Analysis 2

Literatur: O. Forster, Analysis 2, [F]
Kap. I: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Vorkapitel:

Offene und abgeschlossene Mengen in metrischen Räumen

im $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ gibt es offene und abgeschlossene Intervall:

- offenes Intervall: $]a,b[$, $]-\infty,a[$, $]a,\infty[$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$
  (reelle Randpunkte gehören nicht zum IV selbst)
  ⇝ auch (bel. gebildete) Vereinigungen offener Mengen sind offen, und auch der Schnitt von endl. vielen
- abgeschl. Intervall: $[a,b]$, $]-\infty,a]$, $[a,\infty[$
  auch: $[a,a] = \{a\}$
  (reelle Randpunkte gehören zum IV selbst)
  ⇝ abgeschl. Mengen sind genau die Komplementmengen offener Mengen

- $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sind beide offen als auch auch abg.
- IVe wie $[a,b[$, $a<b$, sind weder offen noch abg.
- wollen ZWS (in der Form "$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f([a,b]) = [c,d]$") verallgemeinern

Übertragen das Konzept offen/abg. auf beliebige metr. Räume:

Sei (X,d) ein metr. Raum, d.h.

$d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, mit 1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

2) $d(x,y)=d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

d heißt Metrik,

$d(x,y)$ auch Abstand von x und y

Standard-Bsp.: $X=\mathbb{R}^n$, mit $d(x,y):=\|x-y\|$ eukl. Metrik,

wo $\|z\|:=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_n^2}$ für $z=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

euklidische Norm

Geg. (X,d) metr. Raum.

Def. 0.1: Sei $a \in X$, $r>0$. Dann heißt

$B_r(a) := \{x \in X;\ d(x,a)<r\}$

offene Kugel um a mit Radius r.

Def. 0.2: Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls $\exists \varepsilon>0: B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Also: $x \in U$ und $B_\varepsilon(x)$ ist selbst Umgebung von x.

Satz 0.3 (§1 [F], Satz 2): (Hausdorffsches Trennungsaxiom für metrische Räume)

Sei (X,d) metr. Raum,

seien $x,y \in X$, $x \neq y$. Dann ex. Umgebungen U von x und V von y

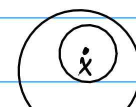
mit $U \cap V = \emptyset$.

Bew.: $\varepsilon := \frac{1}{3} d(x,y) > 0$, $U := B_\varepsilon(x)$, $V := B_\varepsilon(y)$.
Es ist $U \cap V = \emptyset$, denn wäre $z \in U \cap V$,
folgte $3\varepsilon = d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, ↯. □

Man sagt, metr. Räume sind hausdorffsch.

Def. 0.4: $U \subseteq X$ heißt offene Teilmenge von X (kurz "offen"),
falls $\forall x \in U \; \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$,
d.h. U ist Umgebung jedes ihrer Punkte.

⇝ z.B.: offene Kugeln $B_\varepsilon(x)$ sind offen:



Bem.: 1) $\emptyset$, X sind offen,

d.h. es ist durch $i \mapsto U_i$ eine Fkt. $I \to \{U \subseteq X\}$ geg.

2) ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen

3) sind $U_1, \dots, U_n$ endl. viele offene Mengen, so ist auch $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ offen

(vgl. Satz 3 in §1 [F]) ⇝ X ist ein "topologischer Raum"

Bem.: $A \subseteq X$ heißt beschränkt, falls $\exists x \in X \; \exists \varepsilon > 0 : A \subseteq B_\varepsilon(x)$

$A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A \subseteq X$ offen.

Satz 0.5 (Satz 3 in §2 [F]): (X,d) metr. Raum.
Dann:
$$A \subseteq X \text{ abg.} \iff \forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, \text{ alle } x_k \in A : \left(x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} a \in X \Rightarrow a \in A \right)$$

Def. 0.6 (Durchmesser): (X,d) metr. Raum, $A \subseteq X$

$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y);\ x,y \in A\}$
heißt Durchmesser von A

Es gilt: $A \subseteq X$ beschränkt $\Longleftrightarrow \operatorname{diam}(A) \in \mathbb{R}$

Satz 0.7. (Schachtelungsprinzip):

Sei (X,d) vollständig metr. Raum,

$X \supseteq A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ sei absteigende Folge nichtleerer, abg. Teilmengen von X

mit $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam} A_k = 0$.

