Kapitel 4

Kapitel 4 Konstruieren

4.1. Einleitung

4.2. Theorie

4.3. Einteilung

Kapitel 4

4. Konstruieren

4.1. Einleitung:

Konstruieren

Im Geometrieunterricht der Sekundarstufe ist das Konstruieren ebenso wie das Beweisen eine fundamentale mathematische Aktivität. Bei der Lösung einer Beweisaufgabe haben wir deutlich zwischen Beweisfindung und der Beweisdarstellung unterschieden. Entsprechend unterscheiden wir bei der Lösung einer Konstruktionsaufgabe zwischen dem Finden der Konstruktion und der Darstellung der Konstruktion.

Das Finden der zum Ziel führenden Konstruktion ist – ebenso wie das Finden eines Beweises – ein mehr oder weniger schwieriges Problem. Die heuristischen Methoden, welche für den Problemlöseprozess beim Lösen eines Konstruktionsproblems hilfreich sein können, werden daher im folgenden Kapitel behandelt.

4.2. Theorie:

Didaktische Theorie des Konstruierens

Die Theorie zum Kapitel Konstruieren teilt sich in drei Teile. Hier soll nur ein kurzer Einblick in theoretische Standpunkte des Konstruierens gegeben werden. Diese Einblicke werden dann in die drei Teilaspekte vertieft.

Mit der **handwerklichen Tätigkeit** des Konstruierens ist auch stets die Frage verbunden, wie man ein Konstruktionsziel erreicht. Konstruieren ist eine **mathematische Tätigkeit**.

Konstruiert werden kann mit den **unterschiedlichsten Werkzeugen**! Der Zweck entscheidet im täglichen Leben, welches Werkzeug verwendet wird. In der Schule engt eine Beschränkung auf Zirkel und Lineal den Horizont und somit das mathematische Denken der Lernenden und Lehrenden ein. Wir werden deshalb auch mit anderen Werkzeugen konstruieren.

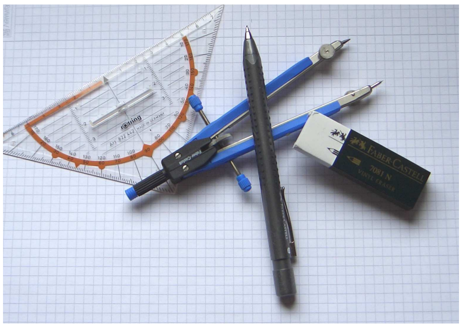
Konstruieren ist eine Strategie (**Algorithmus**), eine Startkonfiguration (Punktmenge, Hilfsmittel) in eine Zielkonfiguration (Zielpunktemenge) überzuführen.

Da Konstruieren einen algorithmischen Charakter hat, ist es einerseits möglich, eine exakte und nachvollziehbare Konstruktionsbeschreibung anzugeben und andererseits mit dynamischen Geometriesystemen **Makros** zu "programmieren", die dann ein **modulares Konstruieren** ermöglichen.

Kapitel 4

4.3. Einteilung:

1. **Konstruieren als mathematische Tätigkeit**
2. **Konstruieren mit Zirkel und Lineal**
3. **Konstruieren mit dem Computer**



4.3.1. Konstruieren als mathematische Tätigkeit

Dieser Teilaspekt beschäftigt sich mit den Gründen und den Zielen des Konstruierens im Mathematikunterricht.

4.3.1.1. Überblick

Während die anderen beiden Teilmodule praxisorientiert sind, werden wir uns hier mit der mathematischen Komponente des Konstruierens unter theoretischen Gesichtspunkten näher beschäftigen. Folgende Fragen sollen dabei eine Hilfe sein:

Was bedeutet eigentlich "Konstruieren"?

Welche Bedeutung hatte das Konstruieren in der Antike?

Was versteht man in der Schule unter "Konstruieren"?

4.3.1.2. Theorie

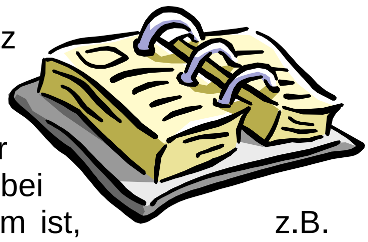
„Was versteht man unter Konstruieren?“

im Fremdwörterlexikon:

In Langenscheidts Fremdwörterlexikon hat das Wort **"Konstruieren"** 5 Bedeutungen. Zunächst einmal bedeutet es im technischen Bereich das Planen, Entwerfen, Berechnen und Bauen von Objekten und Maschinen. Andererseits bedeutet es aber auch, sich etwas theoretisch zu überlegen bzw. auszudenken. Dies kommt der Vorstellung von Konstruieren in der Mathematik schon näher. Konstruieren im mathematischen Sinne ist eine Tätigkeit, die mit idealen Objekten "im Geiste" oder "im Kopf" durchgeführt wird. Jede Konstruktion in der Wirklichkeit ist nur eine Annäherung an diesen idealen Fall.

Kapitel 4
in der didaktischen Literatur:

Nach ***Holland*** *(1996)* ist Konstruieren, ebenso wie das Beweisen, in der Sekundarstufe eine fundamentale Aktivität. Das Konstruieren sieht er unter dem Gesichtspunkt der Konstruktionsaufgabe, deren Lösung sich in das Finden der Konstruktion und die Darstellung der Konstruktion aufteilt. Das Finden einer Lösungskonstruktion ist die eigentliche mathematische - heuristische Tätigkeit. Das Ausführen und Darstellen der Lösung ist dann "nur" noch die Realisierung der mathematischen Idee.



Weth *(1992)* beschreibt in seinem Aufsatz "Computerunterstütztes modulares Konstruieren" wie bei der Ausführung von Konstruktionen immer wieder auf die Grundkonstruktionen zurückgegriffen wird. Dies hat mitunter demotivierende Auswirkungen auf die Schüler, da dies bei umfangreichen Konstruktionen sehr zeitraubend und mühsam ist, z.B. jedes Mal eine Parallele zu konstruieren. Er plädiert, wie übrigens auch ***Vollrath*** *(1990)* und ***H. Schumann*** *(1990)*, für ein modulares Konstruieren, welches bedeutet, dass eine bereits durchgeführte Konstruktion (z.B. eine Parallelenkonstruktion) als Baustein (z.B. mit Hilfe des Geodreiecks) in einer anderen Konstruktion weiter verwendet werden kann. Selbst Euklid verwendete in seinen Elementen Module, indem er immer wieder auf bereits gelöste Konstruktionsaufgaben verwies. Heute besitzt man mit Hilfe von Dynamischen Geometrie Systemen die technischen Möglichkeiten, Konstruktionen als sogenannte Makros abzuspeichern und als Module in anderen Konstruktionen zu verwenden.

In der Schule:

- Konstruieren in der Schule meint fast immer die Bearbeitung einer Konstruktionsaufgabe durch Anfertigung einer Zeichnung mit Zirkel und Lineal und den dazu gehörigen Konstruktionsplan bzw. die dazu gehörige Konstruktionsbeschreibung. Konstruieren in der Schule hat nichts mit dem Erstellen eines Bauplanes zu tun, wie es in Ingenieurbüros mit CAD geschieht. Auch finden Konstruktionen fast immer nur in der Planimetrie statt. Die Darstellende Geometrie (konstruktive Raumgeometrie), bei der Konstruktionen einen handwerklichen bzw. ästhetischen Zweck erfüllen würden, ist aus der Schulmathematik fast verschwunden.
- Beim Konstruieren in der Schule dürfen in der Regel nur Zirkel und Lineal (mit Maßeinteilung) verwendet werden. Nachdem Grundkonstruktionen wie Lotfällen, Parallelen ziehen, Mittelpunkte markieren eingeübt sind, kann man diese Konstruktionen auch als Makro mithilfe eines Geodreiecks durchführen. Dies wird allerdings nicht von allen Lehrern so gestattet. Eine Begründung für das Verbot von Makrokonstruktionen ist u.a. die Behauptung, dass Konstruieren genauer wäre. Das Gegenteil der Fall. Ein Lot ist z.B. mit dem Geodreieck schneller und genauer errichtet. Bei Verwendung dieses Makros hat der Schüler u.a. auch mehr Zeit und Konzentration für die eigentliche Aufgabe.

