Lineare Algebra 1: Blatt 7

Priv.-Doz. Dr. Irene Bouw

Abgabe: 24.05.06, 16:00 Uhr s.t. in den Briefkasten. Achtung: die Vorlesung fällt am Donnerstag 25.5., aus. Daher ist das Übungsblatt schon am Mittwoch abzugeben. Die Aufgabe Nr. 4 ist eine Sternaufgabe; mit dieser Aufgabe kann man Bonuspunkte erhalten.

Aufgabe 1. (2+1+2+1=6 P) Seien

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die (reellen) Eigenwerten und Eigenvektoren von A.

(b) Zeigen Sie, daß A diagonalisierbar ist, und finden Sie eine Basiswechselmatrix $S \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, so daß

$$D = S^{-1}AS$$

eine Diagonalmatrix ist.

(c) Berechnen Sie die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren von B.

(d) Zeigen Sie, daß B aufgefaßt als komplexe Matrix diagonalisierbar ist, aber nicht als reelle Matrix.

Aufgabe 2. (1.5+1.5+1.5+1.5=6 P)

(a) Sei $A \in M_{n,n}(K)$ eine idempotente Matrix, also gilt $A^2 = A$. Zeigen Sie, daß falls λ ein Eigenwert von A ist, so ist $\lambda = 1$ oder $\lambda = 0$.

(b) Benutzen Sie Aufgabe 4 von Blatt 4 um zu zeigen, daß jede idempotente Matrix diagonalisierbar ist. (Die Lösung von Aufgabe 4 von Blatt 4 finden Sie auf der Webseite.)

(c) Sie $B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ eine *nilpotente Matrix*, das heißt, daß es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $B^n = (0)$. Zeigen Sie, daß $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von B ist.

(d) Zeigen Sie, daß

$$\begin{pmatrix} (0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine nilpotente Matrix ist, welche nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. (2+2=4 P) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit reellen Einträgen.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, daß die komplex Konjugierte $\bar{\lambda}$ auch ein Eigenwert von A ist. Zeigen Sie außerdem, daß λ und $\bar{\lambda}$ die gleiche algebraische Multiplizität haben.

(b) Sei nun $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Benutzen Sie (a) um zu zeigen, daß A mindestens einen reellen Eigenwert hat. (Tip: Vergleichen Sie mit Aufgabe 1c).

Aufgabe 4. (Bonuspunkte: 2+2 =4P) Dies ist eine Sternaufgabe!

Sei $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ eine Matrix, deren Einträge positive reelle Zahlen sind.

(a) Zeigen Sie, daß A zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hat.

(b) Sei λ_1 der grössere Eigenwert. Zeigen Sie, daß es einen Eigenvektor v_1 zu λ_1 im ersten Quadranten und einen Eigenvektor v_2 zu λ_2 im zweiten Quadranten gibt. (Das heißt, daß $v_i = (x_i, y_i)$ mit $x_1 > 0, y_1 > 0, x_2 > 0$ und $y_2 < 0$.)
Tip: bestimmen Sie einen Eigenvektor mit Eigenwert λ_i in Termen von a_{11}, a_{12} und λ_i.