

Der Zyklenraum nicht lokal-endlicher Graphen

DIPLOMARBEIT

EINGEREICHT IM SEPTEMBER 2005 VON

Moritz Schulz

UNTER BETREUUNG VON PROF. DR. REINHARD DIESTEL
SCHWERPUNKT GEOMETRIE UND DISKRETE MATHEMATIK
FACHBEREICH MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Standardtopologie TOP	1
1.2	TOP und nicht lokal-endliche Graphen	3
1.3	Die Topologie ETOP	6
1.4	Ergebnisüberblick	9
2	Eigenschaften von ETOP	13
2.1	Kompaktheit	13
2.2	Metrisierbarkeit	18
2.3	Der Quotientengraph	26
3	ETOP im Vergleich	35
3.1	Kanten-Enden und Freudenthal-Enden	35
3.1.1	ETOP und FETOP	42
3.2	ETOP und Ecken-Enden	44
4	Homologie	49
4.1	Grundlegende Tatsachen	49
4.2	Definition topologischer Spannbäume	55
4.3	Die Fundamentalschnitte	57
4.4	Das Existenzproblem	61
4.5	Graphentheoretische Spannbäume	69
4.6	Der Zyklenraum	71
	Schlussbetrachtung	77
	Literaturverzeichnis	81
	Abbildungsverzeichnis	83

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit ist Teil eines breiter angelegten Projekts, mit dem die homologischen Aspekte unendlicher Graphen untersucht werden sollen.¹ Grundlegend ist dabei die Idee, einen unendlichen Graphen zusammen mit seinen Enden zu betrachten und darauf eine Topologie zu erklären. Damit wird es möglich, Kreise topologisch als homöomorphe Bilder der Einheitskugel S^1 zu definieren. Idee und Konzeption dieser Arbeit gehen auf Prof. Dr. Reinhard Diestel zurück, so dass der Autor für die meisten hier untersuchten Fragestellungen keine Originalität beanspruchen darf. Für die Vergabe dieses Themas und die gute Betreuung sei ihm an dieser Stelle ganz herzlich gedankt.

In diesem einleitenden Kapitel wird nun kurz die Standardtopologie TOP erläutert. Sie ermöglicht es für lokal-endliche Graphen, grundlegende Aussagen über den Zyklusraum endlicher Graphen auch auf unendliche Graphen zu übertragen. Im Falle nicht lokal-endlicher Graphen ergeben sich jedoch schnell Probleme, die es nahelegen, für solche Graphen nach einer anderen Topologie zu suchen. Anhand dieser Probleme soll die Topologie ETOP vorgestellt werden. Schließlich wird ein Überblick über die zentralen in dieser Arbeit erzielten Resultate gegeben.

Durchgängig wird auf die Terminologie aus [7] und dem Unendlichkeitskapitel in [4] zurückgegriffen; sie wird hier größtenteils vorausgesetzt und nicht noch einmal explizit eingeführt.

1.1 Die Standardtopologie TOP

Die Enden eines Graphen, genauer gesagt, seine Ecken-Enden, lassen sich als Äquivalenzklassen von Strahlen definieren.² Dabei heißen zwei Strahlen R, R' in einem Graphen G *ecken-äquivalent*, wenn es keine endliche Eckenmenge $S \subseteq V(G)$ gibt, so dass Teilstrahlen von R und R' in verschiedenen Komponenten

¹Eine Motivation dieser Problemstellung findet sich in [2]; eine Darstellung der grundlegenden Konzepte und Tatsachen in [4].

²Die in diesem Abschnitt vorgestellten Begrifflichkeiten sind [4] entnommen.

von $G - S$ liegen. Die Äquivalenzklasse eines Strahls R bezüglich dieser Relation wird mit $\omega_V(R)$ bezeichnet und heißt das *Ecken-Ende* von R ; es sei $\Omega_V(G)$ die Menge der Ecken-Enden von G .

Es kann damit jetzt von einem Graphen G zu einem topologischen Raum $|G|_{TOP}$ übergegangen werden. Dazu wird zunächst zu jeder Kante $e \in E(G)$ eine Kopie \mathring{e} des offenen Einheitsintervalls $(0, 1)$ betrachtet (die dabei für verschiedene Kanten disjunkt zu wählen sind). Ist dann $e = xy$ eine Kante, so lässt sich zu der Menge $[x, y] := \{x\} \cup \mathring{e} \cup \{y\}$ eine Bijektion $\psi_e : [0, 1] \rightarrow [x, y]$ mit $\psi_e(0) = x$ und $\psi_e(1) = y$ fest wählen. Die Menge $[x, y]$ heißt eine *topologische Kante* und erhält durch ψ_e die Metrik des Einheitsintervalls (eine Kante e werde dann auch als eine topologische Kante $[x, y]$ angesehen). Für eine Menge $F \subseteq E(G)$ von Kanten wird $\mathring{F} := \bigcup \{\mathring{e} \mid e \in F\}$ gesetzt.

Als Punktmenge kann nun

$$|G|_{TOP} := V(G) \cup \mathring{E}(G) \cup \Omega_V(G)$$

definiert werden. Die Topologie TOP auf der Menge $|G|_{TOP}$ wird dann durch Angabe einer Basis erklärt. Liegt $x \in \mathring{e}$ im Innern einer Kante, so werden die offenen Umgebungen in \mathring{e} auch unter TOP als Umgebungsbasis deklariert. Für eine Ecke $v \in V(G)$ bilden die offenen Sterne um v eine Umgebungsbasis. Dabei ist ein offener Stern um v die Vereinigung von halboffenen Intervallen $[v, w] \subseteq e$ für jede mit v inzidente Kante $e \in E(G)$. Ist $\omega \in \Omega_V(G)$ ein (Ecken-) Ende und $S \subseteq V(G)$ eine endliche Eckenmenge, dann sei $C(S, \omega)$ die eindeutig bestimmte Komponente von $G - S$, in der jeder Strahl aus ω einen Teilstrahl hat; in diesem Fall sagt man auch, dass ω in der Komponente $C(S, \omega)$ *lebt* und bezeichnet mit $\Omega_V(S, \omega)$ die Menge aller in $C(S, \omega)$ lebenden (Ecken-) Enden. Ferner sei $\mathring{E}_*(S, \omega)$ eine Vereinigung von halboffenen Intervallen $[v, w] \subseteq e$ für jede S - $C(S, \omega)$ Kante e mit $v \in C(S, \omega)$. Als basis-offene Umgebungen der Enden werden dann alle Mengen von der Form

$$C(S, \omega) \cup \Omega_V(S, \omega) \cup \mathring{E}_*(S, \omega)$$

erklärt.

Im Raum $|G|_{TOP}$ lassen sich jetzt Wege und Kreise topologisch definieren. Darauf aufbauend ist es möglich, topologische Versionen eines Spannbaums und insbesondere des Zyklusraums zu geben.

Ein homöomorphes Bild A des Einheitsintervalls heißt dabei ein Bogen und ein homöomorphes Bild C der Einheitskugel S^1 ein topologischer Kreis. Topologische Kreise im Raum $|G|_{TOP}$ können Enden enthalten und dabei unendlich viele Kanten durchlaufen. Graphentheoretische Wege und Kreise sind in natürlicher Weise auch Bögen und topologische Kreise in $|G|_{TOP}$, weshalb sich letztere als Erweiterungen der ersteren für unendliche Graphen ansehen lassen.

Ist C ein topologischer Kreis, so sei $D(C)$ die Menge der Kanten, die C durchläuft. Die Kantenmenge $D(C)$ können wir auch den mit dem Kreis C *assoziierten Zyklus* nennen. Einen solchen Zyklus nennen wir auch einen Kreis. Eine Familie $(D_i)_{i \in I}$ von Teilmengen aus $E(G)$ heißt *schmal*, wenn keine Kante in D_i für unendlich viele i liegt. Für eine schmale Familie sei dann die *Summe* $\sum_{i \in I} D_i$

die Menge der Kanten, die in ungerade vielen Mengen D_i liegen. Es kann damit der *Zyklenraum* $\mathcal{C}_{TOP}(G)$ als Unterraum des Kantenraums $\mathcal{E}(G)$ definiert werden: der Zyklenraum enthalte alle (schmalen) Summen von mit topologischen Kreisen $C \subseteq |G|_{TOP}$ assoziierten Zyklen $D(C)$.³ Ist G endlich, so stimmt diese Definition mit dem herkömmlichen graphentheoretischen Begriff des Zyklenraums überein. Eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}_{TOP}(G)$ erzeugt den Zyklenraum, wenn jeder Zyklus $Z \in \mathcal{C}_{TOP}$ als Summe von Elementen aus \mathcal{Z} geschrieben werden kann.

Auch für den Begriff eines Spannbaums von G lässt sich eine topologische Variante geben. Es heißt $H \subseteq |G|_{TOP}$ ein *Standardunterraum*, wenn H mit einem Element $x \in e$ bereits die ganze Kante e enthält. Nun wird ein Standardunterraum $T \subseteq |G|_{TOP}$ ein *topologischer Spannbaum* von $|G|_{TOP}$ genannt, wenn T alle Ecken und Enden von G enthält, topologisch wegzusammenhängend ist und keinen Kreis enthält. Es lässt sich zeigen, dass ein Topologischer Spannbaum von $|G|_{TOP}$ zwischen zwei Elementen $x, y \in V(G) \cup \Omega_V(G)$ genau einen Bogen enthält. Ist dann e eine Kante außerhalb von T , dann enthält $T \cup e$ einen eindeutig bestimmten Kreis C und es wird $C_e := D(C)$ der Fundamentalkreis von e bezüglich T genannt. Umgekehrt zerfällt $T \setminus e$ für eine Kante e auf T in genau zwei Wegkomponenten und die Kanten zwischen diesen Komponenten bilden den Fundamentalschnitt D_e von e bezüglich T .

Mit Hilfe dieses Begriffsapparats lassen sich nun zentrale Aussagen über die Struktur des Zyklenraums, wie man sie für endliche Graphen hat, auf lokal-endliche (unendliche) Graphen übertragen. Grundlegend ist dabei das folgende Theorem aus [4]:

Theorem 1.1 (Diestel & Kühn 2004). *Es sei G ein zusammenhängender und lokal-endlicher Graph.*

- (i) *Der Zyklenraum $\mathcal{C}_{TOP}(G)$ enthält gerade diejenigen Teilmengen von $E(G)$, die jeden endlichen Schnitt in einer geraden Anzahl von Kanten treffen.*
- (ii) *Jeder Zyklus in $\mathcal{C}_{TOP}(G)$ ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen.*
- (iii) *Die Fundamentalkreise eines topologischen Spannbaums von $|G|_{TOP}$ erzeugen den Zyklenraum $\mathcal{C}_{TOP}(G)$.*

In nicht lokal-endlichen Graphen ist dieses Theorem nicht uneingeschränkt gültig. Auf die Gründe dafür soll jetzt eingegangen werden.

1.2 TOP und nicht lokal-endliche Graphen

In diesem Abschnitt soll anhand der Aussage (ii), dass die Elemente des Zyklenraums disjunkte Vereinigungen von Kreisen sind, skizziert werden, welche Probleme nicht lokal-endliche Graphen für THEOREM 1.1 bereiten.

Eine Ecke v *ecken-dominiert* einen Strahl R in einem Graphen G , wenn es

³Das Symbol für den Zyklenraum ist hier mit einem Index versehen worden, um deutlich zu machen, dass es von der Wahl der Topologie abhängt, welche Elemente der so definierte Zyklenraum enthält.

unendlich viele bis auf v disjunkte v - R Wege in G gibt. Eine dominierende Ecke hat dann unendlichen Grad. Dominiert in einem Graphen eine Ecke einen Strahl, so kann dies Aussage (ii) von THEOREM 1.1 falsifizieren. Man betrachte als einfachstes Beispiel den Graphen aus Abbildung 1.1.

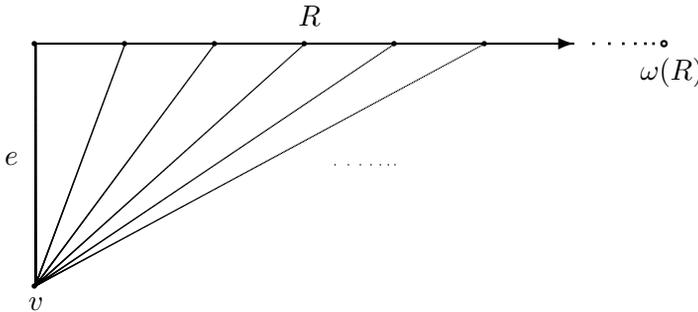


Abbildung 1.1: Die Ecke v dominiert den Strahl R .

Offenbar ist $Z_1 := R \cup e$ schmale Summe der induzierten Kreise und liegt daher nach Definition im Zyklenraum. Die Menge Z_1 ist aber keine disjunkte Vereinigung von Kreisen, da sie nicht einmal einen Kreis enthält (auch keinen topologischen). Die Aussage (ii) gilt also nicht für diesen Graphen.

Diese Aussage kann auch aus einem anderen Grund falsch sein, nämlich dann, wenn zwei Ecken nicht durch endlich viele Ecken trennbar sind. Dazu betrachte man den Graphen aus Abbildung 1.2. Hier liegt $Z_2 := vx_1w$ nach Definition im

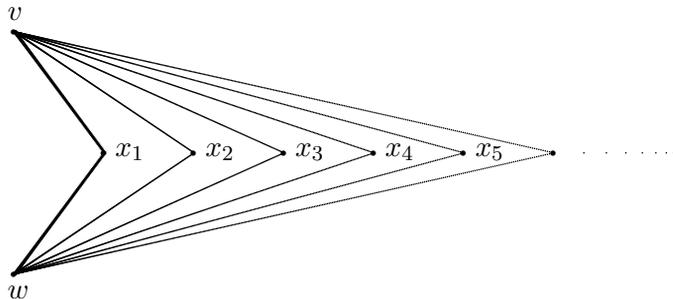


Abbildung 1.2: Ein endlicher Weg im Zyklenraum.

Zyklenraum, denn Z_2 ist schmale Summe der Kreise $C_i := vx_iwx_{i+1}v$. Aber als endlicher Weg kann Z_2 wiederum nicht als Vereinigung von Kreisen dargestellt werden.

Es können aber auch etwas schwächere Phänomene die Aussage (ii) falsifizieren. Dazu betrachte man den Graphen aus Abbildung 1.3. Die Ecke v_0 lässt sich

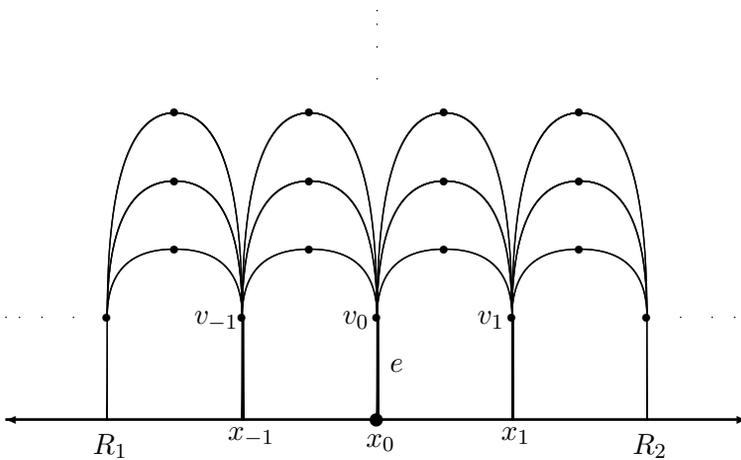


Abbildung 1.3: Die Strahlen R_1 und R_2 sind kanten-, aber nicht ecken-dominiert.

von dem Strahl R_1 durch endlich viele Ecken abtrennen (und es gibt auch keine Ecke, die den Strahl R_1 ecken-dominiert). Dennoch überlegt man sich leicht, dass die Menge $Z_3 := E(R_1) \cup \{e\}$ nach Definition im Zyklenraum liegt ohne dabei einen Kreis zu enthalten. Interessant ist hier aber die Beobachtung, dass v_0 nicht durch endlich viele Kante von R_1 abzutrennen ist. Wir sagen, dass eine Ecke $v \in V(G)$ einen Strahl $R \subseteq G$ *kanten-dominiert*, wenn zu jeder endlichen Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ die Ecke v und ein Teilstrahl von R in derselben Komponente von $G - F$ liegen. In diesem Fall kanten-dominiert also die Ecke v_0 den Strahl R_1 .

Genauso überlegt man sich, dass für den Weg $P := v_{-1}x_{-1}x_0x_1v_1$ die Menge $Z_4 := E(P)$ im Zyklenraum liegt (und wieder keinen Kreis enthält). Doch die Ecken v_{-1} und v_1 sind durch endlich viele Ecken trennbar. Aber man sieht, dass sie nicht durch endlich viele Kanten trennbar sind. Wir nennen daher zwei Ecken $v, w \in V(G)$ *äquivalent*, wenn sie zu jeder endlichen Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ in derselben Komponente von $G - F$ liegen. In diesem Beispiel sind also v_{-1} und v_1 äquivalent (es sind hier sogar alle v_i miteinander äquivalent, aber v_i ist jeweils durch endlich viele Ecken von v_{i+2} trennbar).

Möchte man also Theorem 1.1 auf nicht lokal-endliche Graphen erweitern, so bietet es sich als Strategie an, nach einer Topologie zu suchen, unter der die eben betrachteten Zyklen Z_i zu topologischen Kreisen werden. Dazu wäre es notwendig, dass ein von einer Ecke v (kanten-) dominierter Strahl R gegen diese Ecke konvergiert, wie der Zyklus Z_3 zeigt. Auch sollten endliche Wege zwischen zwei äquivalenten Ecken v, w zu einem Kreis werden können; dazu müsste die Topologie diese Ecken in gewisser Weise identifizieren. Es sollte zudem eine Forderung an die gesuchte Topologie sein, dass sie auf lokal-endlichen Graphen mit der Topologie TOP identisch ist, so dass auch unter der neuen To-

pologie Theorem 1.1 für lokal-endliche Graphen gültig bleibt. Mit ETOP wird im nächsten Abschnitt eine solche Topologie vorgestellt.

1.3 Die Topologie ETOP

Im Folgenden soll es vor allem darum gehen, die Topologie ETOP zu definieren und einige eng verwandte Begrifflichkeiten vorzustellen. Abschließend wird noch das Strahl/Stern-Lemma beschrieben, von dem als wirkungsvolles Mittel in fast allen Bereichen dieser Arbeit immer wieder Gebrauch gemacht wird.