Kapitel 4

- Die Schüler legen bei Konstruktionsaufgaben zu viel Wert auf die fertige Zeichnung. Dabei ist die Konstruktion ein Prozess und die Konstruktionsbeschreibung bzw. der Konstruktionsplan die Erklärung, die Verbalisierung des Prozesses. Die Schritte dieses Konstruktionsprozesses sind mit den einzelnen Schritten beim Auflösen einer Gleichung vergleichbar. Ebenso wie in der Geometrie bei der Konstruktion jeder Schritt kommentiert wird, passiert dies auch in der Algebra bei Gleichungen indem am Rand notiert wird, was gerade umgeformt bzw. durch welche Variable z.B. dividiert wird. Allerdings wird die Lösung einer Gleichung sequentiell aufgeschrieben, so dass sie auch ohne die Randbemerkung nachvollziehbar ist; im Gegensatz zu einer fertigen Konstruktion. Einer fertigen Konstruktion sieht man ihren Ablauf nicht mehr an. Deswegen ist eine Konstruktionsbeschreibung insbesondere auch hilfreich für den Lehrer beim nachvollziehen von Schülerlösungen.

Didaktische Bedeutung des Konstruierens

Die Bedeutung des Konstruierens als mathematische Tätigkeit erschließt sich aus didaktischer Sicht anhand von Konstruktionsaufgaben. Diese unterteilen sich in mehrere Schritte.

Die Aufgabe besteht darin, von einer vorgegebenen Ausgangskonfiguration zu einer Zielkonfiguration zu kommen. Sowohl Ausgangs- als auch Zielkonfiguration bestehen aus einer Menge geometrischer Objekte (z.B. Punkte, Kreise, Geraden) und einem System von Bedingungen (z.B. Punkt liegt auf Gerade). Das Ziel der Konstruktionsaufgabe ist es, mit einzelnen Konstruktionsschritten von einer Anfangskonfiguration die gesuchte Zielkonfiguration zu erstellen. Dabei muss beachtet werden, ob es zur gegebenen Anfangskonfiguration keine, genau eine (eindeutig lösbar) oder mehrere Zielkonfigurationen gibt.

Neben dem *Finden* der Lösung kommt es auch auf deren *Darstellung* an: die Konstruktionsbeschreibung. Es ist gerade bei geometrischen Konstruktionen wichtig, jeden einzelnen Konstruktionsschritt schriftlich festzuhalten, da man einer fertigen Konstruktion nicht mehr ansieht, wie sie zustande gekommen ist.

Weiterhin muss auch die *Richtigkeit* einer Konstruktion gewährleistet sein, d.h. man muss beweisen, dass jeder der Konstruktionsschritte auf der Basis der entwickelten Konstellation durchführbar ist.

Konstruktionsaufgaben können im Unterricht verschiedene Funktionen übernehmen. Beginnend mit der Einführung neuer Begriffe (man gibt den Schülern den Auftrag, ein neues geometrisches Objekt einfach zu zeichnen), über die Entdeckung neuer Sätze und ihrer Beweise, sowie das Beweisen von Existenzaussagen bis hin zur "Thematisierung anschaulich evidenter Sätze" (dies ist jedoch schon recht anspruchsvoll!).

Kapitel 4

4.1.3. Exemplarische Konstruktionsaufgabe

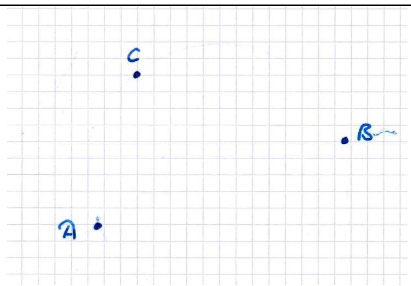
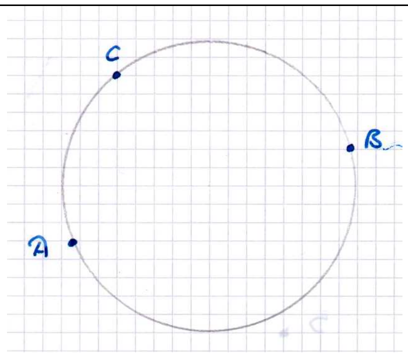
Als Beispiel dient dazu die Aufgabe, einen Kreis durch drei gegebene Punkte zu konstruieren.

1. **Anfangs – und Zielkonfiguration**
2. **Lösungen einer Konstruktionsaufgabe**
3. **Konstruktionsbeschreibung**
4. **Durchführbarkeit einer Konstruktion**
5. **Richtigkeit einer Konstruktion**

1. Anfangs- und Zielkonfiguration einer Konstruktionsaufgabe

Aufgabe:
Gegeben seien die Punkte A, B, C. Konstruiere einen Kreis durch diese drei Punkte.

Anfangskonfiguration Zielkonfiguration

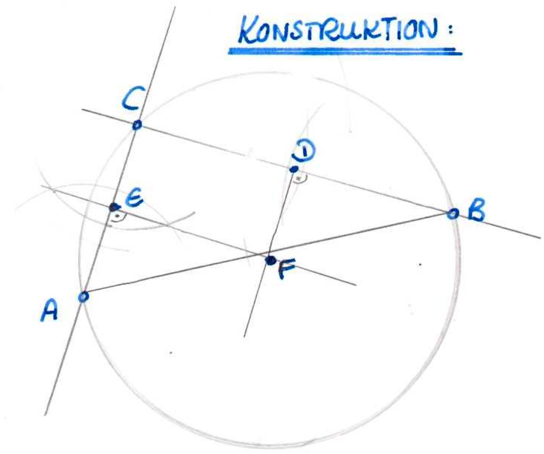
geometrische Objekte: Punkte *A, B, C* Bedingungen: *A, B, C* liegen nicht auf einer Geraden	
geometrische Objekte: Punkte *A, B, C* und Kreis *K* Bedingungen: *A, B* und *C* liegen nicht auf einer Geraden *A, B* und *C* liegen auf dem Kreis *K*	

2. Lösungen einer Konstruktionsaufgabe

Die **Lösung** bzw. die gesuchte Konstruktion sieht so aus:

Natürlich gehört zur Lösung auch die Konstruktionsbeschreibung bzw. das Verfahren, welches die Lösung liefert.

Kapitel 4



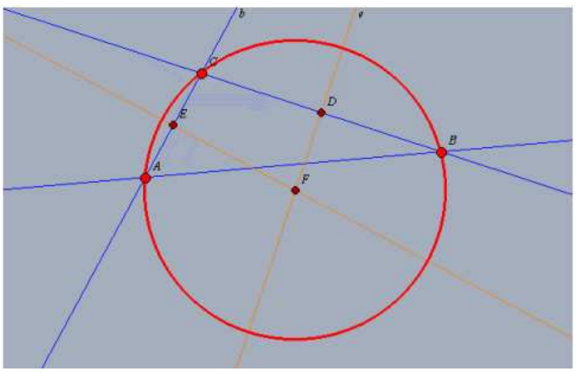
3.Konstruktionsbeschreibung:

- Konstruiere den Mittelpunkt *E* der Strecke [AC].
- Konstruiere die Orthogonale *d* durch den Punkt *E*.
- Konstruiere den Mittelpunkt *D* der Strecke [CB].
- Konstruiere die Orthogonale *e* durch den Punkt *D*.
- Bestimme den Schnittpunkt *F* der Geraden *d* und *e*.
- Zeichne den Kreis *K* um *F* durch *A*.

