2.4 Die Greensche Darstellungsformel

Def.: (1) Die Funktionen $N_y : \mathbb{R}^n \setminus \{y\} \to \mathbb{R}$, def. durch

$$N_y(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x-y| & (n=2) \\ \frac{-1}{(n-2)\omega_n} |x-y|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

heißen Newton- oder Coulombpotentiale in $y \in \mathbb{R}^n$.

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet und, für jedes $y \in \Omega$,

$$\varphi(y,\cdot) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(y,x)$$

eine harmonische Funktion in $C^2(\overline{\Omega})$. Dann heißt eine Funktion

$$G : (\Omega \times \Omega) \setminus D := \{(x,x) : x \in \Omega\} \to \mathbb{R}$$

der Gestalt $G(y,x) := N_y(x) + \varphi(y,x)$ eine Grundlösung des Laplace-Operators für das Gebiet Ω.

Satz 1 (Greensche Darstellungsformel). Es seien

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein stückweise glatt berandetes, beschränktes Gebiet,
- G eine Grundlösung von Δ für Ω und
- $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(y,x) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) G(y,x) \, dS_x$$

$$+ \int_{\Omega} G(y,x) \Delta u(x) \, dx$$

Folgerungen: (1) N_0 ist eine Fundamentallösung des Laplace-Operators.

Bew.: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen Ω so, dass supp $\varphi \subset \Omega$, dann fallen für $u = \varphi$ die Randterme in der Greenschen Darstellungsformel mit $G(y,x) = N_y(x)$ weg und wir erhalten

$$\varphi(y) = \int_\Omega N_y(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \int_\Omega N_0(x-y)\Delta^*\varphi(x)\,dx.$$

Das letzte Integral kann wg. supp $\varphi \subset \Omega$ auch als $\int_{\mathbb{R}^n} N_0(y-x)\Delta^*\varphi(x)\,dx = N_0 * \Delta^*\varphi(y)$ geschrieben werden.

(2) Satz 1 im letzten Abschnitt ergibt: Für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ ist durch $u := f * N_0$ eine Lösung von $\Delta u = f$ gegeben.

(3) Ist $u \in C^2(\bar\Omega)$ eine Lösung des Dirichletschen Randwertproblems $\Delta u = 0$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega)$,

so gilt $u(y) = \int_{\partial\Omega} g(x)\frac{\partial G}{\partial \nu}(y,x) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)G(y,x)\,dS_x$.

Hierbei ist G eine beliebige Greensche Lösung für Ω.

(4) Entsprechend hat man für eine Lösung $u \in C^2(\bar\Omega)$ des Neumannschen RWP $\Delta u = 0$ in Ω, $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = h \in C(\partial\Omega)$

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu}(y,x) - h(x)G(y,x)\,dS_x$$

Zum Beweis der Darstellungsformel werden wir die nachstehenden Folgerungen aus dem Divergenzsatz verwenden:

Lemma 1 (Greensche Identitäten): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das den Voraussetzungen des Gauss'schen Satzes genügt. Dann gilt für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$(1) \quad \int_\Omega v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u\rangle \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_x \quad ,$$

$$(2) \quad \int_\Omega v\Delta u - u\Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS_x .$$

Bew.: Übungsaufgabe.

Bew. von Satz 1: Wir setzen $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(y)}$ und wenden die zweite Greensche Identität auf u und $v = G(y,\cdot)$ an. Wegen $\Delta v = 0$ verschwindet der zweite Summand im Integral auf der linken Seite von (2) und wir erhalten

$$\int_{\Omega_\varepsilon} G(y,x)\Delta u(x) \, dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} G(y,x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(y,x) \, dS_x .$$

Nun ist $G(y,\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $\Delta u \in C(\overline{\Omega})$, also insbesondere beschränkt. Der Lebesguesche Konvergenzsatz ergibt

$$\int_\Omega G(y,x)\Delta u(x)\,dx \overset{\text{Lebesgue}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} G(y,x)\Delta u(x)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} G(y,x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial G}{\partial\nu_x}(y,x)\,dS_x$$

$$= \int_{\partial\Omega} G(y,x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial G}{\partial\nu_x}(y,x)\,dS_x$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u(x)\frac{\partial G}{\partial\nu_x}(y,x) - G(y,x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dS_x$$

Der Vorzeichenwechsel beim letzten Integral beruht darauf, dass der Normalenvektor an Ω_ε ~~[illegible]~~ am inneren Teil von $\partial\Omega_\varepsilon$ nach innen, also zum Punkt y weist, beim Integral über $\partial B_\varepsilon(y)$ jedoch nach außen.