Innerhalb der gesamten Arbeit wird mit G immer ein (unendlicher) ungerichteter Graph bezeichnet, der keine Mehrfachkanten oder Schlingen enthält. Auf die Klausel „Sei G ein Graph . . .“ wird daher häufig verzichtet.

Die Topologie ETOP wird auf G zusammen mit seinen Kanten-Enden definiert werden. Diese sollen jetzt vorgestellt werden. Zwei Strahlen R und R' aus einem Graphen G heißen *kanten-äquivalent*, wenn es zu jeder endlichen Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ eine Komponente C von $G - F$ gibt, die sowohl einen Teilstrahl von R als auch einen Teilstrahl von R' enthält. Dies ist offenbar eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse eines Strahles $R \subseteq G$ wird mit $\omega_E(R)$ bezeichnet und heißt ein *Kanten-Ende* von G . **Ist ohne weitere Qualifikation von einem**

Ende die Rede, so sei damit immer ein Kanten-Ende gemeint. Wir schreiben in der Folge dann immer kurz $\omega(R)$ statt $\omega_E(R)$. Die Menge der Kanten-Enden eines Graphen G wird mit $\Omega_E(G)$ oder meist kurz mit $\Omega(G)$ bezeichnet.⁴

Ist $R \subseteq G$ ein Strahl und $v \in V(G)$ eine Ecke, dann haben wir gesagt, dass v den Strahl R *kanten-dominiert*, wenn es zu jeder endlichen Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ eine Komponente C von $G - F$ gibt, so dass v und ein Teilstrahl von R beide in C liegen. In unmißverständlichen Kontexten wird dafür auch abkürzend gesagt, dass v den Strahl R *dominiert*. Da eine Ecke v mit einem Strahl R jeden Strahl aus $\omega(R)$ dominiert, sagen wir dann auch, dass v das Ende $\omega(R)$ (kanten-) dominiert. Ein nicht dominiertes Ende $\omega \in \Omega(G)$ nennen wir *undominiert*. Die Menge der undominierten Enden eines Graphen G werde mit $\Omega'_E(G)$ oder wieder kurz mit $\Omega'(G)$ bezeichnet.

Es soll nun die Topologie ETOP erklärt werden.

Ist $\omega \in \Omega(G)$ ein Ende und $F \subseteq E(G)$ eine endliche Kantenmenge, dann gibt es genau eine Komponente C von $G - F$, die einen Teilstrahl von jedem Strahl $R \in \omega$ enthält. Wir sagen in diesem Fall, dass ω in C *lebt*. Ist wieder $F \subseteq E(G)$ eine endliche Kantenmenge und $x \in V(G) \cup \Omega(G)$ eine Ecke oder ein Ende, dann bezeichne $C(F, x)$ diejenige Komponente von $G - F$, die x enthält bzw. in der x lebt; mit $\Omega(F, x)$ sei die Menge der Enden bezeichnet, die in $C(F, x)$ leben und mit $\Omega'(F, x)$ die Menge der undominierten Enden, die in $C(F, x)$ leben.

Es wird nun zunächst wieder zu jeder Kante $e \in E(G)$ eine Kopie \dot{e} des offenen Einheitsintervalls $(0, 1)$ betrachtet (die dabei für verschiedene Kanten disjunkt zu wählen sind). Ist dann $e = xy$ eine Kante, so wählt man wieder zu der Menge $[x, y] := \{x\} \cup \dot{e} \cup \{y\}$ eine feste Bijektion $\psi_e : [0, 1] \rightarrow [x, y]$ mit $\psi_e(0) = x$ und

⁴Die um ein Kanten-Ende gruppierten Begrifflichkeiten finden sich in [9].

$\psi_e(1) = y$. Die Menge $[x, y]$ heißt wieder eine *topologische Kante* und erhält durch ψ_e die Metrik des Einheitsintervalls; in der Folge wird zwischen Kanten und topologischen Kanten nicht mehr streng unterschieden. Die Topologie ETOP kann damit jetzt auf der Punktmenge

$$|G|_{ETOP} := V(G) \cup \overset{\circ}{E}(G) \cup \Omega_E(G)$$

durch Angabe der basis-offenen Mengen erklärt werden.

Als basis-offene Teilmengen von $\overset{\circ}{E}$ werden zunächst alle Bilder unter ψ_e von offenen Teilintervallen $(a, b) \subseteq [0, 1]$ erklärt. Für jede endliche Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ und jede Ecke $v \in V(G)$ wird weiter

$$\widehat{C}_*(F, v) := C(F, v) \cup \Omega(F, v) \cup E_*(F, v)$$

als offen deklariert. Es ist dabei $E_*(F, v)$ eine Menge, die genau zu jeder Kante $e = xy \in F$ mit $x \in C(F, v)$ ein halboffenes Intervall $[x, z) \subseteq e$ mit $y \neq z$ enthält.

Dies definiert die Topologie ETOP auf $|G|_{ETOP}$. Der entsprechende topologische Raum werde im Folgenden kurz mit $|G|$ angeschrieben.

Für eine in $|G|$ offene Menge von der Form $O = \widehat{C}_*(F, v)$ sagen wir auch, dass sie von der Kantenmenge F *induziert* ist. Es wird $V(O)$ für die in O enthaltenen Ecken geschrieben und $V(F)$ für die mit Kanten aus F inzidenten Ecken.

Der entscheidende Unterschied zur Topologie TOP ist nun, dass für Ecken keine zusätzlichen Umgebungen erklärt werden. So enthält eine offene Umgebung einer Ecke v unendlichen Grades bereits fast alle Nachbarn von v . Auch hat eine dominierende Ecke genau dieselben Umgebungen wie das von ihr dominierte Ende (d.h. ein Strahl aus diesem Ende konvergiert gegen jene Ecke) und äquivalente Ecken haben ebenfalls dieselben Umgebungen. Betrachtet man nun nochmal mit ETOP die problematischen Zyklen Z_i aus dem vorherigen Abschnitt, so sieht man, dass sie unter ETOP zu Kreisen werden. Andererseits ist ETOP mit TOP auf lokal-endlichen Graphen identisch, wie man sich leicht überlegt. Damit erfüllt ETOP die im vorherigen Abschnitt formulierten Forderungen.

Man sieht allerdings auch, dass unter ETOP mit ungewohnten endlichen Kreisen zu rechnen ist, also mit solchen, die keine Kreise im graphentheoretischen Sinne sind.

Der Graph G aufgefasst als Punktmenge $G = V(G) \cup \overset{\circ}{E}(G)$ wird in natürlicher Weise ein Unterraum von $|G|$; dabei wird ebenfalls G für den entsprechenden topologischen Raum geschrieben und wir sagen dann auch, dass wir ETOP auf G betrachten. In gleicher Weise kann die Menge $G \cup \Omega'(G) = V(G) \cup \overset{\circ}{E}(G) \cup \Omega'(G)$ als Unterraum von $|G|$ angesehen werden; der entsprechende topologische Raum werde mit \overline{G} bezeichnet; hierzu sagen wir auch, dass wir ETOP auf $G \cup \Omega'(G)$ betrachten. Für die Unterräume G und \overline{G} können leicht die basis-offenen Mengen explizit angegeben werden. Für G sind es (neben den offenen Teilintervallen der Kanten) gerade die Mengen der Form

$$C_*(F, v) := C(F, v) \cup E_*(F, v)$$

und für \overline{G} kommen anstelle der Mengen $\widehat{C}_*(F, v)$ die Mengen von der Form

$$\widehat{C}'_*(F, v) := C(F, v) \cup \Omega'(F, v) \cup E_*(F, v)$$

hinzu. Im Rahmen dieser Arbeit wird meist einer der Räume $|G|$ oder \overline{G} betrachtet, aber auch der Raum G spielt in der Diskussion der Freudenthal-Enden eine Rolle.

Wie im Falle von G werden auch Teilgraphen $H \subseteq G$ aufgefasst als Punkt-mengen $V(H) \cup \mathring{E}(H)$ in natürlicher Weise zu Unterräumen von $|G|$. Auch in diesen Fällen wird der entsprechende Unterraum nicht anders, sondern wieder mit H bezeichnet.

Man bemerke, dass zusammenhängene Teilgraphen immer auch topologisch wegzusammenhängend sind. Ferner sind alle basis-offenen Mengen topologisch wegzusammenhängend, da jede basis-offene Menge mit einem Ende ω auch einen Strahl R aus ω enthält und $R \cup \omega$ dann ein topologischer Weg ist.

Der mit einem Graphen assoziierte Raum $|G|$ ist im allgemeinen nicht hausdorffsch. Dies kann zwei Gründe haben. Gibt es zwei äquivalente Ecken $v, w \in G$, dann haben v und w im Raum $|G|$ keine disjunkten Umgebungen. Sie haben sogar genau dieselben Umgebungen. Ist ferner $v \in G$ eine Ecke, die ein Ende $\omega \in \Omega(G)$ dominiert, dann haben v und ω ebenfalls genau dieselben Umgebungen in $|G|$.

Äquivalenz zwischen Ecken ist eine Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge $V(G)$, die mit \sim bezeichnet werde. Für die Äquivalenzklasse einer Ecke v wird dann \tilde{v} geschrieben.

Die Äquivalenzrelation \sim kann auf die Menge $V(G) \cup \Omega(G)$ ausgedehnt werden. Es heißen wieder zwei Elemente $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ *äquivalent*, wenn es keinen endlichen Kantentrenner $F \subseteq E(G)$ gibt, so dass die Elemente x und y in verschiedenen Komponenten von $G - F$ liegen oder leben. Diese Äquivalenzrelation werde mit $-$ angeschrieben und die Äquivalenzklasse eines Elementes $x \in V(G) \cup \Omega(G)$ sei mit \bar{x} bezeichnet. Die Äquivalenzrelation $-$ kann trivial auf ganz $|G|$ ausgedehnt werden, indem für einen inneren Punkt $p \in \mathring{e}$ einer Kante $\bar{p} := \{p\}$ gesetzt wird. Es ist damit möglich, zum Quotientenraum $|G|/-$ überzugehen. Der Quotientenraum ist dann offenbar hausdorffsch, da mit der Relation $-$ gerade die Elemente aus $|G|$ identifiziert werden, für die es keine disjunkten Umgebungen gibt.

Für jede Ecke $v \in G$ ist dann $\tilde{v} \subseteq \bar{v}$ und die Menge $\bar{v} \setminus \tilde{v}$ enthält höchstens ein dominiertes Ende, denn daraus, dass eine Ecke zwei Strahlen dominiert, folgt die (Kanten-) Äquivalenz dieser Strahlen.

Die Menge $F \subseteq E(G)$ sei eine endliche Kantenmenge. Wir sagen, dass F eine Ecke v von einem Strahl $R \subseteq G$ *trennt*, wenn v und ein Teilstrahl von R in verschiedenen Komponenten von $G - F$ liegen; in diesem Fall sagen wir auch, dass F die Ecke v von dem Ende $\omega(R)$ trennt. Ferner trenne F den Strahl R von einem weiteren Strahl $R' \subseteq G$, wenn Teilstrahlen von R und R' in verschiedenen Komponenten von $G - F$ liegen; in diesem Fall sagen wir dann auch, dass F die Enden $\omega(R)$ und $\omega(R')$ voneinander trennt.

In diesem Abschnitt soll noch ein Lemma vorgestellt werden, dass ein wichtiges Hilfsmittel für viele Beweise in dieser Arbeit darstellt. Es findet sich in

[6]. Dabei heie ein Strahl R zusammen mit einem unendlichen Wegesystem $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von auf R beginnenden disjunkten Wegen ein *Kamm* (dabei dürfen die Wege durchaus trivial sein). Die Endecken der Wege P_i sind die *Zähne* des Kamms und R sein *Rücken*. Ein (unterteilter) \aleph_α -*Stern* ist eine Ecke s zusammen mit \aleph_α (nicht-trivialen) Wegen, die sich genau in s treffen; die Ecke s wird dabei das *Zentrum* des Sterns genannt und die von s verschiedenen Endecken der Wege seine *Blätter*.

Lemma 1.1. *Es sei U eine unendliche Eckenmenge in einem zusammenhängenden Graphen G . Dann enthält G entweder einen Kamm mit unendlich vielen Zähnen in U oder einen $|U|$ -Stern mit $|U|$ Blättern in U . Ist insbesondere U überabzählbar, dann ist letzteres der Fall.*

Auf Lemma 1.1 wird in dieser Arbeit auch als das *Strahl/Stern-Lemma* Bezug genommen.

1.4 Ergebnisüberblick

An dieser Stelle soll ein Überblick über die wichtigsten in dieser Arbeit erzielten Resultate gegeben werden.

Der eigentliche Teil dieser Arbeit beginnt mit dem zweiten Kapitel. Hier werden einige grundlegende Eigenschaften der Topologie ETOP untersucht. Es zeigt sich zunächst, dass für zusammenhängendes G der entsprechende Raum auf G zusammen mit seinen undominierten Kanten-Enden immer kompakt ist:

Satz 1. *Ist G ein zusammenhängender Graph, dann ist der Raum \overline{G} immer kompakt.*

Als unmittelbare Konsequenz erhält man dann auch, dass der Raum $|G|$ auf G zusammen mit allen Kanten-Enden immer kompakt ist.

Es wird weiter untersucht, wann der Raum \overline{G} metrisierbar ist. Dabei muss offenbar sichergestellt werden, dass \overline{G} hausdorffsch ist. Dann zeigt sich:

Satz 2. *Es sei G ein zusammenhängender Graph, der keine zwei quivalente Ecken enthält. Dann ist der Raum \overline{G} genau dann metrisierbar, wenn G abzählbar ist.*

Für dieses Resultat werden zwei alternative Beweise gegeben. Der erste nutzt einen topologischen Satz von Urysohn. Interessanter ist jedoch der zweite Beweis. Hier wird deutlich, dass Ω' -treue Spannbäume in natürlicher Weise eine Metrik anzeigen, die auf $G \cup \Omega'(G)$ gerade die Topologie ETOP induziert. Dabei stellt sich die Frage, für welche Graphen Ω' -treue Spannbäume existieren. Dieses Problem ist bereits in [9] gelöst, aber für die hier interessierende Klasse von Graphen kann ein einfacherer Beweis gegeben werden.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird der Quotientengraph G/\sim eines Graphen G betrachtet. Er ist auf den Äquivalenzklassen des Ausgangsgraphen definiert. Versieht man den Quotientengraphen zusammen mit seinen (Kanten-)

Enden wieder mit ETOP , so erhält man den topologischen Raum $|G/\sim|$. Überraschenderweise kann dieser Raum auf natürliche Weise wieder in den Ausgangsraum eingebettet werden:

Satz 3. *Es existiert eine Einbettung ϕ von $|G/\sim|$ in $|G|$.*

Im dritten Kapitel geht es darum, wie sich die Topologie ETOP zu anderen ähnlich definierten Topologien verhält. Das Hauptaugenmerk ist dabei auf die Beziehung zwischen den (Kanten-) Enden und den Freudenthal-Enden gerichtet. Letztere lassen sich definieren, wenn man den Graphen G als Punktmenge $V(G) \cup \dot{E}(G)$ auffasst und darauf die Topologie ETOP betrachtet. Es zeigt sich, dass hier eine natürliche Bijektion zwischen den undominierten (Kanten-) Enden und den Freudenthal-Enden von G existiert:

Satz 4. *Es existiert eine Bijektion φ zwischen $\Omega'(G)$ und den Freudenthal-Enden von G .*

Es kann ferner gezeigt werden, dass dann der Raum \bar{G} zur Topologie FETOP auf G zusammen mit seinen Freudenthal-Enden homöomorph ist. Dabei ist FETOP ganz ähnlich wie die bekannte Freudenthal-Topologie definiert.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden zunächst einige einfache Aussagen über das Verhältnis von Kanten-Enden und Ecken-Enden getroffen, um dann die Topologie PTOP zu betrachten, die auf G zusammen mit seinen Ecken-Enden definiert ist. Unter bestimmten Bedingungen kann hiervon zu einer Quotiententopologie übergegangen werden, die einen zu \bar{G} homöomorphen Raum erzeugt.

Im letzten Kapitel werden die homologischen Aspekte des Raumes $|G|$ diskutiert. Für den Aufbau der grundlegenden Aussagen über den Zyklenraum spielen topologische Spannbäume eine sehr wichtige Rolle. Entscheidend ist hier die Tatsache, dass sie immer existieren:

Satz 5. *Es sei G ein zusammenhängender Graph. Dann existiert ein topologischer Spannbaum T von $|G|$.*

Damit lässt sich bereits zeigen, dass die Elemente des Zyklenraums gerade diejenigen Kantenmengen sind, die jeden endlichen Schnitt in einer geraden Anzahl von Kanten treffen:

Satz 6. *Es sei G ein zusammenhängender Graph. Dann liegt eine Menge $D \subseteq \dot{E}(G)$ genau dann im Zyklenraum $\mathcal{C}(G)$, wenn D jeden endlichen Schnitt in einer geraden Anzahl von Kanten trifft.*

Es ergibt sich ferner, dass die Fundamentalkreise eines topologischen Spannbauums den Zyklenraum erzeugen. In der Diskussion der topologischen Spannbäume wird auch gezeigt, dass es immer einen topologischen Spannbaum gibt, dessen Fundamentalkreise alle endlich sind. Zusammengefasst erhält man so:

Satz 7. *Die Fundamentalkreise eines topologischen Spannbauums von $|G|$ erzeugen den Zyklenraum $\mathcal{C}(G)$. Insbesondere erzeugen auch die endlichen Kreise den Zyklenraum.*

Mit Hilfe eines im Rahmen des Existenzproblems für topologische Spann­bäume behandelten Lemmas ergibt sich schließlich auch, dass jedes Element des Zy­klenraums eine disjunkte Vereinigung von Kreisen ist.

Satz 8. *Sei G zusammenhängend. Jedes Element $D \in \mathcal{C}(G)$ ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen $C \in \mathcal{C}(G)$.*

Insgesamt kann so THEOREM 1.1 auf nicht lokal-endlich Graphen übertragen werden.

Kapitel 2

Eigenschaften von ETOP

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden topologischen Eigenschaften von ETOP untersucht werden.

Im ersten Abschnitt wird gezeigt, dass für zusammenhängendes G der Raum \overline{G} , also ETOP auf $G \cup \Omega'(G)$, immer kompakt ist.

