Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§2: Normalformentheorie

l11: f-zyklische Unterräume – Teil A

Stichworte: Spezialfall Mipo $\Psi = p^r$, (verallgemeinerter) Hauptraum, f-zyklische Unterräume, Dimension und Unzerlegbarkeit f-zyklischer Unterräume

---

$U_i = \ker p_i(f)^{\nu_i}$ ← Hauptraum in l10

Sei $V \neq \{0\}$ ein K-VR, endl. dim., Aus l10: (Haupträume)
Zu gegebenem $f \in End(V)$ haben wir V zerlegt in Unterräume $U_1, \dots, U_m$, falls $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ gilt, wobei diese Zerlegung des Raumes V aus der Zerlegung $\Psi(T) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\nu_i}$ des Mipos Ψ nach Potenzen von irreduziblen Faktoren entstanden ist. Auf jedem einzelnen invarianten Unterraum U_i induziert f den Endomorphismus $f_i := f_{|U_i} \in End(U_i)$, dessen Minimalpolynom Potenz eines irreduziblen Polynoms ist, nämlich $p_i^{\nu_i}$. Diese Situation betrachten wir in Kapitel l11 genauer "mit der Lupe". Wählen dafür die spezielle Voraussetzung für einen K-VR U, der weiter zerlegt werden soll:

11.1. Vor.: Sei $f \in End(U)$ mit Mipo $\Psi(T) = p(T)^r$, wobei $p(T) = T^k + \alpha_{k-1} T^{k-1} + \dots + \alpha_0$ ein irreduzibles normiertes Polynom vom Grad k in $K[T]$ sei, und sei $r \geq 1$.

$g := p(f)$

Wir bezeichnen:
$$g := p(f) = f^k + \alpha_{k-1} f^{k-1} + \dots + \alpha_1 f + \alpha_0 \, id_U$$
und
$$H_j := \ker(g^j) = \ker(p(f)^j), \quad j = 0, 1, \dots$$

11.2. Def.: die Unterräume H_j heißen (verallgemeinerte) Haupträume. $\rightsquigarrow$ $H_0 = \{0\} \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_r = U$ [Tutorium]

11.3. Bem.: Es ist dann $g^r = p(f)^r = \Psi(f) = 0$, also $H_r = U$. (g ist nilpotent, vgl. Ü)
soll weiter zerlegt werden

11.4. Konstruktion: Wir definieren nun zu jedem $u \in U$ den f-invarianten Unterraum
$$V(u) := L(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{k-1}(u), g(u), gf(u), gf^2(u), \dots, gf^{k-1}(u), g^2(u), g^2 f(u), g^2 f^2(u), \dots).$$
Da $f, g \in End(U)$ ist $V(u) \subseteq U$.
Betrachte auch $W(u) := L(\{f^j(u);\ j = 0, 1, \dots, rk-1\})$.
Diese Räume $V(u)$ $(= W(u))$, genannt f-zyklische Unterräume, haben folgende Eigenschaften:

Situation: U k-VR, $f \in End(U)$

$$\underline{\underline{\mu_f = p^r}}, \quad p \text{ irred.}, \quad r \geq 1$$

$$H_j = \ker p(f)^j = \ker g^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, r \qquad H_r = U$$

Bsp.: $f \in End(\mathbb{R}^2)$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = Fx$

Haben: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \quad 2(F - I) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = F^2 - I$$

$$\Leftrightarrow \quad F^2 - 2F + I = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (F - I)^2 = 0$$

hat Grad 2 $= \dim \mathbb{R}^2$

$$\rightarrow \quad \mu(T) = (T - 1)^2 \text{ ist Mipo}$$

Situation wie oben mit $p(T) = T - 1$, $r = 2$

$k = \deg p = 1$

$g = p(f) = f - id$, hat Matrix $\underbrace{F - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\rightarrow g^2 = 0}$

$H_0 = \ker g^0 = \ker id_{\mathbb{R}^2} = \{0\}$

$\cap|$

$H_1 = \ker g^1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = L(e_1)$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cap|$

$\underline{\underline{H_2}} = \ker g^2 = \ker 0 = \underline{\underline{\mathbb{R}^2}}$

$\rightsquigarrow u \in \mathbb{R}^2$ erzeugt $V(u) = L(f^0(u), f^1(u)) = L(u, f(u))$

$r = 2$, $k = 1$ $\rightsquigarrow rk - 1 = 1$

Bsp: $V(e_1) = L(e_1, \underbrace{f(e_1)}_{e_1}) = L(e_1)$, $V(e_2) = L(e_2, \overbrace{f(e_2)}^{2e_1 + e_2}) = \mathbb{R}^2$

11.5 **Lemma:** (i): $V(u) = L(\{g^j f^i(u);\ i=0,\dots,k-1;\ j=0,1,\dots,r-1\})$,
d.h. wir brauchen nur g-Potenzen bis $r-1$ zu betrachten,
(ii): es ist $W(u) = V(u)$ ein f-invarianter Unterraum von U,
(iii): Ist $u \in H_m$ und $u \notin H_{m-1}$, so ist $\dim V(u) = mk$, $m=1,\dots,r$.
$\deg \Psi \le \dim U$ (iv): Es gibt ein $u \in U$ mit $\dim V(u) = rk = \deg(\Psi)$, wo $\Psi = \mathrm{Mipo}(f)$ laut Vor.,
(v): Jeder dieser Räume ist unzerlegbar, d.h. kann nicht weiter als direkte Summe von nichttrivialen f-invarianten Räumen dargestellt werden.

