Übung 6

Satz 0.1 *(Variante des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes): Es sei* $(R, \mathfrak{m})$ *ein artinscher lokaler Ring. Es sei* $f(T) \in R[T]$ *ein Polynom, so dass* $f(T) \not\equiv 0 \mod \mathfrak{m}$.

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes unitäres Polynom (d.h. höchster Koeffizient $= 1$*)* $g(T) \in R[T]$*, so dass* $f(T)R[T] = g(T)R[T]$.

Beweis: Es sei $\kappa = R/\mathfrak{m}$. Es sei $\bar{f}(T) \in \kappa[T]$ die Restklasse von $f(T)$. Wir setzen $d = \text{Grad } \bar{f}(T)$. Wir betrachten die Abbildung

$$\oplus_{i=0}^{d-1} RT^i \to R[T]/f(T)R[T].$$

Nach Nakayama ist diese Abbildung surjektiv, denn sie ist modulo $\mathfrak{m}$ surjectiv. (Da $\mathfrak{m}$ nilpotent ist, brauchen wir uns nicht um endlich erzeugt zu kümmern.) Also finden wir ein unitäres Polynom $g(T) \in R[T]$ vom Grad d, so dass $g(T) \in f(T)R[T]$. Wir schreiben $g(T) = f(T)u(T)$. Wir betrachten die letzte Gleichung modulo $\mathfrak{m}$

$$\bar{g}(T) = \bar{f}(T)\bar{u}(T).$$

Da $\bar{g}(T)$ und $\bar{f}(T)$ den gleichen Grad haben, folgt $\bar{u}(T) = \bar{a} \in \kappa \subset \kappa[T]$, $\bar{a} \neq 0$. Daraus folgt, dass $u(T) \in R[T]$ eine Einheit ist. *Q.E.D.*

Korollar 0.2 *Es sei* $(R, \mathfrak{m})$ *ein kompletter noetherscher lokaler Ring. Es sei* $f(T) \in R[T]$ *ein Polynom, das modulo* $\mathfrak{m}$ *ungleich* 0 *ist. Dann hat* $f(T)$ *eine Darstellung*

$$f(T) = ag(T)(1 + u(T)), \quad a \in R^*, \ u(T) \in T\mathfrak{m}[T],$$

und wo $g(T) \in R[T]$ *ein unitäres Polynom ist.*

Beweis: Wir betrachten die Restklasse $f_n(T) \in (R/\mathfrak{m}^n)[T]$ von $f(T)$ und das unitäre Polynom $g_n(T) \in (R/\mathfrak{m}^n)[T]$, welches nach dem Satz zu $f_n(T)$ gehört. Wegen der Eindeutigkeit gibt es ein unitäres Polynom $g(T) \in R[T]$ mit den Restklassen $g_n(T)$.

Wir betrachten das Bild $f_M \in R[T]/g(T)R[T] =: M$ von f. Nach Konstruktion gilt $f_M \in \mathfrak{m}^n M$ für alle $n > 0$. Da M ein freier R-Modul ist gilt nach Krull $\cap_{n>0}\mathfrak{m}^n M = 0$. Also gilt $f \in g(T)R[T]$. Wir schreiben $f(T) = g(T)u(T)$ und schließen wie im Beweis des Satzes. *Q.E.D.*