Dann wird im zweiten Abschnitt die Frage der Metrisierbarkeit von ETOP behandelt. Es zeigt sich, dass der Raum \overline{G} für einen zusammenhängenden Graphen G , der keine zwei äquivalente Ecken enthält, genau dann metrisierbar ist, wenn er abzählbar ist. Für diese Aussage werden zwei alternative Beweise gegeben. Der erste nutzt einen Satz von Urysohn und ist nicht konstruktiv. Der zweite Beweis arbeitet mit Ω' -treuen Spannbäumen, die in natürlicher Weise eine geeignete Metrik induzieren. Es wird auch ein neuer Beweis dafür gegeben, dass diese Spannbäume für die im Rahmen dieser Arbeit interessierende Klasse von Graphen immer existieren.

Im dritten und letzten Teil wird der Quotientengraph G/\sim eines Graphen G betrachtet. Die Äquivalenzklassen des Ausgangsgraphen bilden dabei die Ecken des Quotientengraphen. Es kann hier gezeigt werden, dass ETOP auf dem Quotientengraphen zusammen mit seinen Enden einen Raum $|G/\sim|$ erzeugt, der wieder in den Ausgangsraum $|G|$ eingebettet werden kann. Dies kann es in einzelnen Fällen ermöglichen, für den Quotientengraphen gewonnene Resultate auf den Ausgangsgraphen zu übertragen.

2.1 Kompaktheit

In diesem Abschnitt wird der Raum \overline{G} betrachtet, d.h. ETOP auf der Menge $G = V(G) \cup \overset{\circ}{E}(G)$ des Graphen zusammen mit seinen undominierten (Kanten-) Enden $\Omega'(G)$. Es soll gezeigt werden, dass der Raum \overline{G} für zusammenhängendes G immer kompakt ist. Als Korollar ergibt sich dann, dass in diesem Fall auch der Raum $|G|$ (also ETOP auf $G \cup \Omega(G)$) immer kompakt ist.

Entscheidend dafür, dass \overline{G} auch dann kompakt sein kann, wenn G Ecken unendlichen Grades enthält, ist die Tatsache, dass eine offene Menge O mit einer Ecke v bereits fast alle Nachbarn von v enthält (man betrachte dazu Abbildung 2.1).

Als Beispiel sei S ein (unterteilten) \aleph_0 -Stern mit Zentrum z und Blättermenge

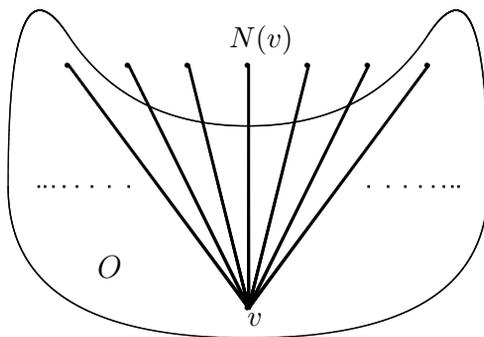


Abbildung 2.1: Die offene Menge O enthält fast alle Nachbarn von v .

U . Eine basis-offene Umgebung $O = C(F, z) \cup E_*(F, z)$ von z enthält dann bereits fast alle z - U Wege aus S , da F die Ecke z nur von endlich vielen Blättern trennen kann. Der Rest $S \setminus O$ ist dann als endliche Vereinigung kompakter Wegstücke kompakt. Also ist auch S kompakt.

In der Kompaktheit des Raumes \overline{G} auch für einen Graphen G , der Ecken unendlichen Grades enthält, liegt ein wesentlicher Unterschied zur Topologie TOP. Denn enthält G eine Ecke unendlichen Grades, so sieht man leicht, dass dann der Raum $|G|_{TOP}$ nicht kompakt sein kann.

Zusammen mit einigen anderen Aussagen sollen die speziellen Eigenschaften von ETOP nun ausgenutzt werden, um den Kompaktheitsbeweis vorzubereiten.

Eine Kante trägt als Unterraum die Topologie des Einheitsintervalls $[0, 1]$. Da das Einheitsintervall kompakt ist, gilt die

Bemerkung 2.1. Ist $F \subseteq E(G)$ endlich, dann ist $\bigcup F \subseteq \overline{G}$ kompakt.

Ist O eine in \overline{G} basis-offene Menge, die eine Ecke enthält, dann gibt es ein endliches $F \subseteq E(G)$ und eine Ecke $v \in G$, so dass $O = \widehat{C}'_*(F, v)$ gilt. Die Komponente $C(F, v)$ ist durch O eindeutig bestimmt und es sei $C_O := C(F, v)$ sowie $\widehat{C}_O := C(F, v) \cup \Omega'(F, v)$. Die Komponente C_O ist dann der maximale in O enthaltene Teilgraph von G . Liegt O im Innern einer Kante, dann sei formal $C_O := \emptyset$ und $\widehat{C}_O := \emptyset$.

Die maximalen in einer basis-offenen Menge O enthaltenen Teilgraphen C_O sind dann leer oder Komponenten, die das Löschen von nur endlich vielen Kanten hinterlässt. Das ergibt

Bemerkung 2.2. Ist O eine basisoffene Menge von \overline{G} , dann gibt es höchstens endlich viele C_O - $N(C_O)$ Kanten. Insbesondere ist $N(C_O)$ endlich.

Diese Bemerkung können wir nun benutzen, um eine erste Aussage darüber zu treffen, wieviel von basis-offenen Mengen bereits überdeckt wird.

Lemma 2.1. *Es sei H ein Teilgraph von G , \mathcal{F} eine endliche Menge von basisoffenen Mengen, $H \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. Dann gilt:*

- a) *Bis auf höchstens endlich viele Kanten ist $G[H]$ in $\bigcup \mathcal{F}$ enthalten, d.h. es gibt ein endliches $F \subseteq E(G)$ mit $(G[H] - F) \subseteq \bigcup \mathcal{F}$.*

Ist ferner noch $C_O \subseteq H$ für alle $O \in \mathcal{F}$ erfüllt, so gilt auch:

- b) *Es gibt höchstens endlich viele $H-N(H)$ Kanten. Insbesondere ist $N(H)$ endlich.*

Beweis. Ist $O \in \mathcal{F}$ eine basisoffene Menge, dann enthält C_O bereits fast alle Kanten von $G[C_O]$. Ist $O' \in \mathcal{F}$ eine weitere basis-offene Menge, dann gibt es nach Bemerkung 2.2 höchstens endlich viele $C_O-C_{O'}$ Kanten in G , die nicht bereits in einer dieser beiden Komponenten liegen. Zusammen mit der Endlichkeit von \mathcal{F} impliziert dies den ersten Teil der Behauptung.

Ist zusätzlich $C_O \subseteq H$ für alle $O \in \mathcal{F}$ erfüllt, dann gilt

$$E(H, N(H)) \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{F}} E(C_O, N(C_O)).$$

Bemerkung 2.2 zusammen mit der Endlichkeit von \mathcal{F} ergeben nun auch den zweiten Teil der Behauptung. □

Lemma 2.1 kann für ein weiteres Lemma benutzt werden, das uns sagt, dass sich ein Graph durch Teilgraphen ausschöpfen lässt, die wir zu einer gegebenen basisoffenen Überdeckung von \overline{G} so wählen können, dass jeder dieser Teilgraphen endlich überdeckt ist. Zusätzlich schicken diese Teilgraphen nur endlich viele Kanten in den Rest des Graphen. Genauer gilt nämlich

Lemma 2.2. *Sei G ein zusammenhängender Graph mit Spannbaum T und Wurzel r , \mathcal{F} eine basisoffene Überdeckung von \overline{G} und*

$$G_i := G[\{v \in V(G) \mid d_T(r, v) \leq i\}]$$

für $i \in \mathbb{N}_0$.

Dann gibt es eine Folge $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots$ von Teilgraphen mit $H_i \supseteq G_{i-1}$ und eine Folge $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ von endlichen Teilmengen von \mathcal{F} mit $H_i \subseteq \bigcup \mathcal{F}_i$ und $C_O \subseteq H_i$ für alle $O \in \mathcal{F}_i$.

Beweis. Sei eine basis-offene Überdeckung \mathcal{F} von G gegeben zusammen mit einem Spannbaum T mit Wurzel r . Ferner seien die G_i definiert wie oben. Die Folgen der Teilgraphen H_i und der endlichen Teilmengen $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$ mit den angegebenen Eigenschaften lassen sich induktiv konstruieren.

Für den Induktionsanfang wähle man ein $O \in \mathcal{F}$ mit $r \in O$ und setze $H_1 := C_O$ sowie $\mathcal{F}_1 := \{O\}$. Offenbar haben dann H_1 und \mathcal{F} die entsprechenden Eigenschaften.

Seien jetzt die beiden Folgen für ein $i > 1$ bereits konstruiert. Die Induktionsannahme und Lemma 2.1 ergeben dann die beiden Aussagen:

(1) $E(H_i, N(H_i))$ ist endlich. Insbesondere ist $N(H_i)$ endlich.

und

(2) $\bigcup \mathcal{F}_i$ enthält $G[H_i]$ bis auf höchstens endlich viele Kanten.

Da endlich viele Kanten kompakt sind, folgt aus (1) und (2)

(3) Es gibt ein endliches $\mathcal{F}'_{i+1} \subseteq \mathcal{F}$, das $G[H_i \cup N(H_i)] \setminus \bigcup \mathcal{F}_i$ enthält.

Setzen wir nun $\mathcal{F}_{i+1} := \mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}'_{i+1}$ und

$$H_{i+1} := G[H_i \cup N(H_i)] \cup \bigcup_{O \in \mathcal{F}'_{i+1}} C_O,$$

dann haben wir die gesuchten Folgenglieder gefunden. Die gewünschten Eigenschaften ergeben sich aus der Konstruktion zusammen mit der Induktionsannahme. □

Anwendung von Lemma 2.1 auf Lemma 2.2 ergibt das

Korrolar 2.1. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.2 gibt es eine Folge $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots$ von Teilgraphen von G mit $H_i \supseteq G_{i-1}$ und eine Folge $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ von endlichen Teilmengen von \mathcal{F} , so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:*

- a) *Bis auf höchstens endlich viele Kanten ist $G[H_i]$ in $\bigcup \mathcal{F}_i$ enthalten.*
- b) *Es gibt höchstens endlich viele $H_i - N(H_i)$ Kanten. Insbesondere ist $N(H_i)$ endlich.*

Es wird wichtig sein, unter bestimmten Bedingungen in einer absteigenden Folge von Graphen einen Strahl zu finden. Dafür ist das folgende Lemma hilfreich.

Lemma 2.3. *Es sei $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots$ eine unendliche Folge nicht-leerer zusammenhängender Graphen mit $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i = \emptyset$.*

Dann gibt es einen Strahl $R \subseteq H_1$, so dass jedes H_i einen Teilstrahl von R enthält.

Beweis. Der gesuchte Strahl R kann induktiv konstruiert werden. Sei dazu v eine beliebige Ecke in H_1 . Dann gibt es ein H_{j_1} , das v nicht enthält. Man wähle dann in H_1 einen $v - H_{j_1}$ Weg P_1 . Sei w dessen letzte Ecke. Es gibt dann ein $H_{j_2} \subseteq H_{j_1}$, das w nicht enthält. Es kann nun in H_{j_1} ein $w - H_{j_2}$ Weg P_2 gewählt werden. Dieser Weg vermeidet P_1 bis auf dessen letzte Ecke w . Auf diese Weise fortfahrend findet sich der gesuchte Strahl. □

Noch ein einfaches Lemma:

Lemma 2.4. *Ist R ein Strahl in G und \mathcal{F} eine basis-offene Überdeckung von \overline{G} , dann gibt es ein $O \in \mathcal{F}$, das einen Teilstrahl von R enthält.*

Beweis. Ist der Strahl R nicht dominiert, so wähle man eine basis-offene Menge $O \in \mathcal{F}$, die $\omega(R)$ enthält. Dann enthält C_O einen Teilstrahl von R .

Wird R von einer Ecke v dominiert, so gibt es ein $O \in \mathcal{F}$, das v enthält. Da v nicht durch endlich viele Kanten von R getrennt werden kann, enthält $C_O \subseteq O$ einen Teilstrahl von R . □

Anders als beim Löschen von Ecken hinterlässt das Löschen von nur endlich vielen Kanten immer auch nur endlich viele Komponenten:

Bemerkung 2.3. *Ist G zusammenhängend und $F \subseteq E(G)$ endlich, dann zerfällt $G - F$ in höchstens endlich viele Komponenten.*

Nun kommen wir zum Ziel dieses Abschnittes, dem Kompaktheitsbeweis. Er ist angelegt als Widerspruchsbeweis. Zunächst soll G durch endlich überdeckte Teilgraphen H_i wie in Korrolar 2.1 ausgeschöpft werden. Ferner soll im Rest eine Folge von nicht endlich überdeckten Komponenten gefunden werden, die einen Strahl enthalten. Mit Lemma 2.4 wird dann ein Widerspruch dazu hergeleitet, dass alle diese Komponenten nicht endlich überdeckt waren.

Satz 2.1. *Ist G zusammenhängend, dann ist \overline{G} kompakt.*

Beweis. Sei G ein zusammenhängender Graph und \mathcal{F} eine offene Überdeckung von \overline{G} . Wir dürfen annehmen, dass die Elemente von \mathcal{F} basis-offen sind.

Angenommen nun, \mathcal{F} enthält keine endliche Teilüberdeckung. Es können H_i und \mathcal{F}_i wie in Korrolar 2.1 gewählt werden. Es sei $E_i := E(H_i, N(H_i))$ und \mathcal{C}_i die Menge der $C_i = (E_i, x) \cup \Omega'(E_i, x)$ für ein $x \in N(H_i)$. Mit E_i ist auch \mathcal{C}_i endlich. Nicht alle $C \in \mathcal{C}_i$ können endlich überdeckt sein, da sonst offenbar auch \overline{G} endlich überdeckt wäre, da H_i endlich überdeckt ist.

Jedes Element aus \mathcal{C}_{i+1} ist in einem $C \in \mathcal{C}_i$ enthalten. Ist also $C_i \in \mathcal{C}_i$ nicht endlich überdeckt, so muss es ein nicht endlich überdecktes $C_{i+1} \in \mathcal{C}_{i+1}$ mit $C_{i+1} \subseteq C_i$ geben, das ebenfalls nicht endlich überdeckt ist. Denn sonst wäre C_i endlich überdeckt, da es in H_{i+1} zusammen mit den in C_i enthaltenen $C \in \mathcal{C}_{i+1}$ bis auf höchstens endlich viele $H_{i+1} - N(H_{i+1})$ Kanten enthalten ist.

Wir finden so eine Kette $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$ von nicht-endlich überdeckten Mengen $C_i \in \mathcal{C}_i$. Da H_i wegen $H_i \supseteq G_{i-1}$ den Graphen ausschöpft, ist der Schnitt über die C_i leer. Daher können wir Lemma 2.3 anwenden und erhalten einen Strahl R , der in jedem C_i einen Teilstrahl hat. Es gibt dann ein $O \in \mathcal{F}$, das einen Teilstrahl von R enthält (Lemma 2.4). Sei F eine endliche Kantenmenge, so dass C_O eine Komponente von $G - F$ ist. Man wähle nun i hinreichend groß, so dass $F \subseteq G_i$ gilt. Dann ist $C_i \subseteq \widehat{C}_O \subseteq O$ im Widerspruch dazu, dass C_i nicht endlich überdeckt ist. □

Beachtet man, dass eine in $|G|$ offene Menge O mit einer dominierenden Ecke v auch das von v dominierte Ende ω_v enthält, dann ergibt sich aus einem Vergleich der basis-offenen Mengen von \overline{G} und $|G|$ unmittelbar:

Korrolar 2.2. *Ist G zusammenhängend, dann ist $|G|$ kompakt.*

2.2 Metrisierbarkeit

In diesem Abschnitt wird es um die Frage gehen, wann die Topologie ETOP metrisierbar ist. Da metrisierbare Räume hausdorffsch sind, stellt die Frage der Metrisierbarkeit nur für hausdorffsche Räume ein interessantes Problem dar. Fordert man für den Graphen G , dass er keine zwei äquivalente Ecken enthält, und betrachtet man den Raum \overline{G} , also ETOP auf $G \cup \Omega'(G)$, dann hat man es mit einem hausdorffschen Raum zu tun. Deshalb wird es im Folgenden um den Raum \overline{G} gehen für einen Graphen G , der keine zwei äquivalente Ecken enthält. Als Resultat erhält man, dass der Raum \overline{G} für einen zusammenhängenden Graphen G , der keine zwei äquivalente Ecken enthält, genau dann metrisierbar ist, wenn G abzählbar ist. Für diese Aussage werden zwei Beweise gegeben. Der erste nutzt einen Metrisationssatz von Urysohn und ist dadurch nicht konstruktiv. Im zweiten Beweis soll versucht werden, die Metrik explizit zu definieren. Dies geschieht im Rekurs auf Ω' -treue Spannbäume, die in natürlicher Weise eine Definition der Metrik erlauben. Dadurch stellt sich die Frage ihrer Existenz. Es wird gezeigt, dass man sie für Graphen, die keine zwei äquivalente Ecken enthalten, relativ einfach konstruieren kann.¹ Die Existenzaussage für Ω' -treue Spannbäume wird auch für die spätere Homologie-Diskussion sehr interessant sein. Sie wird die Konstruktion topologischer Spannbäume für den Raum $|G|$ (bei beliebigem G) erlauben, deren Fundamentalkreise alle endlich sind. Damit kann dann gezeigt werden, dass die endlichen Kreise den Zyklenraum erzeugen (vgl. den Abschnitt 4.6).

Erster Beweis

Die zentrale Rolle übernimmt hier wie angekündigt ein Satz von Urysohn (z.B. in [11]:QUERENBURG 2001, S. 133):

Satz 2.2 (Urysohn). *Ein kompakter Hausdorff-Raum ist genau dann metrisierbar, wenn er eine abzählbare Basis besitzt.*

Dieser Metrisationssatz von Urysohn ist deshalb so interessant, weil für zusammenhängendes G der Raum \overline{G} nach Satz 2.1 immer kompakt ist. Er liefert so ein Kriterium für die Frage, wann der Raum \overline{G} metrisierbar ist, falls G keine zwei äquivalente Ecken enthält (und damit hausdorffsch ist).

Dass für überabzählbares (und zusammenhängendes) G der Raum \overline{G} nicht metrisierbar ist, lässt sich auch ohne den Satz von Urysohn einsehen:

¹Es ist bereits bekannt, dass sie für diese Klasse von Graphen existieren. Diese Aussage wird von THEOREM 4 in [9, p. 240] impliziert.

