $E_n \in M(n \times n, K)$ die Einheitsmatrix ist, und $\lambda \in K$ eine Variable. Die Blöcke der so entstandenen Matrix (B_{ij}) kommutieren miteinander. Die behauptete Gleichung (1) wird dann eine Identität zwischen Polynomfunktionen in λ. Deshalb genügt es diese Identität für unendlich viele $\lambda \in K$ zu verifizieren. Aber die Matrix $B_{11} = A_{11} - \lambda E_n$ ist mit Ausnahme endlich vieler λ invertierbar. Bis auf diese Ausnahmen gilt nach dem Bewiesenen die Gleichung (1). Also gilt die Gleichung für alle $\lambda \in K$ und insbesondere für $\lambda = 0$. *Q.E.D.*

Korollar 0.2 *Es sei S eine endlichdimensionale kommutative K-Algebra. Es sei M ein freier S-Modul von endlichem Rang und $\phi : M \to M$ ein S-Modulendomorphismus. Insbesondere ist M auch ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus dieses Vektorraums.*

Es gilt:

$$\mathrm{Norm}_{S/K} \det{}_S(\phi|M) = \det{}_K(\phi|M).$$

Beweis: Man wählt eine Basis von S/K. Für $s \in S$ wird die Multiplikation mit $s : S \to S$ durch eine Matrix $A(s)$ bezüglich dieser Basis repräsentiert. Wir wählen weiter eine Basis des S-Moduls M. Dann wird ϕ als S-Modulendomorphismus durch eine Matrix (s_{ij}) repräsentiert. Als K-Modulisomorphismus wird ϕ durch die Blockmatrix $(A(s_{ij}))$ repräsentiert. Die behauptete Gleichung ist dann äquivalent mit (1) für $(A(s_{ij}))$. *Q.E.D.*