- Mit **Cinderella** sieht die Konstruktionsbeschreibung dann z.B. so aus:

Wer?	Was?	Wo?
A	Punkt(-3.48|2.44)	(-3.48|2.44)
B	Punkt(8.92|3.52)	(8.92|3.52)
c	Gerade(A;B)	y = 0.09x + 2.74
C	Punkt(-1.12|6.84)	(-1.12|6.84)
a	Gerade(B;C)	y = -0.33x + 6.47
b	Gerade(C;A)	y = 1.86x + 8.93
D	Mitte(B;C)	(3.90|5.18)
E	Mitte(C;A)	(-2.30|4.64)
d	Senkrechte(b;E)	y = -0.54x + 3.41
e	Senkrechte(a;D)	y = 3.02x - 6.61
F	Schnittpunkt(d;e)	(2.81|1.9)
C0	Kreis(F;B)	$(x - 2.81)^2 + (y - 1.9)^2 = 6.32^2$

Lösungen einer Konstruktionsaufgabe



Kapitel 4

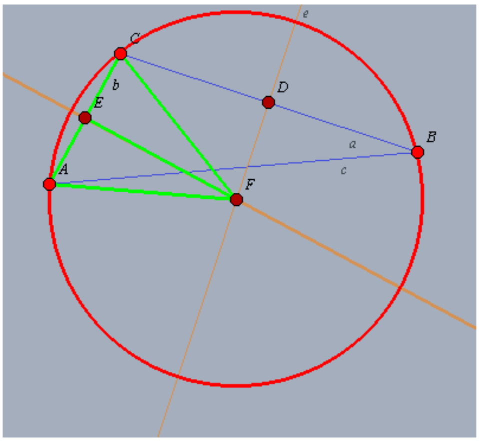
4. Durchführbarkeit einer Konstruktion:

Die gesuchte Konstruktion ist dann durchführbar, wenn jeder einzelne Konstruktionsschritt durchführbar ist. Da die drei Punkte nicht identisch sind, können jeweils die Verbindungsstrecke, der Mittelpunkt und die Orthogonale, also die Mittelsenkrechte konstruiert werden.

Da die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, existiert offensichtlich auch der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten.

5. Richtigkeit der Konstruktion:

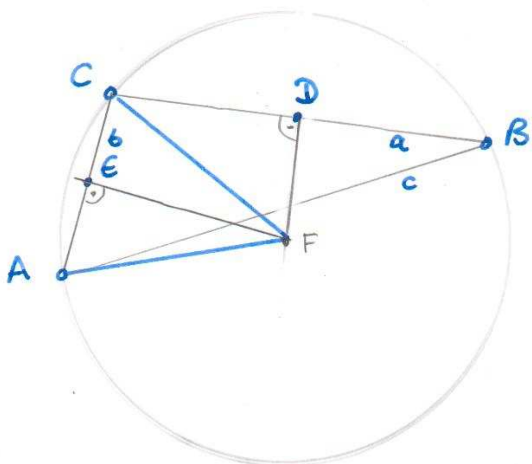
Die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich aus der Tatsache, dass durch drei nicht identische Punkte ein (zumindest entarteter) Kreis bestimmt wird, und der zusätzlichen Bedingung "*A, B, C* liegen nicht auf einer Geraden" in der Anfangskonfiguration. Daher schneiden sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt.



Würde diese Bedingung fehlen, so müsste man zusätzlich noch eine Fallunterscheidung treffen. Falls die drei Punkte auf einer Geraden liegen, so kann die gesuchte Zielkonfiguration nicht konstruiert werden: es existiert *keine* Lösung.

Da z.B. die Dreiecke *AFE* und *EFC* kongruent sind (**SWS-Satz**), ist der Abstand |AF| gleich dem Abstand |FC|. Analog sieht man |FC|=|FB|. Damit haben die drei Punkte *A, B, C* alle den gleichen Abstand von *F* und liegen auf dem Kreis *K* um *F* mit Radius |AF|.

KONSTRUKTION:

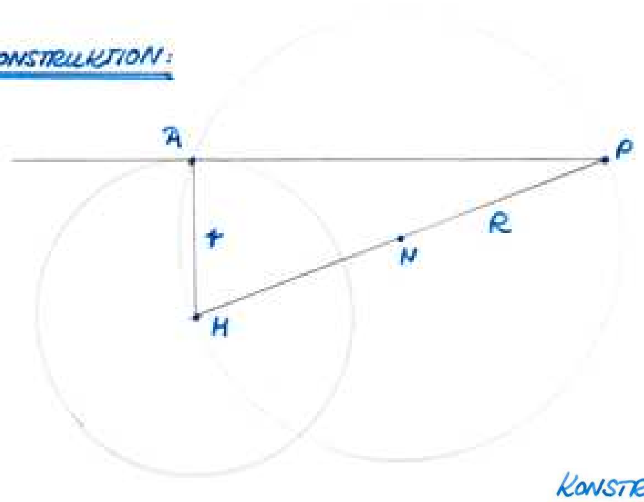


Kapitel 4

Beispielaufgabe (Geometrie in der Sekundarstufe; Holland) :
Gegeben sind ein Kreis k(M,r) und ein Punkt P außerhalb des Kreises. Konstruiere eine Tangente an den Kreis durch den Punkt P.

Lösung:

KONSTRUKTION:



KONSTRUKTIONSBESCHREIBUNG:

(1) Zeichne eine Strecke MP.
(2) Zeichne den Mittelpunkt von MP, nenne ihn N.
(3) Zeichne den Kreis k(N,R) mit R = NP.
(4) Markiere einen der beiden Schnittpunkte des Kreises k (N,R) mit dem Kreis k(M,r), nenne ihn A.
(6) Zeichne die Gerade g(P,A), nenne sie a.

ERGEBNIS: a Ist die gesuchte Tangente an den Kreis.

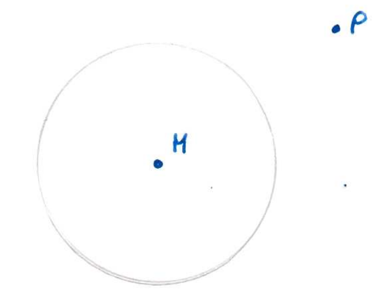
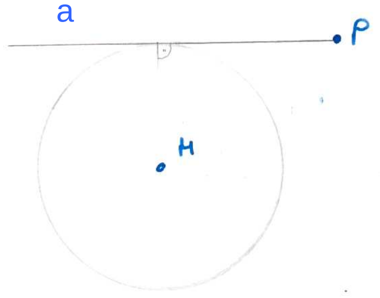
Durchführbarkeit der Konstruktion:
Wegen der Voraussetzung: P liegt außerhalb von k(M,r) ist der Konstruktionsschritt (4) stets durchführbar. Da es für die Wahl des Berührpunktes zwei Möglichkeiten gibt, hat die Aufgabe zwei Lösungen (es gibt zwei Tangenten von P an den Kreis).

Richtigkeit der Konstruktion:
1. Wegen (5) gilt $P \in a$.
2. Wegen (2) – (5) folgt aus dem Thalessatz $a \perp g(M, A)$.
3. Wegen 1. und 2. ist a Tangente an den Kreis k(M,r).