Lemma 2.5. *Ist ein zusammenhängender Graph G überabzählbar, dann ist der Raum \overline{G} nicht metrisierbar.*

Beweis. Sei also G zusammenhängend und überabzählbar. Man wende dann auf $U := V(G)$ und G das Strahl/Stern-Lemma an. Dies kann nur einen $|U|$ -Stern S mit Zentrum z ergeben. Dabei hat dann die Ecke z eine überabzählbare Nachbarschaft in G . Wäre jetzt der Raum \overline{G} metrisierbar, dann wäre die Nachbarschaft

$$N_G(z) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (N_G(z) \setminus K_{1/n}(z))$$

als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar. Denn da jede offene Umgebung von z fast alle Nachbarn von z enthält, ist $N_G(z) \setminus K_{1/n}(z)$ endlich (dabei bezeichnet $K_\varepsilon(x)$ die offene ε -Kugel um x bezüglich der jeweiligen Metrik). □

Es stellt sich jetzt noch die Frage, wann der Raum \overline{G} eine abzählbare Basis besitzt. Hier gilt die folgende Aussage:

Lemma 2.6. *Der Raum \overline{G} hat genau dann eine abzählbare Basis, wenn G abzählbar ist.*

Beweis. Hat \overline{G} eine abzählbare Basis, dann ist G offenbar abzählbar. Sei daher jetzt umgekehrt G abzählbar. Mit $V(G)$ ist auch $E(G)$ abzählbar. Betrachtet man nun für eine Kante $e \in E(G)$ einen Homöomorphismus $\psi_e : (0, 1) \rightarrow \mathring{e}$, dann ist die Menge Q_e der Punkte $p \in \mathring{e}$ mit rationalem Urbild unter ψ abzählbar. Insgesamt ist damit die Menge

$$Q := \bigcup_{e \in E(G)} Q_e$$

als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar.

Mit Q ist auch die Menge \mathcal{Q} der endlichen Teilmengen von Q abzählbar. Für $P \in \mathcal{Q}$ zerfällt dann $|G'| \setminus P$ in eine Vereinigung von endlich vielen basis-offenen Mengen. Sei B_P die Menge dieser basis-offenen Mengen und

$$\mathcal{B} := \bigcup_{P \in \mathcal{Q}} B_P.$$

Dann ist auch \mathcal{B} als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar. Da sich für eine Kante $e = xy \in E(G)$ das offene Kantenstück $[x, v) \subseteq e$ als Vereinigung von Kantenstücken $[x, p)$ mit $p \in Q_e$ darstellen lässt (und analog jede offene Teilmenge $(w, v) \subseteq \mathring{e}$ Vereinigung von Mengen (q, p) mit $q, p \in Q_e$ ist), ergibt sich aus der Definition von ETOP, dass \mathcal{B} eine Basis des Raumes \overline{G} ist. □

Abschließend kann nun der eingangs genannte Satz gezeigt werden.

Satz 2.3. *Es sei G ein zusammenhängender Graph, der keine zwei äquivalente Ecken enthält. Dann ist der Raum \overline{G} genau dann metrisierbar, wenn G abzählbar ist.*

Beweis. Sei also G ein zusammenhängender Graph, der keine zwei äquivalente Ecken enthält.

Ist jetzt der Raum \overline{G} metrisierbar, dann ist G nach Lemma 2.5 abzählbar. Ist umgekehrt G abzählbar, dann besitzt der Raum \overline{G} eine abzählbare Basis (Lemma 2.6). Ferner ist \overline{G} hausdorffsch, da G keine zwei äquivalenten Ecken enthält und nach Satz 2.1 auch kompakt aufgrund seines Zusammenhangs. Damit ist er metrisierbar nach dem Satz von Urysohn (Satz 2.2). □

Alternativer Beweis

Wie in diesem Abschnitt nachgewiesen werden soll, zeigen Ω' -treue Spannbäume für abzählbare Graphen eine Metrik an, die ETOP auf $G \cup \Omega'(G)$ induziert. Das Konzept eines Ω' -treuen Spannbaums lässt sich vor dem folgenden begrifflichen Hintergrund entwickeln, der hier [9] entnommen ist.

Ist $H \subseteq G$ ein Teilgraph von G , dann gibt es eine kanonische Projektion $\eta : \Omega(H) \rightarrow \Omega(G)$ der (Kanten-) Enden von H auf die (Kanten-) Enden von G . Dabei ist η durch die Bedingung eindeutig bestimmt, dass für jeden Strahl $R \subseteq H$ das Ende $\omega(R) \in \Omega(H)$ in das Ende $\eta(\omega(R)) \in \Omega(G)$ mit $R \in \eta(\omega(R))$ übergeht. Der Teilgraph H heißt *Enden-erhaltend*, wenn η injektiv ist. Für eine Menge von Enden $\Lambda \subseteq \Omega(G)$ heißt H Λ -*treu*, wenn H Enden-erhaltend ist und $\eta(\Omega(H)) = \Lambda$ gilt. Ein Ω' -treuer Spannbaum T von G soll abkürzend einen $\Omega'(G)$ -treuen Spannbaum bezeichnen.²

Offenbar sind die Ω' -treuen Spannbäume von G gerade jene, die aus jedem undominierten Ende genau einen normalen Strahl und keinen dominierten Strahl enthalten. Solche Spannbäume lassen sich in Graphen, die keine zwei äquivalente Ecken enthalten, auf einfache Weise durch ihre Fundamentalschnitte charakterisieren. Dazu eine Vorbemerkung, die sich sofort aus der Anwendung des Strahl/Stern-Lemmas ergibt:

Bemerkung 2.4. *Ist T ein Spannbaum von G und $\omega \in \Omega'(G)$ ein undominiertes Ende, dann enthält T einen normalen Strahl $R \in \omega$.*

Und nun zum eigentlichen Lemma, dessen Aussage es ist, dass die Ω' -treuen Spannbäume eines Graphen G , der keine zwei äquivalente Ecken enthält, gerade die Spannbäume von G sind, deren Fundamentalschnitte alle endlich sind.

²Diese Begriffe lassen sich auf analoge Weise natürlich auch für Ecken-Enden definieren.

Lemma 2.7. *Es sei G ein Graph, in dem keine zwei Ecken äquivalent sind und T ein Spannbaum von G . Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- (i) *Die Fundamentalschnitte von T sind endlich.*
- (ii) *T enthält aus jedem undominierten Ende $\omega \in \mathcal{O}'(G)$ genau einen normalen Strahl, aber keinen dominierten Strahl.*

Beweis. Sei also G ein Graph, in dem keine zwei Ecken äquivalent sind und T ein Spannbaum von G .

Es werde zunächst angenommen, dass die Fundamentalschnitte von T alle endlich sind. Ist $R \subseteq T$ ein normaler Strahl, $v \in G$ eine Ecke und $R' \subseteq T$ ein von R verschiedener normaler Strahl, dann gibt es jeweils eine Kante $e \in T$, so dass ein Teilstrahl von R und die Ecke v bzw. Teilstrahlen von R und R' in verschiedenen Komponenten von $T - e$ liegen. Da der Fundamentalschnitt D_e endlich ist, zeigt dies, dass v den Strahl R nicht dominiert und dass R und R' nicht äquivalent sind. Ferner enthält T nach Bemerkung 2.4 aus jedem undominierten Ende $\omega \in \mathcal{O}'(G)$ einen normalen Strahl. Insgesamt ist damit gezeigt, dass T aus jedem undominierten Ende genau einen normalen Strahl, aber keinen dominierten Strahl enthält.

Nun gelte umgekehrt, dass T die zuletzt gezeigte Eigenschaft hat. Angenommen, es gibt dann eine Kante $e = xy \in T$, so dass der Fundamentalschnitt D_e unendlich ist. Es seien T_x und T_y die beiden Komponenten von $T - e$, die x bzw. y enthalten. Ferner sei $V(D_e)$ die Menge der mit Kanten aus D_e inzidenten Ecken $v \in V(G)$. Dann ist $X := V(D_e) \cap T_x$ oder $Y := V(D_e) \cap T_y$ unendlich. Es kann angenommen werden, dass X unendlich ist. Man wende jetzt auf X und T_x das Strahl/Stern-Lemma an. Ergibt es einen \aleph_0 -Stern S_x mit Zentrum z_x , dann sei $U_x \subseteq X$ die Menge der Blätter von S_x . Ergibt es einen Kamm K_x mit Rücken R_x , dann sei $U_x \subseteq X$ die Menge der Zähne von K_x . Es werde jetzt die Nachbarschaft Y' von U_x in Y betrachtet. Ist sie endlich, so gibt es eine Ecke $y \in Y'$, die im Falle des Strahls S_x mit der Ecke z_x äquivalent ist (im Widerspruch zur Annahme über G) oder im Falle des Kamms K_x den Strahl R_x dominiert (im Widerspruch zur Annahme über T). Also kann angenommen werden, dass Y' unendlich ist. Anwendung des Strahl/Stern-Lemmas auf Y' und T_y ergibt jetzt entweder einen \aleph_0 -Stern S_y mit Zentrum z_y oder einen Kamm K_y mit einem Strahl R_y als Rücken. Doch dann würde im Falle des Sterns S_y das Zentrum z_y mit z_x äquivalent sein (falls der Stern S_x in T_x existiert) oder den Strahl R_x dominieren (falls der Kamm K_x in T_x existiert). Dies wäre entweder ein Widerspruch zur Annahme über G oder zur Annahme über T . Im Falle des Kamms K_y würde entweder eine Ecke (nämlich z_x) den Strahl R_y dominieren oder es gäbe einen zur R_y disjunkten äquivalenten Strahl (nämlich R_x) in T . Ersteres wäre wieder ein Widerspruch dazu, dass T keinen dominierten Strahl enthält und letzteres impliziert unmittelbar die Existenz zweier verschiedener in G äquivalenter normaler Strahlen in T mit Widerspruch. Also kann der Fundamentalschnitt D_e nicht unendlich gewesen sein. □

Mit Hilfe dieser Charakterisierung kann nun gezeigt werden, dass die Ω' -treuen Spannbäume für geeignetes G die Definition einer Metrik D auf der Menge $G \cup \Omega'(G)$ erlauben, die darauf gerade die Topologie ETOP induziert. Die Konstruktion der Metrik orientiert sich sehr an der von DIESTEL in [3] gewählten Vorgehensweise. Dabei ist allerdings zu beachten, dass beispielsweise für eine Ecke v unendlichen Grades die Nachbarn von v einen beliebig kleinen Abstand zu v annehmen müssen, so dass jede Kugel-Umgebung von v fast alle Nachbarn von v enthält. Andernfalls wäre eine solche Kugel-Umgebung nicht offen unter ETOP. Dies ist daher durch eine zusätzliche Bedingung sicherzustellen.

Es wird zunächst die Metrik des Spannbauemes T zusammen mit der Metrik, die Kanten e als homöomorphe Bilde des Einheitsintervalls tragen, genutzt, um durch geeignete Skalierung die Metrik zunächst auf $T \cup \Omega'(G)$ zu definieren und sie dann auf ganz $G \cup \Omega'(G)$ fortzusetzen.

Satz 2.4. *Es sei G ein zusammenhängender und abzählbarer Graph, der keine zwei äquivalenten Ecken enthält. Gibt es dann einen Ω' -treuen Spannbaum T von G , dann ist der Raum \overline{G} metrisierbar.*

Beweis. Es sei G ein zusammenhängender und abzählbarer Graph, der keine zwei äquivalenten Ecken enthält. Es existiere jetzt ein Ω' -treuer Spannbaum T von G mit Wurzel r .

Wir beginnen damit, eine Metrik D auf \overline{G} zu definieren. Mit dem n -ten Level von T sei die Menge der Ecken v von T bezeichnet mit $d_T(r, v) = n$. Es soll jetzt zunächst jeder Ecke $v \in T$ eine Zahl z_v aus der Menge $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ zugeordnet werden. Es sei $z_r := 1$. Zu einer Ecke $w \in T$ sei a_1^w, a_2^w, \dots eine (ggf. endliche) Abzählung der Nachbarn von w in T , die größer sind als w in der Baumordnung von T (eine solche existiert, da G abzählbar ist). Ist jetzt $v \in T$ eine beliebige Ecke ungleich der Wurzel r , dann gibt es genau eine Ecke $w \in T$, die kleiner ist als v . Es gibt dann weiter ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $v = a_n^w$ ist. Man setze nun $z_v := 1/n$.

Ist $e = vw \in T$ eine Kante, so trägt e zunächst die Metrik des Einheitsintervalls $[0, 1]$. Liegt dabei w auf dem $(n - 1)$ -ten und v auf dem n -ten Level von T , so skalieren wir diese Metrik linear mit dem Faktor

$$\frac{1}{2^n} \prod_{x \in [v]} z_x .$$

Die so auf den Kanten von T definierte Metrik lässt sich zu einer Metrik auf $T \cup \Omega'(G)$ erweitern. Dabei sei der Abstand zwischen zwei Ecken v, w die Summe über die Länge der Kanten des eindeutig bestimmten v - w Weges in T . Der Abstand zwischen einer Ecke v und einem Ende $\omega \in \Omega'(G)$ sei die Summe über die Kantenlängen des eindeutig bestimmten Strahls $R \subseteq T$ aus ω , der v als seine Anfangsecke hat. Und der Abstand zwischen zwei Enden $\omega, \omega' \in \Omega'(G)$ sei die Summe über die Kantenlängen des eindeutig bestimmten Doppelstrahls $R \cup R' \subseteq T$ mit $R \in \omega$ und $R' \in \omega'$ (Die so definierten Summen existieren, da die Summe über die Kanten eines normalen Strahls durch $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^n = 1$ beschränkt ist; insbesondere ist dadurch die Summe über die Kantenlängen eines Doppelstrahls durch 2 beschränkt). Für innere Punkte einer Kante $e \in T$

werden bei der Definition der Abstände diese Wege oder Strahlen noch um halb-offene Kantenstücke verlängert und der Abstand als Summe über die durchlaufenen Kanten(stücke) gesetzt.

Eine Kante $e = xy$ aus $G \setminus T$ wird linear auf die Länge des bereits definierten Abstandes zwischen den Ecken x und y skaliert. Ist p ein innerer Punkt von $e = x_1x_2$ und $z \in T \cup \Omega'(G)$, dann sei der Abstand von p zu z gerade das Minimum der beiden Summen $D(z, x_i) + D(x_i, p)$, wobei D die bereits definierte Metrik bezeichnet. Ist p' innerer Punkt einer weiteren Kante $e = y_1y_2$ außerhalb von T , dann sei der Abstand von p zu p' in analoger Weise das Minimum der vier Summen $D(p, x_i) + D(x_i, y_j) + D(y_j, p')$.

Dass so eine Metrik auf \overline{G} definiert wird, prüft man leicht nach.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass die so definierte Metrik auf \overline{G} gerade die Topologie ETOP induziert. Es wird damit begonnen zu zeigen, dass offene Kugel-Umgebungen $K_\varepsilon(x)$ ($\varepsilon > 0$) um ein Element $x \in \overline{G}$ auch unter ETOP offen sind. Dafür reicht es zu zeigen, dass es eine unter ETOP offen Umgebung $O \subseteq K_\varepsilon(x)$ von x gibt. Liegt dabei x im Innern einer Kante, so ist diese Aussage klar.

Sei daher jetzt x eine Ecke. Mit $N_T^>(x)$ bezeichnen wir die Nachbarn v von x in T mit $v > x$. Nach Konstruktion der Metrik gibt es dann ein $U \subseteq N_T^>(x)$, das fast alle Nachbarn von x in T enthält, so dass die Kugel $K_\varepsilon(x)$ den Untergraphen

$$H := G\left[\bigcup_{u \in U} [u] \cup \{x\}\right]$$

zusammen mit den darin lebenden (undominierten) Enden enthält. Dies liegt daran, dass der Faktor $1/2^n$ die Länge von Strahlen durch 2 beschränkt und der zusätzliche Faktor dafür sorgt, dass zu einem gegebenen n fast alle von einer Ecke nach oben gehenden Strahlen eine Länge kleiner als $1/n$ erhalten.

Es reicht jetzt zu zeigen, dass die Menge F der H - $N(H)$ Kanten endlich ist. Dann würde F eine unter ETOP basis-offene Umgebung $O \subseteq K_\varepsilon(x)$ induzieren. Seien dazu e_1, \dots, e_k die endlich vielen x - y Kanten mit $y \in N_T(x) \setminus U$. Dann ist aber F in der endlichen Vereinigung $\bigcup_{i=1}^k D_{e_i}$ der Fundamentalschnitte D_{e_i} enthalten. Und da diese nach Lemma 2.7 endlich sind, muss auch F endlich sein.

Ist jetzt noch x ein undominiertes Ende, dann enthält $K_\varepsilon(x)$ nach Konstruktion der Metrik einen Strahl $R \subseteq T$ aus dem Ende x . Ist dann v eine Ecke auf R , dann enthält die Kugel $K_\varepsilon(x)$ ein H wie eben, für das $R \subseteq H$ erreicht werden kann. Die endliche Kantenmenge F der H - $N(H)$ Kanten induziert dann eine unter ETOP basis-offene Umgebung $O \subseteq K_\varepsilon(x)$ von dem Ende x .

Es ist nun noch zu zeigen, dass unter ETOP offene Mengen $O \subseteq \overline{G}$ auch in der von der Metrik D auf $G \cup \Omega'(G)$ induzierten Topologie offen sind. Liegt dabei O im Innern einer Kante, so ist dies sofort klar. Andernfalls können wir annehmen, dass O basis-offen ist und so von einer endlichen Kantenmenge F induziert wird. Ist dann $x \in O$ ein Element, dann sei ε der minimale Abstand von x zu einem Element aus der endlichen Menge $V(F)$ der mit Kanten aus F inzidenten Ecken. Nach Konstruktion der Metrik folgt dann $K_\varepsilon(x) \subseteq O$.

Insgesamt ist damit gezeigt, dass der Raum \overline{G} durch D metrisiert wird. □

Um das Resultat von Satz 2.3 zu erhalten, müsste man jetzt noch wissen, dass für einen abzählbaren und zusammenhängenden Graphen G , der keine zwei äquivalente Ecken enthält, immer ein Ω' -treuer Spannbaum existiert. Dies wird von THEOREM 4 in [9] impliziert. Für den hier interessierenden Fall lässt sich ein einfacherer Beweis geben, der auch aufgrund der besonderen Rolle, die diese Bäume in der Homologie-Diskussion spielen, an dieser Stelle vorgestellt werden soll. Es wird versucht, die Charakterisierung durch Lemma 2.7 auszunutzen und einen entsprechenden Spannbaum mit endlichen Fundamentalschnitten zu konstruieren.