Es bleibt zu zeigen, dass

$$u(y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u(x)\frac{\partial G}{\partial\nu_x}(y,x) - G(y,x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dS_x .$$

Hierbei ist auf $\partial B_\varepsilon(y)$

$$\left|G(y,x)\cdot\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right| \le \|\nabla u\|_{L^\infty}\cdot C_n\cdot\begin{cases}|\ln(\varepsilon)| & n=2\\ \varepsilon^{2-n} & n\ge 3\end{cases}$$

und daher

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} G(y,x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dS_x\right| \le \|\nabla u\|_{L^\infty}\tilde C_n\cdot\varepsilon^{n-1}\cdot\begin{cases}|\ln(\varepsilon)| & n=2\\ \varepsilon^{2-n} & n\ge 3,\end{cases}$$

sodass dieser Beitrag für $\varepsilon\to 0$ verschwindet.

Für den ersten Beitrag (von $u \cdot \frac{\partial G}{\partial \nu}$) berechnen wir

$$\nabla_x G(y,x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \cdot (2-n) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^n} + \nabla_x \varphi(y,x)$$

das ist auch für $n=2$ richtig!

$$= \frac{1}{\omega_n} \frac{x-y}{|x-y|^n} + \text{beschränkt}$$

so dass wegen $\nu_x = \frac{x-y}{|x-y|}$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(y,x) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-1}} + \text{beschränkt}.$$

Auf $\partial B_\varepsilon(y)$ ist gerade $\frac{1}{\omega_n |x-y|^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(y)|}$

und wir erhalten

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(y,x)\, dS_x = \lim_{\varepsilon \to 0} \fint_{|x-y|=\varepsilon} u(x)\, dS_x$$

$= u(y)$, letzteres, weil u stetig ist. $\square$

Die Konsequenzen der Greenschen Darstellungsformel für die Lösung des Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung werden wir im nächsten Abschnitt erörtern. Zuvor sollen noch zwei weitere Beispiele für Fundamentallösungen diskutiert werden. In beiden Fällen machen wir uns das Ergebnis für den Laplace-Operator zunutze.

Bsp. 1: Eine Fundamentallösung für den Cauchy-Riemann-Operator

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (z = x+iy)$$

in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die lokal integrierbare Funktion $E(z) = \frac{1}{\pi z}$.

Bew.: Wir haben $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$= 4 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$ und daher

$$\delta_0 = \Delta \frac{1}{2\pi} \ln(|z|) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \ln(|z|) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \ln(|z|^2)$$

Also ist noch $\frac{\partial}{\partial z} \ln(|z|^2) = \frac{1}{z}$ zu zeigen. Für $z \neq 0$ ist das richtig im Sinne klassischer Ableitungen, denn $\frac{\partial}{\partial z} \ln(|z|^2) = \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(z \cdot \bar{z}) = \frac{1}{z}$.

Wegen der Singularität im Nullpunkt ist die Ableitung jedoch als Distributionsableitung aufzufassen, d.h. es ist zu zeigen, dass $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{z} \varphi(z)\, dz = -\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|z|^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z)\, dz \qquad (*)$$

Nun sei ein solches φ vorgegeben. Dies können wir zerlegen in $\varphi = \varphi_\varepsilon + \varphi^\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ variable), wobei $\varphi_\varepsilon, \varphi^\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ und $\varphi_\varepsilon|_{B_\varepsilon(0)} = \varphi$ und $\varphi^\varepsilon|_{B_{2\varepsilon}(0)^c} = \varphi$. Nach der Vorbemerkung gilt $(*)$

für φ^ε, so dass nur (*) für φ_ε im $\lim_{\varepsilon\to 0}$ zu zeigen bleibt:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{z}\varphi_\varepsilon(z)\,dz \right| \leq \int_{B_{2\varepsilon}(0)} \left|\frac{1}{z}\varphi_\varepsilon(z)\right| dz$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \cdot 2\pi \int_0^{2\varepsilon} \frac{1}{|z|}\, r\,dr \leq 4\pi\varepsilon \|\varphi\|_\infty \to 0 \ (\varepsilon\to 0)$$

