Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2021/22
22.12.2021
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR EINFÜHRUNG IN DIE PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

37. (4 Punkte) Es sei u eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist u_λ, definiert durch $u_\lambda(t, x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$, wieder eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

(b) $v(t, x) := \langle x, \nabla u(t, x)\rangle + 2tu_t(t, x)$ löst ebenfalls $u_t - \Delta u = 0$. (Man verwende Teil (a).)

38. (4 Punkte) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei $g(x) = e^{\alpha|x|^2}$. Berechnen Sie

$$u(t, x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy$$

durch quadratische Ergänzung im Argument der Exponentialfunktion. Zeigen Sie, dass Sie auch für $\alpha > 0$ eine Lösung des Cauchy-Problems $u(0, x) = g(x)$ für die Wärmeleitungsgleichung erhalten, und bestimmen Sie deren Lebensdauer (das ist das maximale T, so dass die Lösung auf $[0, T)$ existiert) in Abhängigkeit von α.

39. (7 Punkte) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung zur Berechnung der Integrale

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2} d\xi$, (b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^3(\xi)}{\xi^3} d\xi$.

(Für Teil (b) ist auch der Faltungssatz von Nutzen.) Führen Sie ferner durch partielle Integration die Berechnung des uneigentlichen Integrals

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi$$

auf (a) zurück.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten, einen guten Übergang ins neue Jahr und eine erholsame vorlesungsfreie Zeit!

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Mo., 10.01., 14.00 Uhr
Besprechung: Mo., 10.01.2022 und Mi., 12.01.2022, in den Übungen