Ist $F \subseteq E(G)$ und $T \subseteq G$ ein Baum, dann heiße F T -konform, wenn für jede Komponente C von $G - F$ der Schnitt $C \cap T$ leer oder zusammenhängend ist. Interessant ist dabei das folgende Lemma.

Lemma 2.8. *Sei $F \subseteq E(G)$ und $T \subseteq G$ ein Baum. Ist die Menge F T -konform und e eine Kante in $F \cap T$, dann liegt der Fundamentalschnitt F_e in F .*

Beweis. Es sei F T -konform und e eine Kante in $F \cap T$. Angenommen, es gibt eine Kante $e' = xy \in F_e$, die nicht in F ist. Dann ist $e \neq e'$. Ferner seien T_x und T_y die beiden Komponenten von $T - e$, die x bzw. y enthalten. Wegen $e' \notin F$ gibt es dann eine Komponente C von $G - F$, die e' enthält. Dann ist $T \cap C$ aber nicht zusammenhängend, da der eindeutig bestimmte x - y Weg in T die Kante $e \in F$ trifft. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass die Menge F T -konform ist. □

Lemma 2.8 besitzt ein wichtiges Korrolar.

Korrolar 2.3. *Es sei T ein Spannbaum von G . Gibt es zu jeder Kante $e \in E(T)$ eine endliche T -konforme Kantenmenge $F \subseteq E(G)$, die e enthält, dann sind alle Fundamentalschnitte von T endlich.*

Ein Ω' -treuer Spannbaum kann jetzt für die in dem Kontext dieser Arbeit interessierende Klasse von Graphen induktiv konstruiert werden. Die Grundidee der Konstruktion ist es dabei, für eine konstruierte Kante $e = xy$ einen geeigneten endlichen x - y Kantentrenner $F \subseteq E(G)$ zu finden und bei der weiteren Konstruktion sicherzustellen, dass der Fundamentalschnitt F_e in F liegt. Dies lässt sich gut mit dem Konzept einer T -konformen Kantenmenge formulieren.

Satz 2.5. *Es sei G ein zusammenhängender und abzählbarer Graph, der keine zwei verschiedene äquivalente Ecken enthält. Dann existiert ein Spannbaum T von G , dessen Fundamentalschnitte alle endlich sind.*

Beweis. Sei also G ein zusammenhängender und abzählbarer Graph. Man wähle dann eine Abzählung v_1, v_2, \dots von $V(G)$. Es sollen aufsteigende Folgen von Bäumen $T_1 \subset T_2 \subset \dots$ und endlichen Kantenmengen $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq E(G)$ mit den folgenden Eigenschaften (für alle $i \in \mathbb{N}$) gleichzeitig konstruiert werden:

- (i) $v_i \in T_i$.
- (ii) Jede Komponente von $G - F_i$ enthält genau eine Ecke $v \in T_i$.
- (iii) Für $k < i$ ist die Menge F_k T_i -konform.

Man setze $T_1 := v_1$ und $F_1 := \emptyset$. Dann sind offenbar die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt. Die Bedingung (ii) ergibt sich dabei aus dem Zusammenhang von G .

Es seien Bäume $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_i$ und endliche Kantenmengen $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_i$ mit den Eigenschaften (i) bis (iii) bereits konstruiert. Man kann annehmen, dass v_{i+1} nicht in T_i liegt (ansonsten setze man $T_{i+1} := T_i$). Es gibt dann eine Komponente C von $G - F_i$, die v_{i+1} enthält. Wegen (ii) gibt es eine eindeutig bestimmte Ecke $v \in T_i$ in C . Sei dann $P = x_1 \dots x_k$ ein $v-v_{i+1}$ Weg in C . Es werde jetzt $T_{i+1} := T_i \cup P$ gesetzt. Dann ist offenbar (i) für T_{i+1} erfüllt. Man wähle weiter ein minimales $F'_{i+1} \subseteq E(C)$, so dass alle Ecken von P in verschiedenen Komponenten von $C - F'_{i+1}$ liegen und setze $F_{i+1} := F_i \cup F'_{i+1}$ (ein solches F'_{i+1} ist endlich, da in G keine zwei Ecken äquivalent sind). Die Induktionsannahme ergibt dann, dass auch (ii) für F_{i+1} erfüllt ist. Wegen $P \subseteq C$ folgt die Eigenschaft (iii) ebenso aus der Induktionsannahme. Damit sind die gewünschten Folgen konstruiert.

Seien jetzt $T_1 \subset T_2 \subset \dots$ und $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq E(G)$ zwei solche Folgen und $T := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$. Der Baum T ist dann wegen (i) ein Spannbaum von G . Ist jetzt $e \in T$ eine Kante, dann gibt es ein T_i , das e enthält. Dann ist F_i eine endliche Kantenmenge, die wegen (ii) die Kante e enthält.

Ferner ist F_i T -konform. Ansonsten gäbe es eine Komponente C von $G - F_i$, so dass $T \cap C$ nicht zusammenhängend wäre. Sind dann x und y zwei Ecken in verschiedenen Komponenten von $T \cap C$, dann gibt es ein T_j mit $x, y \in T_j$ und $j > i$. Doch F_i wäre dann nicht T_j -konform im Widerspruch zu (iii).

Das Korollar 2.3 impliziert nun die Behauptung, dass alle Fundamentalschnitte von T endlich sind. □

Insgesamt wird mit den jetzt bereitgestellten Aussagen der Satz 2.3 unabhängig vom Satz von Urysohn impliziert (man beachte, dass Lemma 2.5 die eine Richtung bereits unabhängig von Urysohn zeigte).

Satz 2.5 hat ein für die spätere Homologie-Diskussion noch ein sehr wichtiges Korollar.³

Korollar 2.4. *Es sei G ein zusammenhängender Graph beliebiger Kardinalität, der keine zwei verschiedene äquivalente Ecken enthält. Dann existiert ein Spannbaum T von G , dessen Fundamentalschnitte alle endlich sind.*

Beweis. Es sei G ein zusammenhängender Graph, der keine zwei äquivalente Ecken enthält. Die maximalen 2-zusammenhängenden Teilgraphen H von G

³Eine Beweisskizze für diese Aussage erhielt der Autor von seinem Betreuer Prof. Dr. R. Diestel.

sind abzählbar. Denn gäbe es einen überabzählbaren 2-zusammenhängenden Teilgraphen H , so findet man darin mit dem Strahl/Stern-Lemma zunächst eine Ecke v überabzählbaren Grades. Der Graph $H - v$ wäre dann immer noch zusammenhängend und erneutes Anwenden des Strahl/Stern-Lemmas auf $H - v$ und die überabzählbare Nachbarschaft $N_H(v)$ ergäbe wieder einen Stern, dessen Zentrum mit v äquivalent wäre im Widerspruch dazu, dass G keine zwei äquivalente Ecken enthält.

Daher findet sich für die Blöcke von G nach Satz 2.5 ein Spannbaum T_H , dessen Fundamentalschnitte alle endlich sind. Da der Blockgraph eines Graphen ein Baum ist, wird die Vereinigung T dieser T_H zusammen mit den Brücken von G zu einem Spannbaum von G . Und die Fundamentalschnitte von T sind dann endlich: Liegt eine Kante e aus T in einem der T_H , dann ist der Fundamentalschnitt D_e bezüglich T gleich dem entsprechenden Fundamentalschnitt bezüglich T_H ; ansonsten besteht er lediglich aus der Kante e . □

2.3 Der Quotientengraph

In manchen Fällen ist es hilfreich, in einem Graphen arbeiten zu können, der keine zwei äquivalente Ecken enthält. In diesem Abschnitt soll daher der Quotientengraph G/\sim vorgestellt werden, dessen Ecken gerade die Äquivalenzklassen des Ausgangsgraphen bilden. Den Quotientengraphen kann man zusammen mit seinen (Kanten-) Enden wieder mit der Topologie ETOP versehen und erhält so den Raum $|G/\sim|$. Interessanterweise lässt sich der Raum $|G/\sim|$ wieder in $|G|$ einbetten, was im Folgenden aufgezeigt werden soll. Dazu wird zunächst untersucht, wie sich die Enden des Quotientengraphen zu den Enden des Ausgangsgraphen verhalten. Es wird sich zeigen, dass hier eine natürliche Injektion $h_G : \Omega(G/\sim) \rightarrow \Omega(G)$ existiert. Anschließend wird die Funktion h_G zu einer Funktion $\phi_G : |G/\sim| \rightarrow |G|$ fortgesetzt und gezeigt, dass sie eine Einbettung des Raumes $|G/\sim|$ in den Ausgangsraum $|G|$ definiert.⁴

Die Existenz einer solchen Einbettung kann es in bestimmten Fällen ermöglichen, für den Quotientenraum gewonnene Resultate auf den Ausgangsgraphen zu übertragen. Beispielsweise wird sich zeigen, dass sich topologische Spannbäume auf diese Weise vom Quotientengraphen in den Ausgangsgraphen übertragen lassen (siehe Abschnitt 4.5).

Es wird damit begonnen, den *Quotientengraphen* G/\sim eines Graphens G zu definieren. Die Äquivalenzklassen $\tilde{v} \subseteq V(G)$ bilden die neuen Ecken von G/\sim und es ist $\tilde{v}\tilde{w}$ genau dann eine Kante von G/\sim , wenn es eine $\tilde{v}-\tilde{w}$ Kante in G gibt (und \tilde{v} von \tilde{w} verschieden ist). Etwas formaler:

⁴Dabei heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eine *Einbettung* von X in Y , wenn f ein Homöomorphismus von X auf $f(X)$ ist.

$$V(G/\sim) := \{\tilde{v} \subseteq V(G) \mid v \in V(G)\} \text{ und}$$

$$E(G/\sim) := \{\tilde{v}\tilde{w} \in V(G/\sim)^2 \mid \tilde{v} \neq \tilde{w} \text{ und } \exists v_0 \in \tilde{v}, w_0 \in \tilde{w} : v_0w_0 \in E(G)\}.$$
⁵

Es folgen noch zwei Definitionen: Ist $U \subseteq V(G)$ eine Menge von Ecken, dann sei $U/\sim := \{\tilde{v} \in V(G/\sim) \mid v \in U\}$ die Menge der Äquivalenzklassen von Elementen aus U . Und ist $F \subseteq E(G)$ eine Menge von Kanten, dann sei $F/\sim := \{\tilde{v}\tilde{w} \in E(G/\sim) \mid vw \in F\}$.

Seine Bedeutung erhält der Quotientengraph nun wie angekündigt durch die Aussage, dass er keine zwei äquivalente Ecken enthält:

Lemma 2.9. *In G/\sim sind je zwei verschiedene Ecken inäquivalent.*

Beweis. Es seien $v, w \in V(G/\sim)$ zwei verschiedene Ecken des Quotientengraphen und $v_0 \in v$ sowie $w_0 \in w$ zwei Ecken im Ausgangsgraphen G , die jene Ecken repräsentieren. Da v und w verschieden sind, gibt es einen endlichen Kantentrenner $F \subseteq E(G)$, der v_0 von w_0 in G trennt. Offenbar ist dann F/\sim ebenfalls endlich. Wir wären also fertig, wenn gezeigt werden könnte, dass F/\sim die Ecken v und w voneinander trennt.

Angenommen also, es gibt einen v - w Weg $P = x_1x_2 \cdots x_n$ in $(G/\sim - F/\sim)$ mit $v = x_1$ und $w = x_n$.

Da F endlich ist, enthält jede Komponente C von $G - F$ mit einer Ecke z bereits jede Ecke aus \tilde{z} . Ist jetzt C diejenige Komponente von $G - F$, die v_0 enthält, dann folgt zunächst $\tilde{v}_0 = x_1 \subseteq C$. Nun enthält F keine x_i - x_{i+1} Kanten (für $1 \leq i < n$), denn sonst wäre $x_ix_{i+1} \in F/\sim$. Also folgt auch $x_2 \subseteq C$ und induktiv $x_n \subseteq C$, was wegen $w_0 \in x_n = w$ der Tatsache widerspricht, dass F die Ecken v_0 und w_0 voneinander trennt. □

Wir können also von G zu seinem Quotientengraphen übergehen, wenn wir in einem Graphen arbeiten wollen, der keine zwei äquivalenten Ecken mehr enthält (als Beispiel betrachte man Abbildung 2.2).

Es soll jetzt damit begonnen werden, die Enden des Quotientengraphen den Enden des Ausgangsgraphen zuzuordnen.

Ist R ein Strahl im Quotientengraphen G/\sim und R^* ein Strahl in G , dann heißen R und R^* *verwandt*, wenn $R \cap (R^*/\sim)$ unendlich ist. Hinter diesem Konzept steht die Idee, die Strahlen in G zu identifizieren, aus denen bei der Quotientenbildung die Strahlen im Quotientengraphen entstehen. Interessanterweise gibt es zu jedem Strahl im Quotientengraphen einen verwandten Strahl im Ausgangsgraphen:

⁵Zu einer Menge A bezeichnet A^n die Menge der n -elementigen Teilmengen von A .

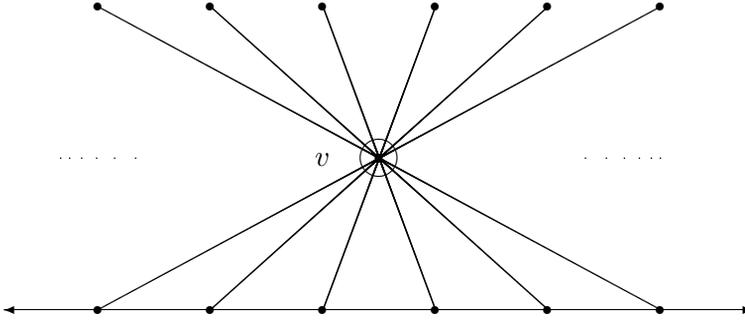


Abbildung 2.2: Der Quotientengraph des Graphen aus Abbildung 1.3. Die Ecke v identifiziert dabei die äquivalenten Ecken des Ausgangsgraphen.

Lemma 2.10. *Ist R ein Strahl im Quotientengraphen G/\sim , dann gibt es einen mit R verwandten Strahl $R^* = x_1x_2\cdots$ in G .*

Beweis. Es kann induktiv eine Folge von Wegen $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots$ in G mit den folgenden Eigenschaften definiert werden:

- (i) $\forall i \in \mathbb{N} : |(P_i/\sim) \cap R| \geq i$.
- (ii) $\forall i \in \mathbb{N}$: Ist x die Endecke von P_i , dann ist $\tilde{x} \in R$ und es ist keine weitere Ecke auf P_i zu x äquivalent und es gibt keine Ecke $y \in P_i$ mit $\tilde{y} > \tilde{x}$ in der Baumordnung von R .

Die Eigenschaft (i) sichert dann, dass der Strahl $R^* := \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ mit R verwandt ist.

Sei nun $R = y_1y_2\cdots$ ein Strahl im Quotientengraphen G/\sim . Ist $x_1 \in y_1$ eine Ecke aus G , die y_1 repräsentiert, dann sei $P_1 := x_1$. Offenbar erfüllt P_1 die Eigenschaften (i) und (ii).

Seien jetzt die Wege $P_1 \subseteq \dots \subseteq P_i$ mit (i) und (ii) bereits definiert und x die Endecke von P_i . Wegen (ii) gibt es dann ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{x} = y_j$. Es sei $e = vv$ eine y_j - y_{j+1} Kante in G . Da nach (ii) keine von x verschiedene Ecke auf P_i zu x äquivalent ist, gibt es ein endliches $F \subseteq E(G)$, das x von allen Ecken aus $P_i \setminus x$ abtrennt.

In $G - F$ kann jetzt ein x - v Weg P gewählt werden, denn x und v liegen in derselben Äquivalenzklasse y_j . Ist keine Ecke aus P in einem y_k mit $k > j$ enthalten, dann sei

$$P_{i+1} := P_i \cup P \cup \{w\}.$$

Ansonsten sei z die erste Ecke auf P mit $z \in y_k$ und $k > j$. Dann sei

$$P_{i+1} := P_i \cup Pz .$$

Da P in $G - F$ verläuft, trifft P den Weg P_i nur in dessen letzter Ecke x und die Eigenschaft (ii) sichert, dass w nicht auf P_i liegt. Also ist P_{i+1} wieder ein Weg.

Aus der Induktionsannahme zusammen mit der Konstruktion von P_{i+1} ergibt sich, dass P_{i+1} wieder die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt. Damit ist alles gezeigt. \square

Soll das Ende eines Strahles R im Quotientengraphen dem Ende eines mit R verwandten Strahles R^* im Ausgangsgraphen zugeordnet werden, so ist zu klären, ob eine solche Abbildung wohldefiniert ist. Diese Frage wird mit dem folgenden Lemma positiv beantwortet.

Lemma 2.11. *Sind R_1 und R_2 (kanten-) äquivalente Strahlen im Quotientengraphen G/\sim , die mit den Strahlen R_1^* bzw. R_2^* in G verwandt sind, dann sind auch R_1^* und R_2^* (kanten-) äquivalent.*

Beweis. Es seien R_1 und R_2 äquivalente Strahlen im Quotientengraphen G/\sim , die mit den Strahlen R_1^* bzw. R_2^* verwandt sind. Ferner sei $F \subseteq E(G)$ eine beliebige endliche Kantenmenge aus G und C_1 sowie C_2 diejenigen Komponenten von $G - F$, die Teilstrahlen von R_1^* bzw. R_2^* enthalten. Da diese Teilstrahlen dann ebenfalls mit R_1 bzw. R_2 verwandt sind, kann $R_1^* \subseteq C_1$ und $R_2^* \subseteq C_2$ angenommen werden.

Da R_1 und R_2 äquivalent sind, liegen Teilstrahlen R'_1 und R'_2 in derselben Komponente C von $(G/\sim - F/\sim)$ (denn mit F ist auch F/\sim endlich). Und da R_1 mit R_1^* verwandt ist, gibt es eine Ecke x_1 auf R_1^* , so dass deren Äquivalenzklasse \tilde{x}_1 auf dem Teilstrahl R'_1 liegt. Genauso finden wir eine Ecke $x_2 \in R_2^*$ mit $\tilde{x}_2 \in R'_2$. Sei nun P ein \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 Weg in C . Genauso wie im Beweis von Lemma 2.10 zeigt man jetzt, dass dann x_1 und x_2 in derselben Komponente von $G - F$ liegen, woraus $C_1 = C_2$ und damit die Äquivalenz von R_1^* und R_2^* folgt. \square

Damit kann jetzt eine Abbildung

$$h_G : \Omega(G/\sim) \rightarrow \Omega(G)$$

definiert werden. Zu $\omega(R) \in \Omega(G/\sim)$ gibt es nach Lemma 2.10 einen mit R verwandten Strahl R^* in G . Es werde $h_G(\omega(R)) := \omega(R^*)$ gesetzt. Nach Lemma 2.11 ist diese Abbildung wohldefiniert.