Für die rechte Seite können wir annehmen,

dass $\left|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial z}(z)\right| \leq C\cdot\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right| \leq \frac{C}{\varepsilon}\cdot\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\|_\infty$

Dann erhält man für die rechte Seite von (*)

die Abschätzung

$$\leq \frac{C}{\varepsilon}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{2\varepsilon} 2|\ln(r)|\cdot r\,dr \qquad |\ln(r)\cdot r^\delta| \leq C$$

$$\leq \frac{\tilde{C}}{\varepsilon}\cdot\int_0^{2\varepsilon} r^{1-\delta}\,dr \leq \tilde{\tilde{C}}\cdot\varepsilon^{1-\delta} \longrightarrow 0 \ (\varepsilon\to 0).$$

Bsp. 2: Eine Fundamentallösung für den Helmholtz-Operator $\Delta + k^2$ im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die lokal-integrierbare Funktion $E(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\cos(k|x|)}{|x|}$.

Bew.: $x \mapsto \cos(k|x|) = \sum_{\ell=0}^\infty \frac{k^{2\ell}|x|^{2\ell}}{(2\ell)!}$ ist unendlich oft differenzierbar. Wir können die Distributionsableitungen von E also nach der Produktregel berechnen. Es gilt

$$\Delta E(x) = -\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\Delta\frac{1}{|x|}\right)\cdot\cos(k|x|) + 2\left\langle\nabla\frac{1}{|x|}, \nabla\cos(k|x|)\right\rangle + \frac{1}{|x|}\cdot\Delta\cos(k|x|)\right\} =: I + II + III$$

wobei nach der Folgerung aus der Greenschen Darstellungsformel

$$I = \Delta\left(\frac{-1}{4\pi|x|}\right)\cos(k|x|) = \delta_0 \cdot \cos(k|x|) = \delta_0 .$$

Für II und III berechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\cos(k|x|) = -\sin(k|x|)\cdot k \cdot \frac{x_j}{|x|}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-1} = -\frac{x_j}{|x|^3}, \quad \text{so dass}$$

$$II = -\frac{1}{4\pi}\cdot 2 \cdot \frac{1}{|x|^2}\cdot k \cdot \sin(k|x|) = -\frac{k}{2\pi}\frac{\sin(k|x|)}{|x|^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\cos(k|x|) = -k\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sin(k|x|)\cdot\frac{x_j}{|x|}\right)$$

$$= -k\cdot\left(\cos(k|x|)\cdot k\cdot\frac{x_j^2}{|x|^2} - k\cdot\sin(k|x|)\left(\frac{1}{|x|}-\frac{x_j^2}{|x|^3}\right)\right)$$

$$\rightsquigarrow \Delta\cos(k|x|) = -k^2\cdot\cos(k|x|) - 2k\sin(k|x|)\cdot\frac{1}{|x|}$$

$$\cdot\frac{-1}{4\pi|x|}: \quad III = \underbrace{\frac{k^2}{4\pi}\frac{\cos(k|x|)}{|x|}}_{=-k^2E(x)} + \frac{k}{2\pi}\cdot\sin(k|x|)\cdot\frac{1}{|x|^2}$$

Da sich die beiden Beiträge auf $\sin(k|x|)$ gerade aufheben, bleibt

$$\Delta E = \delta_0 - k^2 E \quad \text{bzw.} \quad (\Delta + k^2)E = \delta_0 .$$

Bem.: Fundamentallösungen für den Helmholtz-operator sind auch für $n \in \{2, 4, 5, 6, \dots\}$

bekannt. Man benötigt dazu diejenigen Lösungen der Besselschen Differentialgleichung (62a)

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y(x) = 0 , \quad p = \frac{n}{2} - 1 ,$$

die im Nullpunkt singulär wird und daher von J_p linear unabhängig ist. Man erhält (z.B.)

- für ungerades n:

Besselfunktion zu negativem Index

$$E(x) = |x|^{1-\frac{n}{2}} J_{1-\frac{n}{2}}(k|x|)$$

- und für gerades n:

Neumannsche Funktion

$$E(x) = |x|^{1-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}-1}(k|x|)$$

(Aus: Courant-Hilbert, Band 2, S. 227. Im ersten Band können Sie auch noch mehr über Bessel-Funktionen erfahren.)