Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer
SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei V ein K-Vektorraum, und $V^{**} = (V^*)^*$ sein Bidualraum. Rechnen Sie nach, daß die Bidualitätsabbildung

$$b : V \longrightarrow V^{**}, \quad x \longmapsto (f \mapsto f(x))$$

linear ist.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $h : V \to V$ ein Endomorphismus, und $h^* : V^* \to V^*$ der duale Endomorphismus. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\chi_h = \chi_{h^*}$ und $\mu_h = \mu_{h^*}$.

(ii) Der Endomorphismus $h : V \to V$ ist genau dann trigonalisierbar, diagonalisierbar bzw. halbeinfach, wenn die entsprechende Eigenschaft für den Endomorphismus $h^* : V^* \to V^*$ gilt.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $f \in V^*$ eine Linearform, und $y \in V$ ein Vektor mit $f(y) \neq 0$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$s : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x - 2\frac{f(x)}{f(y)}y.$$

Verifizieren Sie, daß die Abbildung s linear ist, und bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_s \in K[T]$ sowie die Jordan-Normalform $J \in \mathrm{Mat}(n, K)$.

Aufgabe 4. Seien V, W zwei endlich-dimensionaler K-Vektorräume von gleicher Dimension, und $f : V \to V$ und $g : W \to W$ zwei trigonalisierbare Endomorphismen. Zeigen Sie, daß f, g genau dann die gleiche Jordan-Normalform haben, wenn

$$\operatorname{rank}(f - \lambda \operatorname{id}_V)^i = \operatorname{rank}(g - \lambda \operatorname{id}_W)^i$$

für alle Skalare $\lambda \in K$ und alle $i \geq 0$ gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch den 10.6. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.