Zum Nachweis der Injektivität dieser Abbildung bedarf es noch eines Lemmas.

Lemma 2.12. *Ist $e = \tilde{x}\tilde{y}$ eine Kante im Quotientengraphen G/\sim , dann ist die Menge F_e der \tilde{x} - \tilde{y} Kanten in G endlich.*

Beweis. Sei $e = \tilde{x}\tilde{y}$ eine Kante im Quotientengraphen G/\sim und F_e die Menge der \tilde{x} - \tilde{y} Kanten in G . Ferner wähle man ein $x_0 \in \tilde{x}$ und ein $y_0 \in \tilde{y}$. Nach Konstruktion des Quotientengraphen ist \tilde{x} von \tilde{y} verschieden und also x_0 nicht äquivalent mit y_0 .

Angenommen nun, die Menge F_e wäre unendlich. Es kann gezeigt werden, dass dann x_0 äquivalent mit y_0 sein müsste. Sei dazu $F \subseteq E(G)$ eine beliebige endliche Kantenmenge. Es gibt dann eine Kante $e' = x_1y_1$ in $F_e \setminus F$ mit $x_1 \in \tilde{x}$ und $y_1 \in \tilde{y}$. Da x_0 mit x_1 äquivalent ist und y_0 mit y_1 , folgt dann, dass x_0 in derselben Komponente von $G - F$ wie y_0 liegt. □

Damit kann jetzt die Injektivität von h_G gezeigt werden.

Lemma 2.13. *h_G ist injektiv.*

Beweis. Es seien R_1 und R_2 zwei inäquivalente Strahlen im Quotientengraphen G/\sim und R_1^* sowie R_2^* zwei mit R_1 bzw. R_2 verwandte Strahlen im Ausgangsgraphen G . Es ist zu zeigen, dass dann auch R_1^* und R_2^* inäquivalent sind.

Sei dazu $F' \subseteq E(G/\sim)$ ein endlicher Kantentrenner von R_1 und R_2 . Zu $e = \tilde{x}\tilde{y} \in F'$ ist nach Lemma 2.12 die Menge F_e der \tilde{x} - \tilde{y} Kanten in G endlich. Damit ist die Kantenmenge

$$F := \bigcup_{e \in F'} F_e$$

als endliche Vereinigung endlicher Mengen ebenfalls endlich.

Es soll nun gezeigt werden, dass F die Strahlen R_1^* und R_2^* voneinander trennt. Angenommen nicht, dann liegen Teilstrahlen von R_1^* und R_2^* in derselben Komponente C von $G - F$. Es kann auf einem solchen Teilstrahl von R_1^* eine Ecke x_1 gewählt werden, so dass \tilde{x}_1 auf einem Teilstrahl von R_1 in $G/\sim - F'$ liegt, da die Strahlen R_1 und R_1^* verwandt sind. Es sei x_2 eine analog gewählte Ecke auf R_2^* .

Es gibt einen x_1 - x_2 Weg $P = y_1 \cdots y_n$ in C mit $y_1 = x_1$ und $y_n = x_2$. Da die Kanten y_iy_{i+1} ($1 \leq i < n$) von P nicht in F liegen, müssen \tilde{y}_i und \tilde{y}_{i+1} in derselben Komponente von $G/\sim - F'$ liegen. Denn falls überhaupt \tilde{y}_i von \tilde{y}_{i+1} verschieden ist, dann liegt die Kante $\tilde{y}_i\tilde{y}_{i+1}$ nicht in F' nach Konstruktion von F .

Induktiv folgt so, dass $\tilde{x}_1 = \tilde{y}_1$ in derselben Komponente von $G/\sim - F'$ liegen müsste wie $\tilde{x}_2 = \tilde{y}_n$, was der Annahme widersprechen würde, dass F' die Strahlen R_1 und R_2 voneinander trennt. □

Es soll nun die Funktion h_G zu einer Abbildung von ganz $|G/\sim|$ nach $|G|$ fortgesetzt werden. Dabei wird eine Äquivalenzklasse $\tilde{x} \in V(G/\sim)$ auf einen Repräsentanten $x_0 \in \tilde{x}$ geschickt und das Innere einer Kante $e = \tilde{x}\tilde{y}$ auf das Innere einer \tilde{x} - \tilde{y} Kante e^* in G . Die Tatsache, dass äquivalente Ecken genau dieselben

Umgebungen haben, lässt hoffen, dass eine so definierte Abbildung stetig ist. Formal präzise kann die gesuchte Abbildung wie folgt definiert werden. Es sei f_V eine Funktion, die jeder Ecke $\tilde{v} \in V(G/\sim)$ des Quotientengraphen einen Repräsentanten $v_0 \in \tilde{v}$ zuordnet. Weiter sei $*$ eine Funktion, die jeder Kante $e = \tilde{x}\tilde{y} \in E(G/\sim)$ des Quotientengraphen eine \tilde{x} - \tilde{y} Kante $e^* \in E(G)$ zuordnet. Dazu sei ein Homöomorphismus

$$\psi_{e^*} : e \rightarrow e^* \text{ mit } \psi_{e^*}(\tilde{x}) \in \tilde{x}$$

fest gewählt. Jetzt können wir setzen:

$$\phi_{(f_V, *)}(x) := \begin{cases} f_V(x) & \text{für } x \in V(G/\sim) \\ \psi_{e^*}(x) & \text{für } x \in \dot{e} \\ h_G(x) & \text{für } x \in \Omega(G/\sim) \end{cases}$$

Hier lassen wir die Funktion $\phi_{(f_V, *)}$ von f_V und $*$ abhängen. Dies zeigt an, dass bei der gesuchten Einbettung von $|G/\sim|$ in $|G|$ eine Wahlmöglichkeit besteht. Diese Wahlmöglichkeit wird an anderer Stelle noch einmal ausgenutzt werden (im Abschnitt 4.2 über die Existenz topologischer Spannäume).

Ansonsten kann aber auf den Index verzichtet und kurz ϕ oder ϕ_G geschrieben werden, letzteres dann, wenn der jeweilige Graph spezifiziert werden soll.

Jetzt kann die Hauptaussage dieses Abschnittes bewiesen werden.

Satz 2.6. *Es ist*

$$\phi_G : |G/\sim| \rightarrow \text{im}\phi_G \subseteq |G|$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Aus der Konstruktion von ϕ und der Injektivität von h_G folgt sofort:

(1) ϕ ist injektiv,

d.h. $\phi : |G/\sim| \rightarrow \text{im}\phi$ ist bijektiv. Es soll zunächst gezeigt werden, dass ϕ stetig ist.

Sei dazu $O \subseteq |G|$ offen. Es darf angenommen werden, dass O basis-offen ist.

Ebenfalls kann angenommen werden, dass O mindestens eine Ecke enthält. Denn sonst ist O im Innern einer Kante enthalten und das Urbild unter ϕ ist entweder leer oder gleich einem $\psi_{e^*}^{-1}(O)$ (für ein $e \in E(G/\sim)$) und damit offen.

Sei $F \subseteq E(G)$ eine endliche Kantenmenge, die C_O induziert. Um zu einem geeigneten Trenner im Quotientengraphen überzugehen, betrachten wir jetzt die Menge \tilde{F} aller Kanten aus dem Quotientengraphen, die in den Trenner F abgebildet werden:

$$\tilde{F} := \{e \in E(G/\sim) \mid \dot{e} \subseteq \phi^{-1}(\dot{F})\}.$$

Es soll jetzt zunächst gezeigt werden, dass das Urbild von \hat{C}_O unter ϕ als Vereinigung von Komponenten von $G/\sim - \tilde{F}$ (zusammen mit den darin lebenden Enden) dargestellt werden kann, nämlich

$$(2) \quad \phi^{-1}(\hat{C}_O) = \bigcup_{v \in V(\hat{C}_O)} \hat{C}(\tilde{F}, \tilde{v}).$$

Dabei ist $\widehat{C}(\widetilde{F}, \widetilde{v}) := C(\widetilde{F}, \widetilde{v}) \cup \Omega(\widetilde{F}, \widetilde{v})$. Der Kürze halber sei

$$\mathcal{C} := \bigcup_{v \in V(\widehat{C}_O)} \widehat{C}(\widetilde{F}, \widetilde{v}).$$

Es soll zunächst die Inklusion “ \subseteq “ von (2) gezeigt werden.

- (a) Ist $\widetilde{v} \in \phi^{-1}(\widehat{C}_O)$ eine Ecke, dann gibt es ein $v_0 \in \widetilde{v} \cap \widehat{C}_O$ und damit ist $\widetilde{v} \in \widehat{C}(\widetilde{F}, \widetilde{v}) \subseteq \mathcal{C}$.
- (b) Liegt $x \in \phi^{-1}(\widehat{C}_O)$ im Innern einer Kante $e = \widetilde{v}\widetilde{w}$, dann ist $\widetilde{v} \subseteq \widehat{C}_O$ (und ebenso $\widetilde{w} \subseteq \widehat{C}_O$), also $\widetilde{v} \in \mathcal{C}$. Da offenbar $e \notin \widetilde{F}$ gilt, folgt weiter $x \in \mathcal{C}$.
- (c) Ist $\omega \in \phi^{-1}(\widehat{C}_O)$ ein Ende, dann gibt es einen Strahl $R \in \omega$ und einen mit R verwandten Strahl $R^* \subseteq \widehat{C}_O$. Ist R' ein Teilstrahl von R in $(G/\sim - \widetilde{F})$, dann gibt es ein $v \in R^*$ mit $\widetilde{v} \in R'$. Also ist $R' \subseteq C(\widetilde{F}, \widetilde{v}) \subseteq \mathcal{C}$ und damit $\omega \in \mathcal{C}$.

Insgesamt ist damit die Inklusion “ \subseteq “ gezeigt.

Jetzt zur konversen Inklusion:

- (a) Ist $w \in \widehat{C}(\widetilde{F}, \widetilde{v})$ eine Ecke, $v \in V(\widehat{C}_O)$, dann sei $P = x_1 \cdots x_n$ ein \widetilde{v} - \widetilde{w} Weg in $C := \widehat{C}(\widetilde{F}, \widetilde{v})$. Da die x_i - x_{i+1} Kanten ($1 \leq i < n$) unter ϕ nicht in F abgebildet werden (und mit einer Ecke immer ihre ganze Äquivalenzklasse in einer Komponente eines endlichen Kantentrenners liegt), folgt $\phi(\widetilde{w}) \in \widehat{C}_O$.
- (b) Liegt $x \in \widehat{C}(\widetilde{F}, \widetilde{v})$ im Innern einer Kante $e = yz$, $v \in V(\widehat{C}_O)$, dann sind nach (a) $\phi(y)$ und $\phi(z)$ in \widehat{C}_O , also auch $y \subseteq \widehat{C}_O$ und $z \subseteq \widehat{C}_O$. Da $\phi(x) \notin \bigcup F$ ist, folgt so $\phi(x) \in \phi(e) \subseteq \widehat{C}_O$.
- (c) Ist $\omega \in \widehat{C}(\widetilde{F}, \widetilde{v})$ ein Ende, $v \in V(\widehat{C}_O)$, dann gibt es einen Strahl $R \subseteq \widehat{C}(\widetilde{F}, \widetilde{v})$ aus ω und dazu einen mit R verwandten Strahl R^* in G . Durch Übergang zu einem Teilstrahl können wir $R^* \subseteq G - F$ annehmen. Es gibt eine Ecke $x \in R$ mit $\phi(x) \in R^*$. Nach (a) ist $\phi(x) \in \widehat{C}_O$ und damit auch $R^* \subseteq \widehat{C}_O$, also $\phi(\omega) \in \widehat{C}_O$.

Damit ist auch die Inklusion “ \supseteq “ gezeigt, insgesamt also (2) etabliert.

Ist jetzt A die Vereinigung aller halb-offenen Kantenstücke $[v, w) \subseteq O$ mit $v \in \widehat{C}_O$, dann ist wegen (2)

$$\phi^{-1}(O) = \phi^{-1}(A) \cup \phi^{-1}(\widehat{C}_O) = \phi^{-1}(A) \cup \phi^{-1}(\mathcal{C}).$$

Um zu zeigen, dass der letzte Term offen im Quotientengraphen G/\sim ist, sei $[v, w)$ ein solches Kantenstück. Dann gibt es offenbar eine Kante $e' \in F$ mit $e' \supseteq [v, w)$. Ist $\phi^{-1}(e')$ nicht leer, dann gibt es eine Kante $e \in E(G/\sim)$ im Quotientengraphen, so dass $e' = e^*$ ist. Es ist dann $\phi^{-1}([v, w)) = \psi_{e^*}^{-1}([v, w))$ (man beachte, dass wegen $\psi_{e^*}^{-1}(v) = \widetilde{v}$ nach Wahl von ψ_{e^*} auch tatsächlich $\psi_{e^*}^{-1}(v) = \phi^{-1}(v)$ ist).

Also gibt es ein halb-offenes Kantenstück $[v', w') \subseteq e$ mit $v' \in \mathcal{C}$ wegen (2).

Offenbar ist auch $e \in \tilde{F}$. Damit ist insgesamt $\phi^{-1}(A)$ die Vereinigung von halb-offenen Kantenstücken $[v', w')$ mit $v' \in \mathcal{C}$ und $[v', w') \subseteq e$ für ein $e \in \tilde{F}$.

Ist umgekehrt $[v', w')$ ein solches Kantenstück, dann ist nach Definition von \tilde{F} offenbar auch $\phi([v', w')) \subseteq A$.

Somit ist $\phi^{-1}(O)$ als Vereinigung basis-offener Mengen offen im Quotientengraphen, d.h. wir haben

(3) ϕ ist stetig.

Sei jetzt $O \subseteq |G/\sim|$ offen im Quotientengraphen. Es ist noch zu zeigen, dass dann gilt:

(4) $\phi(O)$ ist offen im Bild $\text{im}\phi$.

Wir können wieder annehmen, dass O basis-offen ist. Liegt dann O im Innern einer Kante $e \in E(G/\sim)$, dann ist $\phi(O) = \psi_{e^*}(O)$ sogar offen in $|G|$.

Es kann daher angenommen werden, dass O mindestens eine Ecke enthält. Es sei dann \tilde{F} ein endlicher Kantentrenner, der C_O induziert. Wie im Beweis von Lemma 2.13 betrachten wir dazu die Menge $F \subseteq E(G)$ aller $\tilde{x}\tilde{y}$ Kanten in G für $e = \tilde{x}\tilde{y} \in \tilde{F}$. Die Menge F ist dann endlich (Lemma 2.12). Ist jetzt C eine Komponente von $G - F$, die das Bild einer Ecke aus C_O enthält, dann ist

(5) $\phi(\hat{C}_O) = \hat{C} \cap \text{im}\phi$.⁶

Es kann ein $\tilde{v} \in C_O$ so gewählt werden, dass $\hat{C} = C(F, v) \cup \Omega(F, v)$ gilt.

Wir beginnen damit, die Inklusion " \subseteq " zu zeigen.

- (a) Ist $\tilde{w} \in C_O$ eine Ecke, dann gibt es einen $\tilde{v}\tilde{w}$ Weg P in C_O , und da die Bilder der Kanten von P nicht in F liegen, folgt $\phi(\tilde{w}) \in \hat{C}$.
- (b) Liegt $x \in C_O$ im Innern einer Kante e , dann liegen die Bilder der Enden von e in C und (a) impliziert $x \in \hat{C}$.
- (c) Nach mittlerweile bekanntem Muster schließt man für ein Ende $\omega \in C_O$, dass $\phi(\omega) \in \hat{C}$ gilt.

Nun zur konversen Inklusion:

- (a) Ist $w \in \text{im}\phi \cap \hat{C}$ eine Ecke, dann gibt es einen $v\text{--}w$ Weg $P = x_1 \cdots x_n$ in C . Da die Kanten von P nicht in F liegen, ist mit \tilde{x}_i auch \tilde{x}_{i+1} in C_O . Induktiv folgt so $\tilde{w} \in C_O$, also $w \in \phi(\hat{C}_O)$.
- (b) (a) impliziert auch hier, dass ein $x \in \text{im}\phi \cap \hat{C}$ aus dem Innern einer Kante auch in $\phi(C_O)$ liegt.
- (c) Auch die Inklusionsbeziehung für Enden folgt nach bekanntem Muster aus (a).

⁶Dabei bezeichnet \hat{C} immer die Komponente C zusammen mit den darin lebenden Enden.

Wenn wir nun zu \widehat{C} die Menge $\phi(O \setminus C_O)$ hinzufügen zusammen mit einem halb-offenen Kantenstück $[v, w) \subseteq e$ mit $v \in \widehat{C}$ für jedes $e \in F$, das nicht im Bild $\text{im}\phi$ liegt, dann erhalten wir eine in $|G|$ basis-offene Menge O^* mit $\phi(O) = \text{im}\phi \cap O^*$ wegen (5). Damit ist die Aussage (4) gezeigt.

Insgesamt implizieren nun (1), (3) und (4) die Behauptung. □

Zum Ende dieses Abschnittes soll noch ein Lemma vorgestellt werden, das zeigt, dass sich undominierte Enden des Ausgangsgraphens im Quotientengraphen wiederfinden lassen, dass also jedes undominierte Ende von G im Bild der Einbettung ϕ_G des Quotientengraphens liegt. Dies ist beispielsweise wichtig, wenn später gezeigt werden soll, dass das Bild unter ϕ_G eines topologischen Spannbaums des Quotientengraphens einen topologischen Spannbaum im Ausgangsgraphen induziert.

Lemma 2.14. $\Omega'(G) \subseteq \text{im}\phi_G$.

Beweis. Sei $\omega \in \Omega'(G)$ ein undominiertes Ende und $R^* = v_1 v_2 \dots$ ein Strahl aus ω . Leitend ist nun die Beobachtung, dass jede Ecke v_i auf R^* nur zu endlichen vielen weiteren Ecken auf R^* äquivalent sein kann, da v_i sonst den Strahl R^* dominieren würde. Sei $m(v_i)$ die Ecke auf R^* mit dem maximalen Index aus der Äquivalenzklasse von v_i , d.h. ist $j = \max\{k \in \mathbb{N} \mid v_k \in \tilde{v}_i\}$, dann ist $m(v_i) = v_j$.