Dann ex. genau ein $x \in X$ mit $x \in A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

[[F]: §2, Satz 4]

Bem.: im Fall $X = \mathbb{R}^1$ heißt das Prinzip auch "Intervallschachtelung"

Bem.: Zwischen metr. Räumen X, Y definiert man eine stetige Abb. entweder über Folgenstetigkeit oder über ε-δ-Stetigkeit,
beide Begriffe sind äquivalent (§2 [F], Satz 8)

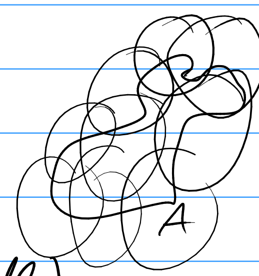
Es gilt: **Satz 0.8:** Sind X, Y metr. Räume, und $f: X \to Y$ stetig.
Dann ist für jede offene Menge $U \subseteq Y$ die Urbildmenge $f^{-1}(U)$ offen.

Kapitel 1: Kompaktheit

[[E], §3]

Sei X metr. Raum, $A \subseteq X$.

<u>0. Def.:</u> Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $U_i \subseteq X$ mit $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ heißt Überdeckung.



$\rightarrow$ die U_i "überdecken" A,
dabei ist I eine beliebige Indexmenge (endl. und unendl.)

<u>1. Def.:</u>
Eine Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A in X heißt offen, falls alle U_i offene Teilmengen von X sind.

z.B. $A \subseteq \bigcup_{x\in A} B_\varepsilon(x)$

<u>2. Def.:</u> Sei X ein metr. Raum.
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung hat,
d.h. wenn endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ existieren, so dass $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$.

in Quantoren: $A \subseteq X$ kompakt $:\Leftrightarrow \forall (U_i)_{i\in I}$, $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, die U_i alle offen in X, $\exists k \in \mathbb{N}\ \exists i_1, \dots, i_k \in I$:
$A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$.

NICHT: "Teil"-Überdeckung = z.T. überdeckt
NICHT: A hat eine endl. offene Überdeckung (z.B. X)
SONDERN: Aus einer beliebigen Überdeckung können endl. viele Überdeckungsmengen ausgewählt werden, so dass diese schon zur vollständigen Überdeckung von A ausreichen.

Bsp.: A kp. und $A \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \dots$
$\Rightarrow$ ex. $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \underbrace{U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}}_{k \text{ Stück}}$

<u>Satz 1:</u> Sei X ein metr. Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $a \in X$.
Dann: $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \underline{\underline{\{a\}}}$ ist kompakt.

<u>Bew.:</u> Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von A.

Da $a \in A$, ex. $k \in I$ mit $a \in U_k$.
Da U_k offen, ist U_k eine Umgebung von a.
Wegen $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U_k$ für alle $n > N$.
Jedes x_m liegt in einem U_{i_m}.
Es folgt: $A \subseteq \underbrace{U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_N} \cup U_k}_{\text{dies sind endl. viele der } (U_i)_{i\in I}}$.

$\square$

<u>Bem.:</u> Satz 1 gilt i.a. nicht, wenn der GW a der Folge nicht in A liegt.
<u>Bsp.:</u> $A := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}$. Beh.: A ist nicht kompakt.

Bew.: $U_1 :=]\frac{1}{2}, 2[$, $U_n :=]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$ für $n \geq 2$.

Die U_i sind offen, und $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Jedes U_n enthält genau einen Punkt von A, nämlich $\frac{1}{n}$. Daher wird A von keinem endl. Teilsystem $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ überdeckt.
Also ist A nicht kompakt.

Satz 2 (Kompakte Quader):

Ziel: Satz von Heine-Borel:
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ kp. $\Leftrightarrow$ A beschr. & abg.