Die Eulergerade und der Eulerkreis

Es sei ABC ein Dreieck. Es seien $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ die Seiten des Dreiecks. Es sei A' der Mittelpunkt der Seiten a, es sei B' der Mittelpunkt der Seite b und es sei C' der Mittelpunkt der Seite c.

Wir wissen, dass es eine zentrale Homothetie κ gibt, so dass

$$\kappa(A) = A',\ \kappa(B) = B',\ \kappa(C) = C'.$$

Der Fixpunkt S von κ liegt auf allen 3 Geraden AA', BB' und CC'. Also ist S der Schnittpunkt aller 3 Seitenhalbierenden des Dreiecks. Da $\overrightarrow{A'B'} = -(1/2)\overrightarrow{AB}$ finden wir, dass

$$\kappa = h(S, -(1/2))$$

die zentrale Homothetie mit dem Fixpunkt S und dem Streckungsfaktor $-(1/2)$ ist. Insbesondere gilt also:

$$\overrightarrow{SA'} = -(1/2)\overrightarrow{SA}.$$

In dem gleichen Verhältnis teilt S auch die anderen Seitenhalbierenden.

Wir bezeichen mit h_A, h_B, h_C die drei Höhen des Dreiecks und mit m_a, m_b und m_c die Mittelsenkrechten der Seiten a, b, c.

Die Geraden h_A und m_a sind parallel, da sie beide orthogonal zu a sind. Da $\kappa(h_A)$ parallel zu h_A ist und $A' \in \kappa(h_A)$, muss $\kappa(h_A)$ mit der Mittelsenkrechte m_a übereinstimmen. Entsprechendes gilt dann auch für die anderen Höhen:

$$\kappa(h_A) = m_a,\ \kappa(h_B) = m_b,\ \kappa(h_C) = m_c \tag{1}$$

Wir wissen, dass sich die Mittelsenkrechten m_a, m_b, m_c in einem Punkt M schneiden. Aus (1) sehen wir, dass sich die Höhen in dem Punkt $H = \kappa^{-1}(M)$ schneiden.

Satz 0.1 *Es sei ABC ein Dreieck. Der Schnittpunkt der Höhen H, der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden S und der Umkreismittelpunkt M liegen auf einer Geraden (Eulergerade). Es gilt:*

$$\overrightarrow{SM} = -(1/2)\overrightarrow{SH}.$$

Beweis: Das folgt unmittelbar aus der Gleichung $h(S, -(1/2))(H) = M$.

Satz 0.2 *(Eulerkreis) Es seien F_A, F_B und F_C die Fußpunkte der Höhen des Dreiecks ABC. Dann liegen die Punkte $A', B', C', F_A, F_B, F_C$ auf einem Kreis.*

Beweis: Die Homothetie κ bildet den Umkreismittelpunkt M auf den Umkreismittelpunkt N von $A'B'C'$ ab. Aus der letzten Proposition folgt, dass N der Mittelpunkt der Strecke MH ist. Es sei $\tau = h(H, \frac{1}{2})$, d.h. die Homothetie mit dem Fixpunkt H, so dass

$$\tau(M) = N.$$

Es sei $\mathcal{C}$ der Umkreis von ABC und es sei $\mathcal{D}$ der Umkreis von $A'B'C'$. Dann sind κ und τ die beiden Homothetien, welche $\mathcal{C}$ auf $\mathcal{D}$ abbilden.

Es sei $A'' = \tau(A)$. Das ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AH}$, weil H der Fixpunkt von τ ist. Dieser Punkt liegt folglich auf $\mathcal{D}$. Der Radius $A''N$ ist parallel zu AM, weil τ eine Homothetie ist. Genauso ist $A'N$ parallel zu AM, weil κ eine Homothetie ist. Also ist $A'A''$ ein Durchmesser von $\mathcal{D}$. Weil der Winkel $\angle A''F_AA'$ ein rechter ist, liegt folglich F_A auf $\mathcal{D}$. *Q.E.D.*