Es können damit induktiv Wege $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq G/\sim$ mit den folgenden Eigenschaften für jedes $i \in \mathbb{N}$ im Quotientengraphen definiert werden:

(i) $|P_i| = i$

(ii) $P_i \subseteq R^*/\sim$

(iii) Sind für $v, w \in R^*$ die Äquivalenzklassen $\tilde{v}, \tilde{w} \in P_i$ mit $\tilde{v} > \tilde{w}$ in P_i , dann ist $m(v) > m(w)$ in R^* .

Ist v die Anfangsecke von R^* , dann sei $P_1 := \tilde{v}$. Angenommen nun, die Wege $P_1 \subseteq \dots \subseteq P_i$ sind mit (i) – (iii) bereits konstruiert. Es sei \tilde{w} die letzte Ecke auf P_i . Es gibt dann nach (ii) ein $w_0 \in \tilde{w}$, das auf R^* liegt. Ist $v_j = m(w_0)$, dann sei $P_{i+1} := P_i \cup \{\tilde{v}_{i+1}\}$. Offenbar folgt aus der Induktionsannahme, dass dann (i) – (iii) auch für P_{i+1} gelten. Insbesondere sichert (iii), dass \tilde{v}_{i+1} nicht schon auf P_i liegt, d.h. P_{i+1} ist auch wirklich wieder ein Weg.

Sei jetzt $R := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$, dann ist R wegen (i) und (ii) ein mit R^* verwandter Strahl im Quotientengraphen, d.h. es ist $\phi(\omega(R)) = \omega(R^*)$. □

Kapitel 3

ETOP im Vergleich

Dieses Kapitel ist der Frage gewidmet, wie sich ETOP zu anderen ähnlich definierten Topologien verhält. In der Hauptsache geht es darum, einen Zusammenhang zwischen den Kanten-Enden eines Graphen G und seinen Freudenthal-Enden zu finden. Diese lassen sich definieren, wenn man G als mit ETOP versehenen topologischen Raum ansieht. Als Resultat ergibt sich, dass eine natürliche Bijektion zwischen den undominierten Kanten-Enden von G und seinen Freudenthal-Enden existiert. Daran anschließend lässt sich zeigen, dass man den Raum \overline{G} , d.h. ETOP auf G zusammen mit seinen undominierten Kanten-Enden, im Wesentlichen als Freudenthal-Kompaktifizierung von G mit ETOP auffassen kann.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden zunächst einige einfache Beziehungen zwischen Kanten-Enden und Ecken-Enden hergestellt. Sie geben Anlaß zu der Vermutung, dass sich unter bestimmten Voraussetzungen an G manche Topologien auf G zusammen mit seinen Ecken-Enden ganz ähnlich verhalten könnten wie ETOP auf G zusammen mit seinen Kanten-Enden. Es wird eine solche Topologie vorgestellt und diskutiert, wie sie sich zu ETOP verhält.

3.1 Kanten-Enden und Freudenthal-Enden

Fassen wir den Graphen G als den mit ETOP versehenen topologischen Raum $V(G) \cup \mathring{E}(G)$ auf, so lassen sich seine Freudenthal-Enden definieren. Es stellt sich dann die Frage, wie sich diese Enden zu den Kanten-Enden von G verhalten. Interessanterweise lässt sich eine natürliche Abbildung zwischen diesen Enden finden, die eine Bijektion zwischen den Freudenthal-Enden von G und seinen undominierten Kanten-Enden herstellt. Diese Bijektion zu etablieren ist Ziel dieses Abschnittes. Es wird nach Definition der Freudenthal-Enden zunächst die gesuchte Abbildung definiert und dann nacheinander erst ihre Injektivität und dann ihre Surjektivität gezeigt. Das gesamte Vorgehen in diesem Abschnitt orientiert sich dabei an der Bearbeitung des entsprechenden Problems für die Topologie TOP von DIESTEL & KÜHN in [6].

Für einen beliebigen topologischen Raum (X, \mathcal{O}) lassen sich seine Freudenthal-Enden wie folgt definieren. Ist $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht-leerer, offener und (to-

pologisch) zusammenhängender Teilmengen von X mit den Eigenschaften, dass $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bar{U}_i = \emptyset$ und der Rand ∂U_i für jedes $i \in \mathbb{N}$ kompakt ist, dann heie (U_i) eine ein *Freudenthal-Ende repräsentierende Folge* (mit \bar{U} werde dabei immer der Abschluss von U bezeichnet). Auf der Menge dieser Folgen kann eine Äquivalenzrelation erklärt werden. Zwei ein Freudenthal-Ende repräsentierende Folgen (U_i) und (U'_j) heißen quivalent, wenn es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $j \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $U_i \supseteq U'_j$ gilt und umgekehrt. Die Äquivalenzklassen dieser Relation sind die *Freudenthal-Enden* von X und die Äquivalenzklasse einer ein Freudenthal-Ende repräsentierenden Folge (U_i) sei mit $\epsilon(U_i)$ bezeichnet.¹

Es werden zwei einfache Lemmata benötigt:

Lemma 3.1. *Repsentieren die Folgen (U_i) und (U'_j) verschiedene Freudenthal-Enden in einem topologischen Raum X , dann gibt es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $\bar{U}_i \cap \bar{U}'_j = \emptyset$.*

Lemma 3.2. *Repräsentiert die Folge (U_i) ein Freudenthal-Ende in einem topologischen Raum X und ist $K \subseteq X$ ein Kompaktum, dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $K \cap U_j = \emptyset$ gilt.*

Zur Definition der Abbildung

An dieser Stelle soll die Abbildung definiert werden, die jedem Freudenthal-Ende ein Kanten-Ende zuordnet. Dafür soll in einer ein Freudenthal-Ende ϵ repräsentierenden Folge (U_i) ein Strahl R gefunden werden, der in jedem U_i einen Teilstrahl hat (um dann ϵ auf das Ende abzubilden, das R enthält). Wsstn wir, dass die maximalen in einem solchen U_i enthaltenden Teilgraphen von G zusammenhängend sind, dann wäre Lemma 2.3 anwendbar und würde die Existenz des gewünschten Strahles etablieren.² Die entsprechende Aussage sichert das folgende Lemma:

Lemma 3.3. *Sei $U \subseteq G$ (topologisch) zusammenhängend, offen und enthalte mindestens eine Ecke. Dann ist der maximale in U enthaltende Teilgraph (graphentheoretisch) zusammenhängend.*

Beweis. Sei H der maximale in U enthaltene Teilgraph von G . Dann ist $H \neq \emptyset$, weil U mindestens eine Ecke enthält. Wir können also eine Komponente C von H wählen.

Da U offen ist, lässt sich U als Vereinigung basis-offener Mengen darstellen. Sei $U = \bigcup \mathcal{B}$ eine solche Darstellung. Ferner sei jetzt

$$U_1 := \bigcup \{B \in \mathcal{B} \mid B \cap V(C) \neq \emptyset\}$$

und

$$U_2 := \bigcup \{B \in \mathcal{B} \mid B \cap (V(U) \setminus V(C)) \neq \emptyset\}.$$

¹Diese Begrifflichkeiten gehen auf die Arbeit von FREUDENTHAL in [8] zurück. Sie sind hier aber genauso wie die beiden folgenden Lemmata einem Vorlesungsskript von R. DIESTEL entnommen.

²Zur Erinnerung: Lemma 2.3 besagt, dass es in einer absteigenden Folge nicht leerer zusammenhängende Graphen H_i , deren Schnitt leer ist, immer einen Strahl R gibt, der in jedem H_i einen Teilstrahl hat.

U_1 ist gerade die Vereinigung der Mengen aus \mathcal{B} , die eine Ecke von C enthalten und U_2 ist die Vereinigung dieser Mengen, die eine Ecke in U außerhalb von C treffen.

Klar ist dann $V(U) \subseteq U_1 \cup U_2$.

U_1 und U_2 können keine gemeinsame Ecke enthalten, d.h. es gilt

$$(1) \quad V(U_1) \cap V(U_2) = \emptyset.$$

Denn angenommen, es gibt eine Ecke $v \in U_1 \cap U_2$, dann gibt es ein $B \in \mathcal{B}$, das v zusammen mit einer weiteren Ecke w außerhalb von C enthält. Dann gibt es aber in $C_B \subseteq U$ einen v - w Weg, im Widerspruch dazu, dass C eine Komponente von H ist.

Allgemeiner gilt sogar

$$(2) \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Denn hätten U_1 und U_2 einen inneren Punkt x einer Kante e gemeinsam, dann betrachte man ein $B \in \mathcal{B}$, das neben x eine Ecke aus C enthält und ein $B' \in \mathcal{B}$, das neben x eine Ecke außerhalb von C enthält. Haben nun B und B' eine Ecke gemeinsam, dann folgt wie oben ein Widerspruch dazu, dass C eine Komponente von H war. Haben sie keine Ecke gemeinsam, dann ist $e \subseteq B \cup B'$ und es folgt auf dieselbe Weise ebenfalls ein Widerspruch.

Ein $B \in \mathcal{B}$, das nicht bereits in U_1 oder U_2 enthalten ist, liegt im Innern einer Kante. Auf jeder C - $N(C)$ Kante gibt es einen Punkt, der nicht in U liegt (ggf. die Endecke einer solchen Kante). Wäre nun $U_2 \neq \emptyset$, dann ließen sich folglich U_1 und U_2 zu einer Zerlegung von U in zwei disjunkte, offene und nicht-leere Teilmengen ergänzen, im Widerspruch dazu, dass U (topologisch) zusammenhängend ist. Also ist $H = C$ zusammenhängend. □

Es wird auch das folgende Lemma benötigt.

Lemma 3.4. *Ist $G \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots$ eine unendliche Folge zusammenhängender Graphen mit $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i = \emptyset$ und sind R, R' Strahlen in G , so dass jedes H_i einen Teilstrahl von R und von R' enthält, dann ist $\omega(R) = \omega(R')$.*

Beweis. Sei eine entsprechende Folge (H_i) von Teilgraphen gegeben und R, R' Strahlen in G , so dass jedes H_i einen Teilstrahl von R und R' enthält. Ist $F \subseteq E(G)$ eine beliebige endliche Kantenmenge, dann ist $H_i \cap F = \emptyset$ für ein hinreichend großes i . Da H_i zusammenhängend ist, liegt H_i in einer Komponente C von $G - F$. Also liegen Teilstrahlen von R und R' in C .

Damit sind R und R' äquivalent, d.h. es gilt $\omega(R) = \omega(R')$. □

Man erhält so ein Korrolar, dass es ermöglicht, jeder ein Freudenthal-Ende repräsentierenden Folge (U_i) ein Kanten-Ende zuzuordnen:

Korollar 3.1. *Repräsentiert $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Freudenthal-Ende, dann gibt es einen Strahl R , so dass jedes U_i einen Teilstrahl von R enthält. Ist R' ein weiterer Strahl mit dieser Eigenschaft, dann ist $\omega(R) = \omega(R')$.*

Beweis. Es repräsentiere (U_i) ein Freudenthal-Ende. Dann enthält jedes U_i mindestens eine Ecke $v \in V(G)$. Denn angenommen, es gibt ein $i \in \mathbb{N}$, so dass U_i keine Ecke enthält. Aufgrund des Zusammenhangs von U_i läge diese Menge im Innern einer Kante e . Dann wäre aber $\overline{U_i}$ kompakt. Doch $(\overline{U_i} \setminus \overline{U_j})$ mit $j > i$ ist eine offene Überdeckung von $\overline{U_i}$, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

Sei jetzt H_i der maximale in U_i enthaltene Teilgraph. Dann ist H_i nicht leer und nach Lemma 3.3 zusammenhängend. Da der Schnitt über die U_i leer ist, ist der Schnitt über die H_i ebenfalls leer. Lemma 2.3 liefert jetzt die Existenz eines Strahles $R \subseteq H_1$, der in jedem H_i einen Teilstrahl hat.

Lemma 3.4 sichert dann noch, dass R bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. □

Die Wohldefiniertheit der angestrebten Abbildung wird durch das folgende Lemma bestätigt.

Lemma 3.5. *Es sei $\epsilon(U_i)_{i \in \mathbb{N}} = \epsilon(U'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein von verschiedenen Folgen repräsentiertes Freudenthal-Ende in G . Ferner seien R und R' Strahlen, so dass jedes U_i einen Teilstrahl von R und jedes U'_i einen Teilstrahl von R' enthält. Dann ist $\omega(R) = \omega(R')$.*

Beweis. Sind (U_i) , (U'_i) , R und R' entsprechend gewählt und H_i bzw. H'_i die maximalen in U_i bzw. U'_i enthaltenen Teilgraphen, dann enthält aufgrund der Äquivalenz von (U_i) und (U'_i) jedes H_i ein H'_j für ein hinreichend großes j . Damit enthält jedes H_i aber auch einen Teilstrahl von R' und mit Lemma 3.4 folgt $\omega(R) = \omega(R')$. □

Nun kann die gesuchte Abbildung wie gewünscht definiert werden:

Sei f_G die Abbildung, die jedem Freudenthal-Ende $\epsilon(U_i)$ das nach Korollar 3.1 existente und eindeutig bestimmte Ende $\omega(R) =: f(\epsilon(U_i))$ mit der Eigenschaft zuordnet, dass jedes U_i einen Teilstrahl von R enthält. Nach Lemma 3.5 ist diese Abbildung dann wohldefiniert.

Zur Injektivität

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die soeben definierte Funktion f_G injektiv ist.

Es wird zunächst die Aussage benötigt, dass die Abbildung f_G Freudenthal-Enden auf undominierte (Kanten-) Enden schickt:

Lemma 3.6. *Sei ϵ ein beliebiges Freudenthal-Ende von G . Dann ist $f_G(\epsilon)$ nicht dominiert.*

Beweis. Repräsentiere (U_i) ein beliebiges Freudenthal-Ende ϵ von G und sei R ein Strahl, der in jedem U_i einen Teilstrahl hat. Wäre R von einer Ecke v dominiert, dann läge v im Abschluss eines jeden U_i , da jede Umgebung von v einen Teilstrahl von R enthält. Dies aber wäre ein Widerspruch dazu, dass der Schnitt über die Abschlüsse \overline{U}_i leer ist. □

Interessanterweise sind zwei Strahlen aus einem undominierten (Kanten-) Ende nicht durch endlich viele Ecken trennbar, d.h. es gibt keine endliche Eckenmenge S , so dass Teilstrahlen dieser Strahlen in verschiedenen Komponenten von $G - S$ liegen.³

Lemma 3.7. *Ist ein Kanten-Ende ω nicht dominiert und sind $R, R' \in \omega$, dann sind R und R' nicht durch endlich viele Ecken trennbar.*

Beweis. Es sei $\omega \in \Omega(G)$ ein nicht-dominiertes Ende. Ferner seien R und R' Strahlen aus ω und \mathcal{P} ein unendliches Wegessystem kantendisjunkter R - R' Wege, deren Endecken auf R bzw. R' paarweise verschieden sind. Wären nun R und R' durch endlich viele Ecken trennbar, dann gäbe es in $\bigcup \mathcal{P}$ eine Ecke unendlichen Grades, die $\omega(R) = \omega(R')$ dominieren würde. □

Damit ist man bereits in der Lage, die Injektivität von f_G zu zeigen:

Satz 3.1. *f_G ist injektiv.*

Beweis. Es seien (U_i) und (U'_i) Folgen, die verschiedenen Freudenthal-Enden von G repräsentieren und R bzw. R' Strahlen, die in jedem U_i bzw. U'_i einen Teilstrahl haben.

Angenommen, es wäre $\omega(R) = \omega(R')$. Zunächst können i und j wegen Lemma 3.1 hinreichend groß gewählt werden, so dass $\overline{U}_i \cap \overline{U}'_j = \emptyset$ gilt. Es kann angenommen werden, dass $R \subseteq U_i$ und $R' \subseteq U'_j$ ist. Lemma 3.6 zusammen mit Lemma 3.7 ergibt die Existenz eines unendlichen Systems \mathcal{P} eckendisjunkter R - R' Wege.

Die Wege aus \mathcal{P} haben eine Ecke in U_i und eine andere Ecke außerhalb von \overline{U}_i , nämlich in U'_j . Da graphentheoretische Wege topologisch zusammenhängend sind, trifft daher jeder Weg aus \mathcal{P} den Rand von U_i .

Es lässt sich jetzt zeigen, dass dann ∂U_i eine offene Überdeckung besitzt, die keine endliche Teilüberdeckung enthält (im Widerspruch dazu, dass ∂U_i kompakt ist):

Liegt $x \in \partial U_i$ im Innern einer Kante e , dann sei $O_x := \mathring{e}$. Ist x eine Ecke, so ist sie von R und R' wegen Lemma 3.6 endlich trennbar, man wähle also als

³Dies heißt nichts anderes, als dass jedes undominierte Kanten-Ende ein Ecken-Ende ist.

O_x eine Basisumgebung von x , die keinen Teilstrahl von R oder R' enthält. Die Familie

$$\mathcal{F} := (O_x)_{x \in \partial U_i}$$

ist dann eine offene Überdeckung des Randes von U_i . Ihre Elemente treffen nur endlich viele der Wege aus dem gewählten Wegesystem ecken-disjunkter R - R' Wege (denn sonst würden sie bereits einen Teilstrahl von R und R' enthalten). Dann kann \mathcal{F} aber keine endliche Teilüberdeckung enthalten, da der Rand jeden Weg aus dem unendlichen System \mathcal{P} trifft. □

Zur Surjektivität

Es soll nun noch gezeigt werden, dass jedes undominierte Kanten-Ende ein Freudenthal-Ende definiert, dass also jedes undominierte Ende im Bild der Funktion f_G liegt.

Der Beweis dafür stützt sich auf zwei Lemmata.