Kapitel 4

Anfangs – und Zielkonfiguration einer Konstruktionsaufgabe

Anknüpfend an das vorhergegangene Beispiel wollen wir nun einige wesentliche Merkmale geometrischer Konstruktionen herstellen. Jede geometrische Konfiguration, die aus einem Kreis und einem Punkt P besteht, welche außerhalb des Kreises liegt, nennen wir eine Anfangskonfiguration der Konstruktionsaufgabe. Entsprechend nennen wir jede geometrische Konfiguration, welche zusätzlich eine Tangente durch P an den Kreis enthält, eine Zielkonfiguration der Konstruktionsaufgabe. Anfangs- und Zielkonfiguration der Aufgabe sind gegeben durch eine Menge geometrischer Objekte und ein System von Bedingungen.

Anfangskonfiguration geometrische Objekte**:** Kreis k(M,r) , Punkt P Bedingungen: P liegt außerhalb von k	
Zielkonfiguration geometrische Objekte: k(M,r), Punkt P, Gerade a Bedingungen: P liegt außerhalb von k, $P \in a.$, a ist Tangente an k.	

Kapitel 4

4.3.2. Konstruieren mit Zirkel und Lineal

4.3.2.1. Überblick

In diesem Teilmodul werden wir uns mit dem Erstellen von Konstruktionen mit unterschiedlichen Werkzeugen beschäftigen.

Neben den klassischen griechischen Werkzeugen **Zirkel** und **Lineal**, behandeln wir noch das **Parallellineal**, das **Rolllineal**, den **"eingerosteten" Zirkel**, und das **Geodreieck**, sowie Konstruktionen mit **Schnüren** und **Saugnäpfen**.

Es wird empfohlen Zirkel, ein handelsübliches Lineal (zwei parallele Kanten) und einen Bleistift bereitzulegen.

Folgende theoretischen Fragen bilden das Grundgerüst dieses eher praktischen Moduls:

- Wie sinnvoll oder notwendig ist die Beschränkung der Konstruktionswerkzeuge in der Schulgeometrie auf Zirkel und Lineal?
- Was sind Grundkonstruktionen?
- Wozu dienen Konstruktionen in der Schule?

4.3.2.2. Theorie

Eine kleine Konstruktionstheorie

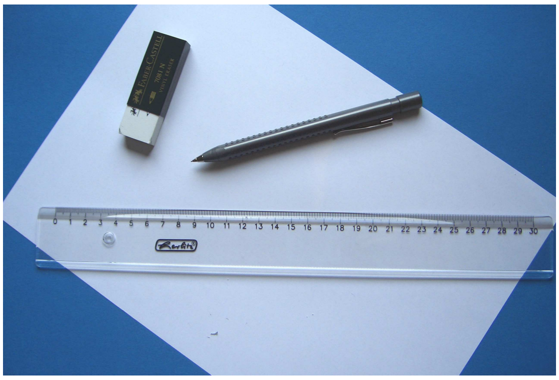
Jede Konstruktion beginnt mit einer Ausgangskonstellation, die die gegebenen mathematischen Objekte (Punkte, Geraden usw.) angibt. Ferner müssen auch die Werkzeuge bekannt sein, die bei der Konstruktion verwendet werden dürfen. Wir wollen zunächst die Konstruktionen nach den uns zur Verfügung stehenden Werkzeugen kategorisieren. Es ist nämlich mathematisch und methodisch äußerst reizvoll, eben nicht nur auf den von der traditionellen Schulgeometrie manifestierten Werkzeugen Zirkel und Lineal zu bestehen, sondern auch andere Werkzeuge zuzulassen.

Kapitel 4

<u>4.3.2.3. Einteilung:</u>

- **<u>Konstruktionen nur mit dem Lineal</u>**
- **<u>Konstruktionen mit dem Lineal und einem fest gezeichneten Kreis</u>**
- **<u>Konstruktionen nur mit Zirkel und Lineal</u>**
- **<u>Konstruieren nur mit dem Zirkel</u>**
- **<u>Konstruktionen mit dem Parallellineal</u>**
- **<u>Konstruktionen mit anderen Werkzeugen</u>**
- **<u>Zusammenfassung</u>**

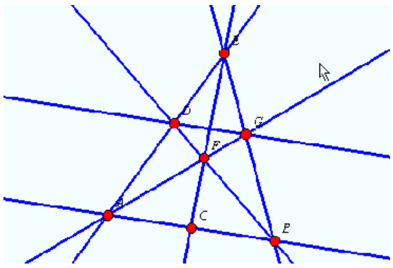
1. Konstruktionen nur mit dem Lineal



Unter einem Lineal versteht man ein Zeichengerät, mit dem man zwei Punkte mit einer Gerade verbindet. Folgende Sätze, die hier ohne Beweis wiedergegeben werden, zeigen die Konstruktionsmöglichkeiten mit einem Lineal:

- **Satz aus der Projektilen Geometrie**:

  Mit einem Lineal allein lassen sich aus gegebenen Punkten und Geraden nur die Punkte konstruieren, deren Koordinaten sich in irgendeinem projektiven Koordinatensystem (Koordinatendreieck und Einheitspunkt) rational durch die Koordinaten der gegeben Stücke ausdrücken lassen. In algebraischer Fassung handelt es sich um Konstruktionen ersten Grades oder lineare Konstruktionen.



Ein Satz zur Konstruktion einer Parallelen:

Hat man von einer Strecke [AB] den Mittelpunkt C, so kann man durch jeden Punkt D eine Parallele zu AB ziehen.

Kapitel 4

2. Konstruktion mit dem Lineal und einem fest gezeichneten Kreis

<u>Poncelet - Steinersche- Konstruktionen (Lineal und fester Kreis)</u>

Hier sollen kurz die Konstruktionen vorgestellt werden, die allein mit Lineal und nach Vorgabe eines fest gezeichneten Kreises mit gegebenen möglich sind.

Satz aus Bieberbach (1952):

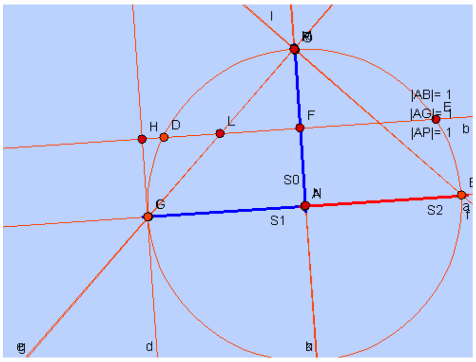
Liegt ein Kreis K mit Mittelpunkt gezeichnet vor, so sind alle die Punkte mit dem Lineal allein konstruierbar, deren Koordinaten in einem gegebenen rechtwinkligen Koordinatensystem sich aus den Koordinaten der gegebenen Punkte durch Quadratwurzelausdruck ausdrücken lassen. Dabei wird angenommen, dass die gegebenen Punkte nicht alle auf demselben Durchmesser des festen Kreises liegen.

Konkret heißt das, dass die gleiche Klasse von Konstruktionen ausgeführt werden kann wie mit Zirkel und Lineal.

Konstruktion von der "Quadratwurzel aus a":

Es steckt die Idee des Höhensatzes dahinter. Wenn es also gelingt, den Kreisdurchmesser im Verhältnis 1:a zu teilen so hat man sein Ziel schon fast erreicht. Man muss dann nur noch auf die echten Verhältnisse zurück transformieren.

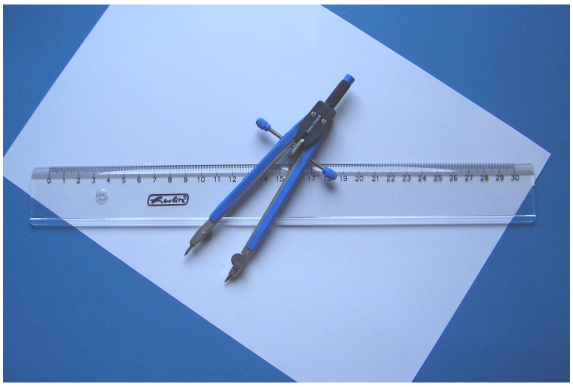
Der Kreis mit Radius *[AB]=1* und die Strecke *[AG]* (variabel) sind gegeben. *[AP]* ist die Wurzel aus *[AG]*. Die Konstruktion ist nur mit dem Lineal in der Reihenfolge der Buchstaben erfolgt.



