Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2016–17

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Spezielle Themen: Polyzyklische Gruppen – Blatt 9

Abgabe der Lösungen am 20.12.2016 in der Vorlesung

Bitte bereiten Sie Aufgaben 9.1 und 9.2 für die Übungsstunde vor und geben Sie eine schriftliche Lösungen zu der Aufgabe 9.3 ab; weitere Informationen auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/PolyzyklischeGruppen_WS1617/`

Aufgabe 9.1

Sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(a) Bestimmen Sie den Ganzheitsring $O = O_K$ des quadratischen Zahlkörpers K.

(b) Bestimmen Sie für $d < 0$ die Einheitengruppe O^*.

Aufgabe 9.2

(a) Sei p eine Primzahl und G residuell eine endliche p-Gruppe. Seien $x, y \in G$ und $n = p^e m \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid m$. Zeigen Sie: Aus $[x^n, y] = 1$ folgt bereits $[x^{p^e}, y] = 1$.

(b) Sei G eine torsionsfreie nilpotente Gruppe, und seien $x, y \in G$. Zeigen Sie: Kommutieren x^n und y für irgendein $n \in \mathbb{N}$, so kommutieren bereits x und y.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)

Eine Gruppe G heißt *überauflösbar*, falls es eine endliche Kette von Untergruppen

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G$$

gibt mit $G_i \trianglelefteq G$ und G_i/G_{i-1} zyklisch für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Merke: Jede überauflösbare Gruppe ist insbesondere polyzyklisch.

(a) Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte, nilpotente Gruppe ist überauflösbar.

(b) Weisen Sie durch Angabe geeigneter Beispiele nach, daß überauflösbare Gruppen im allgemeinen nicht nilpotent zu sein brauchen und ähnlich daß polyzyklische Gruppen im allgemeinen nicht überauflösbar zu sein brauchen.

(c) Zeigen Sie: Eine Gruppe G ist überauflösbar genau dann, wenn G die Maximalbedingung für Untergruppen erfüllt und jeder nicht-triviale Quotient von G einen nicht-trivialen zyklischen Normalteiler besitzt.