Bew.: (i): Es ist $g^r = p(f)^r = \Psi(f) = 0$.

(ii): zeigen erst $W(u) \overset{!}{=} V(u)$. „$\supseteq$": Sei $w \in V(u)$, etwa $w = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{ij} g^j f^i(u)$ mit $\lambda_{ij} \in K$. Betrachten dazu passend das Polynom
$q(T) := \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{ij}\, p(T)^j T^i$. Einsetzen von f liefert sofort $w = q(f)(u)$.
Nun ist q ein Polynom vom Grad $\le k(r-1)+k-1 = rk-1$ und hat somit eine Darstellung $q(T) = \sum_{l=0}^{rk-1} \sigma_l T^l$, damit ist $w = q(f)(u) = \sum_{l=0}^{rk-1} \sigma_l f^l(u) \in W(u)$.
„$\subseteq$": Sei $w \in W(u)$, etwa $w = \sum_{l=0}^{rk-1} \sigma_l f^l(u)$, setzen wiederum
$q(T) := \sum_{l=0}^{rk-1} \sigma_l T^l \in K[T]$ und erhalten $w = q(f)(u)$. Nun ist p ein normiertes Polynom vom Grad k, können also durch sukzessive Division mit Rest durch p das Polynom q darstellen als $q(T) = R_0(T) + p(T)R_1(T) + p(T)^2 R_2(T) + \dots + p(T)^{r-1} R_{r-1}(T)$, wobei die "Rest"polynome $R_j \in K[T]$ einen Grad $\le k-1$ haben, also von der Form $R_j(T) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{ij} T^i$ sind. Einsetzen von f liefert dann mit $p(f) = g$:
$$q(f) = R_0(f) + gR_1(f) + \dots + g^{r-1} R_{r-1}(f) = \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{ij}\, g^j f^i,$$
woraus $w = q(f)(u) \in V(u)$ folgt.

Zur f-Invarianz von $V(u)$: Die Erzeugenden $f^l(u)$, $l=0,\dots,rk-1$, von $W(u) = V(u)$ werden wieder nach $V(u)$ abgebildet; denn wegen $f(f^l(u)) = f^{l+1}(u)$ ist dies für $l < rk-1$ trivial, und für $l = rk-1$ erhalten wir mit gewissen $\beta_l \in K$:
$$f(f^{rk-1}(u)) = f^{rk}(u) = g^r(u) - \sum_{l=0}^{rk-1} \beta_l f^l(u) = 0 - \sum_{l=0}^{rk-1} \beta_l f^l(u) \in V(u)$$
(iii): Ist $u \in H_m$, so ist $g^m(u) = 0$ und somit für $j \ge m$, $i \ge 0$:
$$g^j f^i(u) = f^i g^{j-m} \underbrace{g^m(u)}_{=0} = f^i g^{j-m}(0) = 0.$$ Also ist $V(u) = L(\{g^j f^i(u);\ i=0,\dots,k-1,\ j=0,\dots,m-1\})$.
Nach Lemma 10.8(ii) hat $\Psi' = \mathrm{Mipo}(f') = \mathrm{Mipo}(f|_{V(u)})$ die Form $p(T)^{r'}$ mit einem $r' \le r$.
↳ Ψ' teilt $\Psi = p^r$, p irred.

Es ist aber auch $r' \geq m$, denn für $r' \leq m-1$ wäre sonst $p(f')^{m-1} = g^{m-1}|_{V(u)} = 0$ und somit insb. $g^{m-1}(u) = o$, d.h. $u \in H_{m-1}$, was ausgeschlossen war. ⌋