Kapitel 4

3. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Seit Platon versteht man unter einer elementaren Konstruktion die Erstellung einer Figur allein mit Zirkel und Lineal. Bei den Griechen galten Kreis und Gerade als vollkommene Figuren und diese sind mit Zirkel und Lineal besonders einfach zu erzeugen.



- Unter einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal versteht man das Auffinden neuer Punkte aus gegebenen durch bestimmte Prozesse.

Prozesse bzw. "klassische" Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal:

Unter den Prozessen bzw. den "klassischen" Grundkonstruktionen (Holland 1988) versteht man:

- Mit dem Lineal eine Gerade (Halbgerade, Strecke) durch zwei gegebene Punkte legen.
- Mit dem Zirkel einen Kreis um einen gegeben Punkt mit gegebenen Radius ziehen. Der Radius ist dabei der Abstand zweier gegebener Punkte.
- Die Erzeugung neuer Punkte durch Schnitt von Geraden und Kreisen, die auf obige Weise gewonnen wurden.

- Diese **Konstruktionsprozesse** liefern nur die Punkte, welche sich aus den gegebenen Punkten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch Quadratwurzelausdrücke aus den Koordinaten der gegebenen Punkte darstellen lassen. Kurz: Es lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruktiv die Wurzel aus einer Streckenlänge ziehen.
- In der Schule lernen die Schüler eine gewisse Anzahl von Grundkonstruktionen kennen. Alle anderen Konstruktionen müssen sich dann mithilfe dieser Grundkonstruktionen durchführen lassen.

Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal:

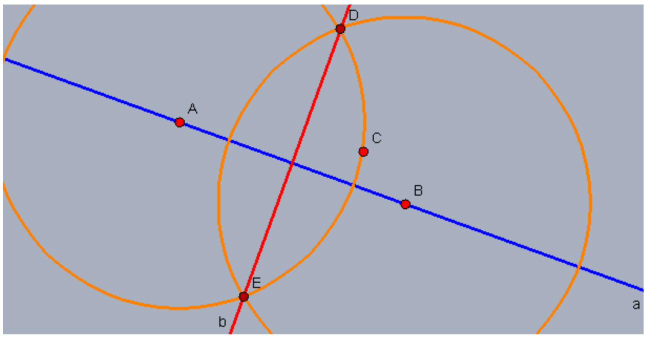
Unter Grundkonstruktionen versteht man Konstruktionen, die in wenigen Schritten mit Zirkel und Lineal durchführbar sind und modulartig für weitere Konstruktionsaufgaben eingesetzt werden.

Kapitel 4

Beispiele:

Mittelpunkt einer Strecke. (3 Schritte)

Zunächst zeichnet man einen Kreis um A mit beliebigem Radius. Diesen Kreis überträgt man mit Hilfe des "Zirkels" in den Punkt B. Der Schnitt dieser beiden Kreise ergibt die Punkte D und E, deren Verbindungslinie die gesuchte Mittelsenkrechte ist.

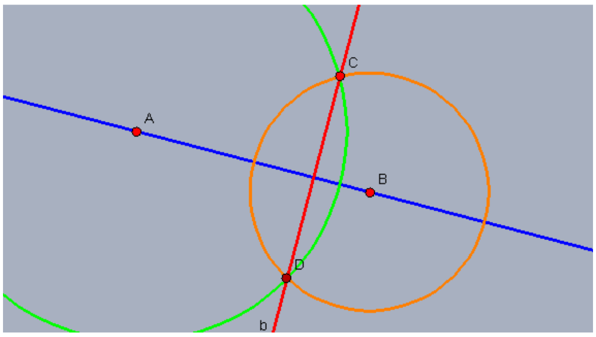


Winkel halbieren (4 Schritte)

Siehe Übungsblatt (7)

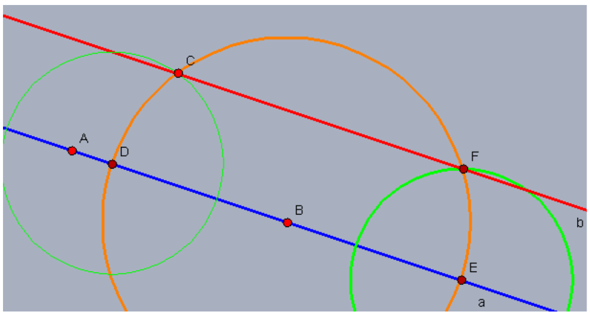
Lot auf eine Gerade durch einen Punkt errichten (3 Schritte)

Die Kreise um A und B durch C schneiden sich in D (Spiegelpunkt zu C). Die Gerade CD steht senkrecht auf AB und ist das gesuchte Lot.



Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt ziehen.(4 Schritte)

Der Kreis K1 durch B mit dem Radius [BC] schneidet die Gerade AB in D und E. Ein Kreis K2 um E mit dem Radius [DC] schneidet K1 im Punkt F. F hat aus Symmetriegründen den gleichen Abstand von der Geraden a wie auch der Punkt C. Somit ist die Gerade CF parallel zur Geraden a.

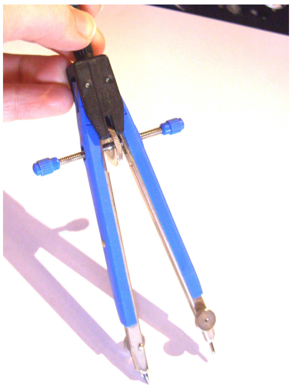


- Das Vorhandensein der Grundkonstruktionen in komplexeren Konstruktionen: Verschiedene Konstruktionsschritte lassen sich zu einem Baustein, einem Modul zusammenfassen. Das ist insbesondere mithilfe eines Computers gut praktisch durchführbar.

Kapitel 4

4. Konstruktionen nur mit dem Zirkel

Alleine mit dem Zirkel sind die gleichen Konstruktionen möglich wie mit Zirkel und Lineal. Diese erstaunliche Tatsache wurde von zwei Mathematikern im Abstand von über hundert Jahren unabhängig voneinander entdeckt.



1797 zeigte der italienische Mathematiker **Lorenzo Mascheroni** (1750-1800), dass alle geometrischen Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal ausführbar sind, auch alleine mit dem Zirkel durchgeführt werden können.

Der dänische Mathematiker **Georg Mohr** (1640-1697) hatte dieses Ergebnis aber schon ca. 120 Jahre vor Mascheroni entdeckt und in seinem Büchlein "Compendium Euclidis Curiosi" niedergeschrieben. Das Buch wurde aber erst 1928 wiederentdeckt und seitdem spricht man bei reinen Zirkelkonstruktionen von Mohr-Mascheroni- Konstruktionen.

Eine erste Einsicht darin, warum man alle Punkte, die man mit Zirkel und Lineal auch nur mit dem Zirkel konstruieren kann, gibt die Tatsache, dass Geraden, an Kreisen gespiegelt, wieder Kreise ergeben. Die Schnittpunkte der Spiegelkreise sind also die gespiegelten Schnittpunkte der Geraden. Wird nun der Schnittpunkt wieder am Kreis gespiegelt, so hat man den Geradenschnittpunkt. Diese Cinderellakonstruktion soll dies verdeutlichen.

Die Gerade welche durch die Punkte *C* und *D* definiert ist wird durch die Spiegelung zum Kreis durch die Punkte *A, H* und *G*. Die Gerade durch die Punkte *K* und *L* wird zum Kreis durch die Punkte *A, O* und *P*. Die beiden gelben Kreise schneiden sich in *Q*. Die Spiegelung von *Q* am blauen Kreis ergibt den Schnittpunkt *R* der beiden Geraden.

