Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei $R \subset A$ eine Ringerweiterung, wobei der R-Modul A frei ist.

(i) Angenommen, der Ring A ist artinsch oder noethersch. Verifizieren Sie, dass der Unterring R die gleiche Eigenschaft hat.

(ii) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass (i) im Allgemeinen falsch ist, falls keine Annahme an den R-Modul A gemacht wird.

Aufgabe 2. Sei R ein noetherscher Ring, $\mathfrak{b} \subset R$ ein Ideal, und $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ das zugehörige Radikalideal. Verifizieren Sie, dass $\mathfrak{a}^n \subset \mathfrak{b}$ für ein gewisses $n \geq 0$ gilt.

Aufgabe 3. Sei R ein noetherscher Ring, M ein endlich-erzeugter R-Modul und $f \in R$ ein Skalar. Zeigen Sie, dass die Homothetie

$$M \longrightarrow M, \quad a \longmapsto fa$$

injektiv ist genau dann, wenn f nicht in der Vereinigung der assozierten Primideale $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ liegt.

Aufgabe 4. Sei k ein Grundkörper, T eine Unbestimmte, und

$$R = \bigcup_{n \geq 1} k[[T^{1/n}]]$$

der Ring der formalen Puiseux-Reihen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das Spektrum $X = \mathrm{Spec}(R)$ ist der Sierpinski-Raum $X = \{\sigma, \eta\}$.

(ii) Der Ring R ist lokal aber nicht-noethersch.

(iii) Der Restekörper $k = R/\mathfrak{m}_R$ ist als R-Modul nicht von endlicher Präsentation.

Abgabe: Bis Freitag, den 26. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.