Nehmen wir nun an, die in ⊛ notierten Erzeugenden von $V(u)$ wären abhängig. Dann gibt es nichttriviale Koeffizienten λ_{ts} mit $\sum_{t=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{ts} g^t f^s(u) = o$. Wir bilden das Polynom $q(T) := \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{ts} p(T)^t T^s \in K[T]$, $q \neq 0$, vom Grad $< mk \leq \deg(\psi')$. Dafür ist dann $q(f)(u) = \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{ts} g^t f^s(u) = o$.
Dann gilt aber für alle $i, j \geq 0$: $q(f) g^j f^i(u) = g^j f^i q(f)(u) = o$, d.h. $q(f)$ annuliert ganz $V(u)$. Somit ist $q(T) \in \mathcal{J}(f')$, wird also von $\psi' = \mathrm{Mipo}(f|_{V(u)})$ geteilt.
Das geht aber nur, wenn $q(T) = 0$ ist, da $\deg(q) < \deg(\psi')$ ist.
Dieser Widerspruch zeigt die Unabhängigkeit.
(iv): Es gen. z.z., dass wenigstens für ein u in (iii) bereits $m = r$ eintritt.
⌈Nehmen wir an, dass für jedes u schon $u \in H_{r-1}$ gilt. Dann ist also $g^{r-1}(u) = o$ für alle $u \in U$, d.h. $p(T)^{r-1} \in \mathcal{J}(f)$, was wegen $\psi = p^r$ ausgeschlossen war. ⌋
(v): • Seien V_1, V_2 zwei nichttriviale Teilräume von $V(u)$. Nach Lemma 10.8.(ii) gehören dazu die Mipos $\psi_1(T) = p(T)^{r_1}$ und $\psi_2(T) = p(T)^{r_2}$. Wir betrachten die Räume $W_i := g^{r_i - 1}(V_i) \subseteq V_i$ für $i = 1,2$. Sie sind selbst f-invariant, da $f(W_i) = f(g^{r_i-1} V_i) = g^{r_i-1} f(V_i) \subseteq g^{r_i-1} V_i = W_i$, und nach dem in (iv) angewendeten Schluss bestehen sie nicht nur aus dem Nullvektor o.
$\varphi_i = \mathrm{Mipo}/_{W_i}$ • Bestimmen wir ihre Mipos φ_i: Als invarianter Unterraum von U hat W_i nach Lemma 10.8(ii) ein Mipo der Form $\varphi_i = p^{m_i}$ für ein $0 \leq m_i \leq r$. Da W_i nicht $\{o\}$ ist, muss $m_i \geq 1$ sein, und wegen $g W_i = g(g^{r_i-1} V_i) = g^{r_i} V_i = \{o\}$ ist $m_i \leq 1$, d.h. $\varphi_i = p$ für $i = 1,2$.
• Für ein beliebiges $w \in W_i$, $w \neq o$, enthält W_i den Raum $V(w)$, und nach (iii) (mit $m = 1$) hat dieser die Dimension k. Damit haben wir $W_i \subseteq V$ und $\dim W_i \geq k$ für $i = 1,2$. Andererseits haben wir eben gezeigt, dass $W_i \subseteq \ker g|_{V(u)}$ ist, und somit auch $W_1 + W_2 \subseteq \ker g|_{V(u)}$.

- Bei ⊛ hatten wir $\{g^j f^i(u);\ i=0,\dots,k-1;\ j=0,\dots,m-1\}$ als Basis von $V(u)$ erkannt. Hier liest man sofort ab, dass $\ker g_{|V(u)} = L(\{g^{m-1} f^i(u);\ i=0,\dots,k-1\})$ ist, und somit ist $\dim(W_1+W_2)\leq k$.
- Nach der allgemeinen Dimensionsformel $\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)$ erhalten wir also $\dim(W_1\cap W_2)\geq k+k-k=k$, und somit wegen $W_i\subseteq V_i$ dann $\dim(V_1\cap V_2)\geq k$.
- Dies bedeutet: $V(u)$ kann zwar durchaus verschiedene f-invariante Unterräume enthalten, aber je zwei haben mindestens einen k-dimensionalen Unterraum gemeinsam. Damit kann $V(u)$ nicht in invariante direkte Summanden zerlegt werden. $\square$

11.6 Bem.: i) Aus 11.5 (iv) folgt insb. $\dim(U)\geq\deg(\Psi)$,
d.h. der Grad des Mipos ist höchstens die Dimension des Raumes, dies überträgt sich auch mit Satz 10.11 auf die allgemeine Situation. $\to \deg\Psi\leq\dim V$

(ii) Die in Lemma 11.5 untersuchten Räume $V(u)$ sind die Bausteine, aus denen wir nun eine Zerlegung des Raumes U unter Voraussetzung 11.1 gewinnen wollen. Es liegt nun nahe, eine Zerlegung so zu versuchen, dass man mit einem $u_1\in U$ beginnt, dazu den Raum $V(u_1)$ bildet, dann ein $u_2\in U\setminus V(u_1)$ wählt, dazu $V(u_2)$ bildet, usw.

Es tauchen folgende Probleme auf:

* Wie muss man u_{i+1} wählen, damit $V(u_{i+1})\cap(V(u_1)+\dots+V(u_i))=\{0\}$, d.h. damit die Summe direkt wird?
* Wie stellt man sicher, dass man so ganz U ausschöpft?

(iii) In Lemma 11.5 hatten wir gesehen, dass für alle $u\in U$ gilt, dass $\dim V(u)=mk$ für ein von u unabhängiges $m\in\{0,1,\dots,r\}$, wobei für gewisse u sogar $\dim V(u)=rk$ eintritt. Wir konstruieren nun die u_i so, dass wir stets versuchen, möglichst große Räume zu erhalten.