Kapitel 4

5. Konstruktionen mit dem Parallellineal

Mit dem Parallellineal sind die gleichen Konstruktionen möglich wie mit Zirkel und Lineal. Dies ist zunächst eine erstaunliche Tatsache, da scheinbar keine Möglichkeit besteht Kreise zu zeichnen.

Das Parallellineal ist ein Zeichengerät mit zwei parallelen Kanten, ein handelsübliches Lineal also.
Wie ist es möglich, mit dem Parallellineal die gleichen Punkte zu konstruieren wie mit Zirkel und Lineal?

Es ist einzusehen, dass um einen festen Punkt M herum durch jeden Punkt P (wobei [AP]> als die Linealbreite) die Tangente an den Kreis mit dem Radius der Linealbreite zu legen ist. Man muss einfach das Lineal zwischen die beiden Punkte klemmen.

Auch ist die der Schnitt einer Geraden mit einem fiktiven Kreis mit festem Radius (Linealbreite) mit Sätzen der projektiven Geometrie begründbar und relativ leicht zu konstruieren.

Der Schnitt einer Geraden mit einem fiktiven Kreis mit festem Radius (Linealbreite) ist mit Sätzen der projektiven Geometrie begründbar und relativ leicht zu konstruieren. Damit haben wir das Problem auf die Poncelet-Steiner-Konstruktionen zurückgeführt.

Kapitel 4

6. Konstruktionen mit anderen Werkzeugen

(a) Das Rolllineal

Das Rolllineal wird auch oft als Parallellineal bezeichnet, da es mit diesem Zeichengerät besonders einfach ist, parallele Gerade in beliebigem Abstand zu zeichnen.

Das Rolllineal besitzt, wie der Name schon sagt, auf der Unterseite eine durchgehende Rolle oder zwei Rollen, welche mit einer starren Stange verbunden sind.
Neben dem großen Tafelgerät gibt es auch kleine mit Skalen versehene Geräte für den Heftgebrauch. Diese sind gut geeignet, um schnell Parallelen zu ziehen.

(b) Schnüre und Saugnäpfe

Mit Schnüren und Saugnäpfen bzw. Nägeln sind neben einfachen Kreiskonstruktionen noch ganz andere Konstruktionen möglich. Es sind die Ortslinienkonstruktionen, bei denen Streckensummen konstant bleiben.

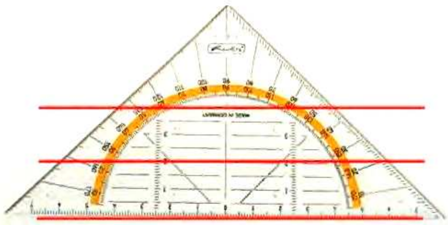
Die am einfachsten mit diesen Werkzeugen zu erzeugende Ortskurve ist ein Kreis.

Ähnlich einfach, aber weitaus interessanter, ist die Konstruktion konfokaler Ellipsen (Ellipsen mit gleichen Brennpunkten aber unterschiedlich großer Halbachsen).

(c) Das Geodreieck

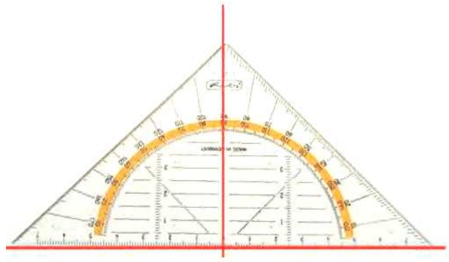
Das Geodreieck ist ein beliebtes und allseits bekanntes "Kombizeichengerät". Mit diesem Zeichengerät lassen sich insbesondere die folgenden Konstruktionen durchführen:

Durch die aufgedruckten Parallellinien kann es als **Parallellineal** verwenden werden.

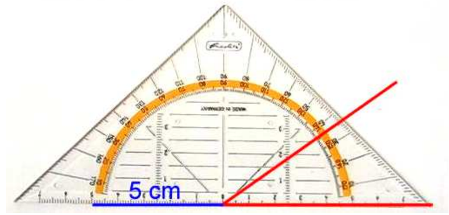


Kapitel 4

Man erhält **Lote** durch einfaches Anlegen des Geodreiecks.



Man kann beliebige **Winkel** und **Strecken ab-** und **übertragen**.



Ein klassisches Problem wie die **Winkeldreiteilung** ist mit dem Geodreieck einerseits durch seine Längenskala und andererseits mit Hilfe seiner Winkelskala lösbar.

Gerhard Holland (1988) schreibt in seiner Geometrie der Sekundarstufe, dass eine **generelle Beschränkung** der Konstruktionswerkzeuge auf **Zirkel** und **Lineal didaktisch nicht vertretbar** ist. Es ist auch durchaus üblich, in der Schule für bestimmte Grundkonstruktionen wie Lot errichten und Parallele ziehen das Geodreieck (aufgrund der Zeitersparnis und Übersichtlichkeit) zuzulassen.

Wenn man bereits die Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal durchgeführt hat, kann das Geodreieck, als ein "Einschrittverfahren" für diese Konstruktionen angesehen werden.

Kapitel 4

7. Zusammenfassung

Nach dem kurzen Konstruktionslehrgang kann man die Frage nach der Bedeutung von Zirkel und Lineal etwas genauer beantworten:

Konstruktionen nur mit dem **Lineal** erlauben nur "rationale Konstruktionen" (es können nur rationale Vielfache von bereits in der Ebene vorhandenen Punkten konstruiert werden) und diese sind mithilfe der Sätze der projektiven Geometrie einfach begründbar.

Mit **Zirkel und Lineal** ist es möglich, neben den rationalen Vielfachen von Koordinaten auch Quadratwurzeln aus diesen Vielfachen zu konstruieren. Vor allem liegt diesen Konstruktionen die euklidische Geometrie mit dem Parallelenaxiom zu Grunde. Diese Geometrie wird in der Schule unterrichtet.

Poncelet-Steinersche-Konstruktionen sowie Konstruktionen mit dem **Parallellineal** sind zwar ebenso mächtig wie die mit Zirkel und Lineal, aber auch hier benötigt man für die verständnisvolle Anwendung Grundkenntnisse der Projektiven Geometrie. Zudem sind selbst die Grundkonstruktionen kompliziert. Noch eine Stufe komplizierter sind die **Mohr-Mascheroni-Konstruktionen**. Auch diese sind nicht für die täglichen Konstruktionen in der Schule geeignet.

Mit dem **festen Zirkel** und dem **Lineal** bietet sich für Schüler und Lehrer die reizvolle Möglichkeit, die Grundkonstruktionen nur mit diesen Mitteln zu erschließen und damit den Nachweis zu führen, dass kein prinzipieller Unterschied zwischen festem und normalem Zirkel besteht. Hier zeigt sich auch für die Schüler das Konstruktionen als mathematische Tätigkeit.

Werkzeuge wie Rolllineal und Geodreieck vereinfachen alltägliche Konstruktionen und erweitern den "Grundkonstruktionsvorrat". Zudem verdeutlichen sie das modulare Konzept des Konstruierens.

