Algebra, Übungen 4

1) Es sei R ein kommutativer Ring. Es seien $a, b \in R$. Es sei n eine naürliche Zahl. Man beweise für $a, b \in R$ die binomische Formel:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Es sei $n = p$ eine Primzahl und es sei $px = 0$ für alle $x \in R$. Dann folgt aus der binomischen Formel, dass

$$(a+b)^p = a^p + b^p.$$

Folgern Sie, dass für alle $a \in \mathbb{F}_p$ gilt: $a^p = (1 + \ldots + 1)^p = a$.

2) Man beweise, dass folgendes Polynom in $\mathbb{C}[T, X]$ ein Primpolynom ist

$$X^{2n}Y + XY^n - X - Y + 1.$$

3) Es sei

$$\mathbb{Z}[\mathbf{i}] = \{a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C} \mid a, b \in Z\}.$$

Diesen Teilring von $\mathbb{C}$ nennt man den Ring der ganzen Gaußschen Zahlen.

Man beweise, dass $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ein Hauptidealring ist.

(Es sei $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal. Man ein $z \in \mathfrak{a}$, so dass $|z|$ minimal ist. Es sei $z' \in \mathfrak{a}$ aber $z' \notin \mathbb{Z}[\mathbf{i}]z$. Man schreibt $z' = wz$ im Körper $\mathbb{C}$. Man findet eine komplexe Zahl $w' = r + s\mathbf{i}$, so dass $|r|, |s| \leq 1/2$ und $w - w' \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$. Man zeige $zw' \in \mathfrak{a}$. Wieso ist das ein Widerspruch ?)

4) Ein Polynom in $f \in \mathbb{F}_p[T]$ heiße invariant, wenn

$$f(T) = f(T+1).$$

Die invarianten Polynome bilden einen $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Polynome vom Grad 0 sind invariant. Da ein Polynom vom Grad p höchstens p Nullstellen haben kann, gilt die Identität (vgl. Aufgabe 1)

$$T(T+1)(T+2) \cdot \ldots \cdot (T-p+1) = T^p - T.$$

Dieses Polynom ist invariant.

Es sei f ein invariantes Polynom, so dass $f(0) = 0$. Beweisen Sie $T^p - T | f$. (Wenden Sie auf die Primzerlegung von f die Substitution $T \mapsto T + 1$ an.) Beweisen Sie, dass

$$f = T^p - T - 1$$

ein Primpolynom ist.