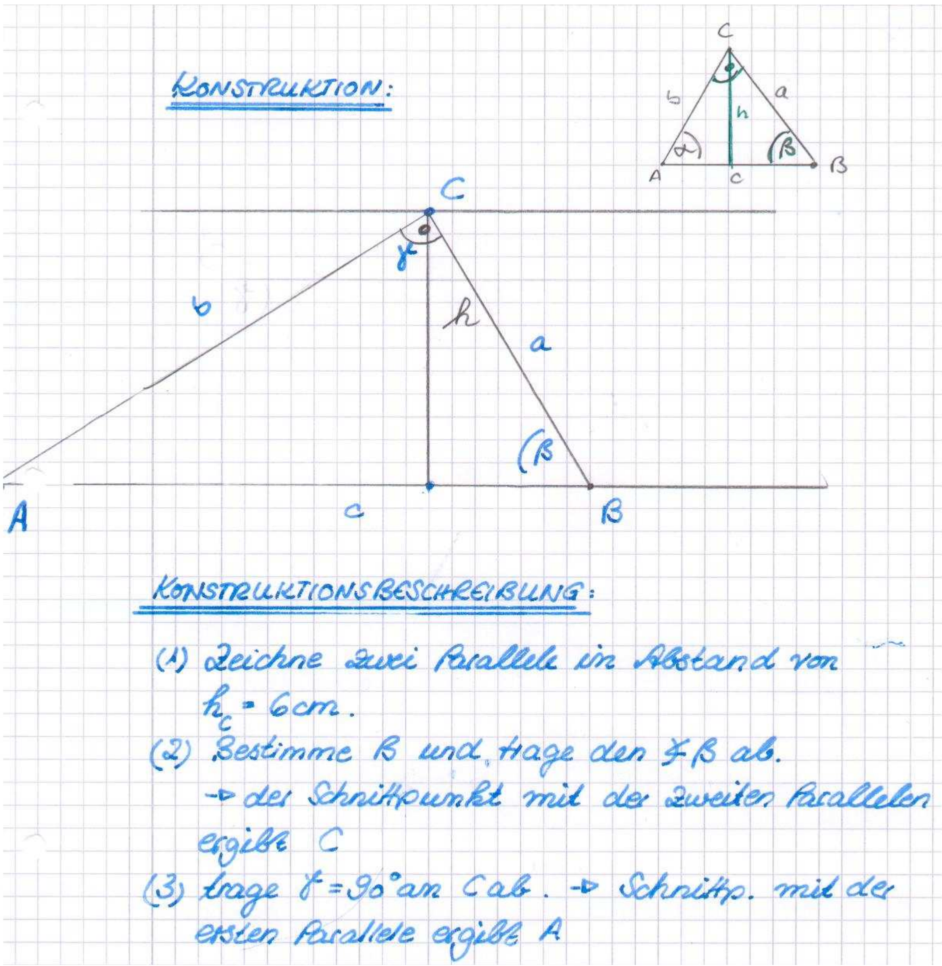
Es zeigt sich, dass Zirkel und Lineal für das schulische Konstruieren gut geeignet sind, viele Ziele des Geometrieunterrichts zu erreichen. Es sollte aber bei weiterem Fortschreiten durchaus auf Hilfsmittel wie Geodreieck und Rolllineal (Parallellineal) zurückgegriffen werden dürfen.

Kapitel 4

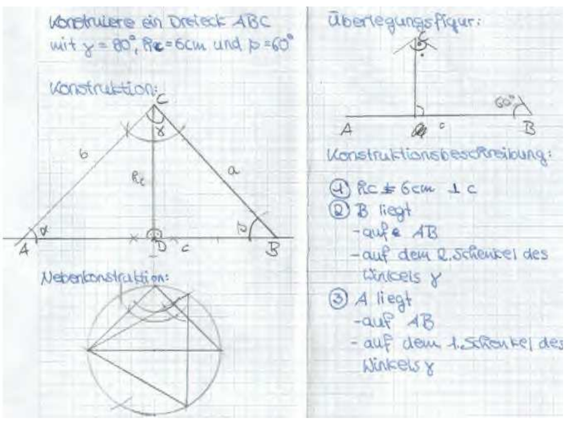
Beispiele: **<u>Klasse 7</u>**:
Dreieckskonstruktionen
Verwendung der Kongruenzsätze

Aufgabenstellung:
Konstruiere ein Dreieck ABC $\gamma = 90°, h_c = 6cm$ und $\beta = 60°$.

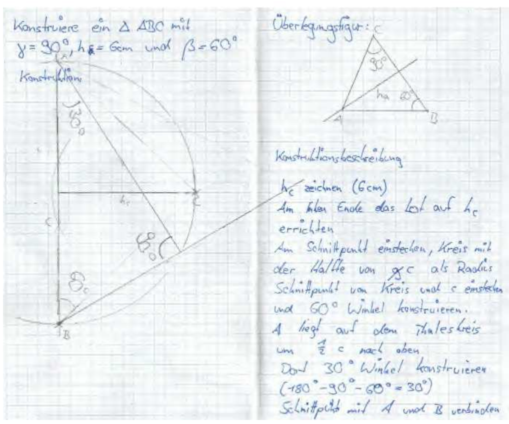
Lösung:



Schülerkonstruktionen aus Madin:



Schüler 1

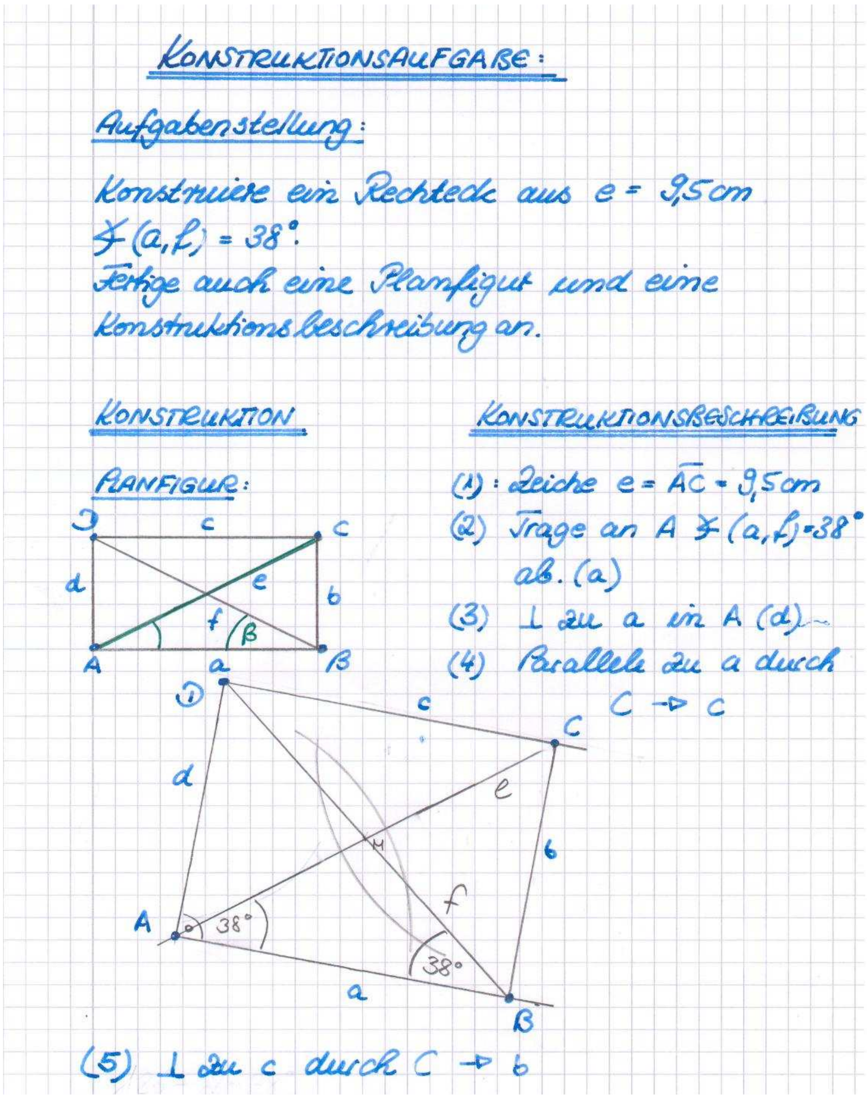


Schüler 2

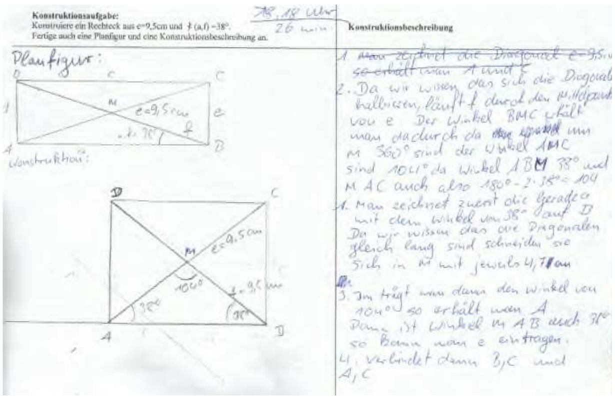
Kapitel 4

<u>Klasse 8</u>:
Viereckskonstruktionen

1. Rechteck:



Schülerkonstruktionen aus Madin:



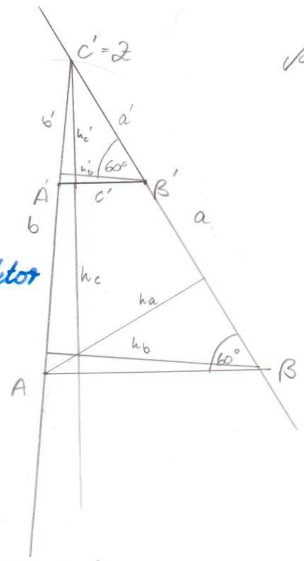
2. Drachenviereck (Siehe Übungsblatt 7)

Kapitel 4

Klasse 9:
Ähnlichkeitskonstruktionen
Aufgabenstellung:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $h_b : h_c = 2:3$, $\beta = 60°$, $h_b : h_c = 2:3$.
Genauer und begründeter Konstruktionsplan!

KONSTRUKTION:

geg.: $h_b : h_c = 2:3$
$\Rightarrow \frac{h_b}{h_c} = \frac{c'}{b'} = \frac{2}{3}$
$h_c - h_b = 2{,}5 = \underbrace{k}_{\text{Streckfaktor}}$

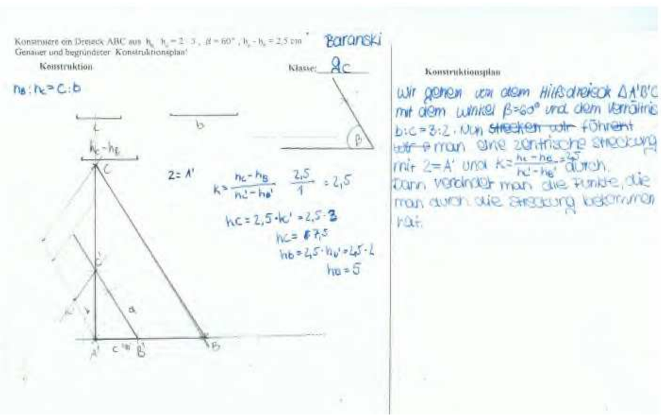


Anmerkung: die Höhen verhalten sich im umgekehrten Verhältnis zu den Seiten

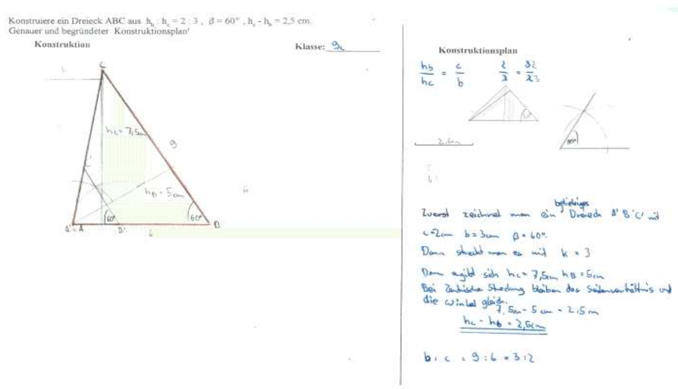
KONSTRUKTIONSBESCHREIBUNG

- Zeichne $c' = \overline{A'B'} = 2$ cm
- trage an B' den gegeben $\sphericalangle \beta = 60°$ ab.
- Kreisbogen um A' mit r = 3 cm. $\rightarrow$ Schnittp. mit a' ergibt C' C' = Streckzentrum = Z
- Verlängere die Geraden b' und a';.
- Zeichne in $\triangle A'B'C'$ die Höhen h_c' und h_b' ein.
- führe nun die zentrische Streckung an Z = C' mit k = 2,5 durch. $\rightarrow$ man erhält $\triangle ABC'$ mit $h_b : h_c = 2:3$.

Schülerkonstruktionen aus Madin:



Schüler 1



Schüler 2

Kapitel 4

4.3.3.Konstruieren mit dem Computer

Erlernen und Anwenden eines dynamischen Geometrie-Systems sowie eine didaktische Reflexion über die Mausgeometrie.

Der Computer als Medium
In den letzten Jahren sind verschiedene Computerprogramme zum Konstruieren, so genannte Dynamische Geometrie Software (DGS), entwickelt worden. Bei diesen Programmen ersetzt der Bildschirm das Zeichenblatt und die Konstruktionsschritte werden über die Maus oder Tastatur angegeben. Manuelle Tätigkeiten mit Zirkel, Lineal, Geodreieck und Bleistift entfallen, allerdings ist die Simulation des Konstruierens mit diesen Werkzeugen die Grundlage von DGS.

Was ist eigentlich ein DGS?
DGS ist die Abkürzung für Dynamisches Geometrie System; manchmal wird es auch CGS (Computer-Geometrie-System) genannt. Darunter versteht man ein Computerprogramm, mit dem man Geometrie (hauptsächlich Konstruktionen) auf dem Bildschirm betreiben kann. Das Besondere dabei ist aber, dass die erstellten Konstruktionen dynamisch veränderbar sind. D. h. mithilfe der Maus können Basisobjekte (z.B. Punkte durch die eine Gerade verläuft) verschoben werden. Die erstellte Konstruktion verändert sich entsprechend, die Zusammenhänge zwischen den geometrischen Objekten bleiben aber erhalten. Rechts ist ein Beispiel hierfür.

Eine weitere Eigenschaft der meisten dieser Programme ist es, dass eine Folge von Konstruktionsschritten zu einem Baustein oder Modul zusammengefügt werden kann. Man spricht hier von der Makrofähigkeit eines DGS.

Als letzte Eigenschaft eines DGS sei die Fähigkeit genannt, Ortskurven von beliebigen Punkten in Abhängigkeit der bewegten Basispunkten anzeigen zu lassen.

Vorteile des Mediums Computer
Mithilfe von DGS kann ein besseres Verständnis funktionaler Zusammenhänge gewonnen werden, da zwischen Basisobjekten und konstruierten Objekten (also abhängigen Objekten) unterschieden werden muss.

Kapitel 4

Schüler erfahren, dass das modulare Konstruieren dem Programmieren gleich kommt. Indem sich Schüler eigene Prozeduren (Module) erschaffen, definieren sie sich eigene Werkzeuge.

Weiter wird durch die Benutzung des Zugmodus und durch das Erzeugen von Ortslinien den Schülern Gelegenheit gegeben, mathematische Zusammenhänge und eventuell auch neue Sätze zu entdecken (Holland, Hölzl, Weth).

Wie funktioniert ein DGS?

Die mathematischen Grundlagen eines DGS liegen zum einen in der projektiven Geometrie und zum anderen in der Theorie der komplexen Zahlen.
Eine gute Einführung gibt Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J.: Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie,
JMD 21(2000), S. 303-324