Lemma 3.8. *Sei $\omega \subseteq \Omega(G)$ ein Ende, $\mathcal{R} \subseteq \omega$ ein System kantendisjunkter Strahlen aus ω und $X := \bigcup \mathcal{R}$.*

- a) *Ist $z \in V(G)$ eine Ecke und gibt es in G ein unendliches System kantendisjunkter Wege mit Anfangsecke z und paarweise verschiedener Endecken in $V(X)$, dann dominiert z das Ende ω .*
- b) *Ist R ein Strahl, zu dem es ein unendliches System kantendisjunkter Wege gibt, deren Anfangsecken auf R und Endecken in $V(X)$ liegen und jeweils paarweise verschieden sind, dann ist $R \in \omega$.*

Beweis. Sei $z \in V(G)$ eine Ecke und \mathcal{P} ein unendliches System kantendisjunkter Wege mit Anfangsecke z und paarweise verschiedener Endecken in $V(X)$. Ferner sei $F \subseteq E(G)$ eine beliebige endliche Menge von Kanten. F trifft nur endlich viele Wege aus \mathcal{P} . Sei U die Menge der Endecken von Wegen aus \mathcal{P} , die in derselben Komponente C von $G - F$ wie z liegen. U ist dann unendlich. Liegt eine unendliche Teilmenge U' von U auf einem Strahl $R \in \mathcal{R}$, dann liegt ein Teilstrahl von R in C . Trifft U jeden Strahl aus \mathcal{R} in höchstens endlich vielen Ecken, dann gibt es ein unendliches $U'' \subseteq U$ und zu jedem $u \in U''$ ein $R_u \in \mathcal{R}$, so dass die R_u paarweise verschieden sind. Da die Strahlen aus \mathcal{R} kantendisjunkt sind, trifft F höchstens endlich viele von ihnen, d.h. es gibt ein $R_u \subseteq C$. Insgesamt zeigt dies, dass in beiden Fällen ein Teilstrahl aus $\mathcal{R} \subseteq \omega$ in C liegt. Also dominiert z das Ende ω . Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt. Sei jetzt R ein Strahl in G und \mathcal{P} ein unendliches System kantendisjunkter Wege, deren Anfangsecken auf R und Endecken in $V(X)$ liegen und jeweils paarweise verschieden sind. Erneut sei $F \subseteq E(G)$ eine beliebige endliche Kantenmenge. Sei C die Komponente von $G - F$, die einen Teilstrahl von R enthält. Ist wieder U die Menge der Endecken von Wegen aus \mathcal{P} , die ganz in C liegen, dann ist U unendlich. Wie im ersten Teil folgt jetzt die Existenz eines Strahles

$R' \in \mathcal{R} \subseteq \omega$, der in C liegt. Also ist $R \in \omega$, was den zweiten Teil der Behauptung zeigt. \square

Es ergibt sich ein wichtiges Korrolar:

Korrolar 3.2. *Sei $\omega \in \Omega(G)$ ein nicht-dominiertes Ende, $\mathcal{R} \subseteq \omega$ ein System kantendisjunkter Wege und $X := \bigcup \mathcal{R}$. Dann ist X lokal endlich.*

Beweis. Enthielte bei den gegebenen Voraussetzungen X eine Ecke z unendlichen Grades, so würde Lemma 3.8, angewendet auf z und die unendlich vielen Wege $P_v := zv$, $v \in N_X(z)$, ergeben, dass ω dominiert ist. \square

Das nächste Lemma sagt aus, dass undominierte Enden nicht zu groß sind:

Lemma 3.9. *Ist $\omega \in \Omega(G)$ nicht dominiert und $\mathcal{R} \subseteq \omega$ ein System kantendisjunkter Wege, dann ist \mathcal{R} höchstens abzählbar.*

Beweis. Sei $\omega \in \Omega(G)$ ein nicht-dominiertes Ende und $\mathcal{R} \subseteq \omega$ ein System kantendisjunkter Strahlen aus ω . Ferner sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}$ ein maximales System eckendisjunkter Strahlen in \mathcal{R} . \mathcal{M} ist dann höchstens abzählbar. Denn wäre \mathcal{M} überabzählbar, so kann aus jedem Strahl $R \in \mathcal{M}$ eine Ecke ausgewählt werden. Sei U die Menge dieser Ecken. Da U überabzählbar wäre, ergäbe das Strahl/Stern-Lemma, angewendet auf U und die Komponente von G , in der ω lebt, einen $|U|$ -Stern S mit Zentrum z und Blättern in U . Die Anwendung von Lemma 3.8 auf \mathcal{M} und S ergäbe jetzt, dass ω dominiert wäre, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Aufgrund der Maximalität von \mathcal{M} trifft jeder Strahl aus \mathcal{R} einen Strahl aus \mathcal{M} . Da nach Korrolar 3.2 $\bigcup \mathcal{R}$ lokal endlich ist, wird für einen Strahl $R \in \mathcal{M}$ jede Ecke $v \in R$ von nur endlich vielen Strahlen aus \mathcal{R} getroffen; sei dabei U_v die Menge der Strahlen aus \mathcal{R} , die v treffen. Jetzt ist $\mathcal{R} = \bigcup_{R \in \mathcal{M}} \bigcup_{v \in R} U_v$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar. \square

Nun sind wir in der Position zu zeigen, dass das Bild der Funktion f_G ganz $\Omega'(G)$ ist.

Satz 3.2. *Es ist $\text{im} f_G = \Omega'(G)$.*

Beweis. Die Inklusion $\text{im} f_G \subseteq \Omega'(G)$ ist bereits durch Lemma 3.6 gesichert. Es ist also nur noch $\Omega'(G) \subseteq \text{im} f_G$ zu zeigen. Sei dazu $\omega \in \Omega'(G)$ ein nicht dominiertes Ende und $\mathcal{R} \subseteq \omega$ ein maximales System kantendisjunkter Strahlen aus ω sowie $X := \bigcup \mathcal{R}$. Es ist $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots\}$ nach Lemma 3.9 abzählbar. Zu jedem Strahl $R_i \in \mathcal{R}$ können wir eine Folge von Wegen $P_1^i \subseteq P_2^i \subseteq \dots$ wählen mit $R_i = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} P_j^i$. Es sei dann $X_i := \bigcup_{j \leq i} P_j^i$. Dann ist $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. Da X wegen Korrolar 3.2 lokal endlich und $V(X_i)$ endlich ist, ergibt sich, dass die Menge E_i aller mit Ecken aus X_i inzidenten Kanten aus X ebenfalls endlich

ist. Es sei U_i eine von E_i induzierte basis-offene Menge, die $C(E_i, \omega)$ enthält. Es soll nun gezeigt werden, dass die Folge (U_i) ein Freudenthal-Ende repräsentiert. Klar ist, dass die U_i offen und nicht leer sind. Auch sind sie (topologisch) zusammenhängend, da sie sogar (topologisch) wegzusammenhängend sind. Der Rand ∂U_i ist endlich und damit kompakt. Interessant ist also lediglich die Frage, ob der Schnitt über die Abschlüsse der U_i leer ist.

Angenommen, es ist $Z := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{U}_i \neq \emptyset$. Es gibt dann eine Ecke $z \in Z$. Denn liegt $x \in Z$ im Innern einer Kante $e = vw$ und ist etwa v nicht in einem U_j enthalten, dann ist $e \in E_j$ und w liegt in allen U_i .

Es kann also eine Ecke $z \in Z$ gewählt werden. Ist $Y_i := X - X_i$, dann sei Q_i ein $z - Y_i$ Weg in $G - E_i$. Ein solcher Weg existiert immer wegen $z \in C(E_i, \omega)$ und $Y_i \subseteq C(E_i, \omega)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Wege Q_i sind dann zu X kantendisjunkt. Offenbar ist die Menge U der Endecken der Wege Q_i unendlich, da $\bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i = \emptyset$ ist.

Es kann daher auf U und $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ das Strahl/Stern-Lemma angewendet werden. Liefert das Lemma einen Stern, so würde dies wegen Lemma 3.8 der Tatsache widersprechen, dass ω nicht dominiert ist. Liefert es einen Strahl R , dann wäre dieser zu X kantendisjunkt (da die Wege Q_i zu X kantendisjunkt sind) und wegen Lemma 3.8 wäre $R \in \omega$. Dies würde dann aber der Maximalität von \mathcal{R} widersprechen.

Also repräsentiert (U_i) ein Freudenthal-Ende und da jedes U_i einen Strahl aus ω enthält ist ω auch das Bild von (U_i) unter f_G . □

Dem Beweis von Satz 3.2 entnimmt man noch das

Korrolar 3.3. *Ist ϵ ein Freudenthal-Ende, dann gibt es eine ϵ repräsentierende Folge $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so dass U_i für alle $i \in \mathbb{N}$ basisoffen in G ist.*

Insgesamt ist jetzt die Aussage etabliert, dass mit der Funktion f_G eine natürliche Bijektion zwischen den Freudenthal-Enden und den undominierten Kanten-Enden existiert. Bezeichnet $\mathfrak{C}(G)$ die Menge der Freudenthal-Enden des mit ETOP ausgestatteten Raumes G , dann können wir diese Resultate abschließend in einem Satz zusammenfassen.

Satz 3.3. *Es ist $f_G : \mathfrak{C}(G) \rightarrow \Omega'(G)$ bijektiv.*

3.1.1 ETOP und FETOP

Die Freudenthal-Enden eines topologischen Raumes X werden gemeinhin betrachtet, wenn nach einer Kompaktifizierung von X gesucht wird. Unter gewissen Randbedingungen, zu denen insbesondere gehört, dass X hausdorffsch ist, kann auf X zusammen mit seinen Freudenthal-Enden eine Topologie definiert werden, die eine Kompaktifizierung von X darstellt (vgl. dazu [8]).

Der Raum G mit ETOP ist im allgemeinen nicht hausdorffsch. Daher ist für ihn zusammen mit seinen Freudenthal-Enden die Freudenthal-Topologie zunächst nicht definiert. In diesem Abschnitt soll nun die Topologie FETOP auf G zusammen mit seinen Freudenthal-Enden vorgestellt werden und es wird gezeigt,

dass sie zu ETOP auf G zusammen mit den undominierten Kanten-Enden homöomorph ist. Dabei ist FETOP ganz ähnlich wie die Freudenthal-Topologie definiert.

Ist $K \subseteq G$ ein Kompaktum und $\epsilon(U_i)$ ein Freudenthal-Ende, dann gibt es wegen Lemma 3.2 und dem Zusammenhang der U_i für hinreichend großes i eine Komponente C von $G \setminus K$ mit $U_i \subseteq C$. Offenbar ist diese Komponente unabhängig von der Wahl der repräsentierenden Folge (U_i) . Auch hierfür sagen wir dann, dass ϵ in C *lebt*. Wir schreiben $C(K, \epsilon)$ für C . Ist $x \in G \setminus K$, dann gibt es genau eine (topologische) Komponente C von $G \setminus K$, die x enthält. Hier schreiben wir ebenfalls $C(K, x)$ für C . Ist allgemeiner $z \in (G \setminus K) \cup \mathfrak{C}(G)$, dann sei $\widehat{C}(K, z)$ die Komponente $C(K, z)$ zusammen mit allen darin lebenden (Freudenthal-) Enden.

Satz 3.3 liefert durch $\varphi_G := id_G \cup f_G$ eine natürliche Bijektion zwischen $G \cup \mathfrak{C}(G)$ und \overline{G} . Mit den folgenden beiden Lemmata soll nun gezeigt werden, dass die Mengen der Form $\widehat{C}(K, z)$ für ein kompaktes und abgeschlossenes $K \subseteq G$ und ein $z \in (G \setminus K) \cup \mathfrak{C}(G)$ die Basis einer Topologie auf $G \cup \mathfrak{C}(G)$ definieren, so dass $\varphi_G : G \cup \mathfrak{C}(G) \rightarrow \overline{G}$ zu einem Homöomorphismus wird.⁴

Da in nicht-hausdorffschen Räumen kompakte Teilmengen nicht notwendig abgeschlossen sind, muss hier von K zusätzlich die Abgeschlossenheit gefordert werden, um sicherzustellen, dass $G \setminus K$ offen ist.

Mit den nächsten beiden Lemmata soll die angestrebte Aussage etabliert werden.

Lemma 3.10. *Ist $O \subseteq \overline{G}$ basisoffen, dann gibt es ein kompaktes und abgeschlossenes $K \subseteq G$ und ein $z \in (G \setminus K) \cup \mathfrak{C}(G)$, so dass $\varphi_G^{-1}(O) = \widehat{C}(K, z)$ ist.*

Beweis. Sei $O \subseteq \overline{G}$ basis-offen und $K := \partial O$ der Rand von O . Die Menge K ist dann kompakt und abgeschlossen in G . Ist $O \subseteq e$ für eine Kante $e \in E(G)$, dann ist die Aussage klar, denn in O kann kein Freudenthal-Ende $\epsilon(U_i)$ leben, da jedes U_i eine Ecke enthält.

Es sei also $O \cap V(G) \neq \emptyset$ und $C := O \setminus \Omega'(G)$. C ist dann eine topologische Komponente von $G \setminus K$ in G . Sei nun $\omega \in \Omega'(G)$ ein beliebiges nicht-dominiertes Kanten-Ende. Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\omega \in O \cap \Omega'(G) \Leftrightarrow \varphi_G^{-1}(\omega) \text{ lebt in } O \setminus \Omega'(G).$$

Ist $\omega \in O \cap \Omega'(G)$ und repräsentiert die Folge (U_i) das Ende $\varphi_G^{-1}(\omega)$, dann lebt diese Ende in C , da jedes U_i einen Teilstrahl aus ω enthält. Die Rückrichtung folgt aus demselben Grund.

Ist nun $z \in O$ beliebig, dann ist $\varphi_G^{-1}(O) = \widehat{C}(K, z)$.

□

⁴Typischerweise werden bei der Definition der Freudenthal-Topologie auch Mengen der Form $C(K, z)$ als offen deklariert. Da aber für eine basis-offene Menge $O \subseteq \overline{G}$ die Menge $O \setminus \Omega'(G)$ nicht notwendig offen in \overline{G} sein muss, wäre ein solcher Raum im allgemeinen nicht homöomorph zu \overline{G} .

Lemma 3.11. *Ist $K \subseteq G$ kompakt und abgeschlossen und $z \in (G \setminus K) \cup \mathfrak{E}(G)$, dann ist $\varphi_G(\widehat{C}(K, z))$ offen in \overline{G} .*

Beweis. Sei $K \subseteq G$ kompakt und abgeschlossen und $x \in (G \setminus K) \cup \mathfrak{E}(G)$ sowie $O := \varphi_G(\widehat{C}(K, x))$. Ist $U \subseteq O$ eine in G basis-offene Menge und lebt $\omega \in \Omega'(G)$ in U , dann lebt offenbar das ω zugeordnete Freudenthal-Ende in $C(K, z) \subseteq O$ und ist damit in O enthalten.

Ist $x \in O \cap G$, dann existiert eine basis-offene Umgebung $U \subseteq G$ von x in $G \setminus K$ und da U topologisch zusammenhängend ist, folgt $U \subseteq O$. Ist \widehat{U} die Menge U zusammen mit den darin lebenden undominierten Kanten-Enden, dann ist \widehat{U} eine in \overline{G} basis-offene Umgebung von x und nach dem eingangs Gezeigten folgt $\widehat{U} \subseteq O$.

Ist $\omega \in O \cap \Omega'(G)$, dann können wir eine in G basis-offene Folge (U_i) wählen, die das ω zugeordnete Freudenthal-Ende repräsentiert (Lemma 3.3). Für hinreichend großes i ist dann $U_i \subseteq C(K, z) \subseteq O$ und U_i zusammen mit den darin lebenden undominierten Kanten-Ende wird nach dem schon Gezeigten zu einer offenen Umgebung von ω in O .

□

Insgesamt folgt damit der angekündigte Satz:

Satz 3.4. *Die Mengen der Form $\widehat{C}(K, x)$ bilden für ein in G kompaktes und abgeschlossenes K die Basis einer Topologie auf $G \cup \mathfrak{E}(G)$. Dieser Raum wird durch φ_G homöomorph auf \overline{G} abgebildet.*

3.2 ETOP und Ecken-Enden

Es könnte interessant sein, wie sich ETOP zu Topologien verhält, die auf G und seinen Ecken-Enden definiert sind. In diesem Abschnitt soll eine solche Topologie vorgestellt und mit ETOP verglichen werden. Zuvor wird eine einfache Beziehung zwischen nicht dominierten Kanten-Enden und nicht dominierten Ecken-Enden hergestellt.

Um zwischen Kanten-Enden und Ecken-Enden unterscheiden zu können, sei daran erinnert, dass hier mit $\Omega_V(G)$ die Menge der Ecken-Enden und mit $\Omega_E(G)$ die Menge der Kanten-Enden bezeichnet wird; ferner ist $\Omega'_V(G)$ die Menge der nicht (ecken-) dominierten Ecken-Enden und $\Omega'_E(G)$ die Menge der nicht dominierten Kanten-Enden.⁵

Wir haben bereits gesehen, dass sich Strahlen aus undominierten Kanten-Enden nicht durch endlich viele Ecken trennen lassen (Lemma 3.7), d.h. nicht dominierte Kanten-Enden sind nicht ecken-dominierte Ecken-Enden:

Lemma 3.12. *Es gilt immer $\Omega'_E(G) \subseteq \Omega'_V(G)$, d.h. jedes nicht dominierte Kanten-Ende ist ein nicht (ecken-) dominiertes Ecken-Ende.*

Es kann in Graphen Strahlen geben, die von einer Ecke kanten-dominiert werden, aber nicht ecken-dominiert sind (als Beispiel betrachte man die Strahlen

⁵Eine Diskussion, wie sich Kanten-Enden zu Ecken-Enden verhalten, findet sich in [9].

R_1 und R_2 in Abbildung 1.3). Dieses Phänomen kann jedoch nicht auftreten, wenn der Graph keine zwei äquivalente Ecken enthält, d.h. es gilt:

Lemma 3.13. *Sind in G keine zwei Ecken äquivalent, dann gilt auch $\Omega'_V(G) \subseteq \Omega'_E(G)$, d.h. ein nicht-eckendominiertes Ecken-Ende ist in diesem Fall auch nicht kanten-dominiert.*

Beweis. Sei G ein Graph, in dem keine zwei Ecken äquivalent sind und $R \subseteq G$ ein Strahl, der von einer Ecke $v \in V(G)$ kanten-dominiert wird.

Angenommen, v würde R nicht ecken-dominieren. Dann gibt es ein endliches $S \subseteq V(G) \setminus \{v\}$, das v von R trennt. Da in G keine zwei Ecken äquivalent sind, findet man ein endliches $F \subseteq E(G)$, das v von S trennt. Dann trennt aber F die Ecke v von R , im Widerspruch zu der Annahme, dass v den Strahl R kanten-dominiert.

□

Als Folgerung erhält man nun, dass in Graphen, die keine zwei äquivalenten Ecken enthalten, die nicht dominierten Kanten-Enden genau die nicht ecken-dominierten Ecken-Enden sind.

Korrolar 3.4. *Sind in G keine zwei Ecken (kanten-) äquivalent, dann gilt $\Omega'_V(G) = \Omega'_E(G)$, d.h. die nicht dominierten Kanten-Enden sind in diesem Fall genau die nicht-eckendominierten Ecken-Enden.*

Selbst in Graphen, die keine zwei äquivalenten Ecken enthalten, kann ein dominiertes Kanten-Ende mehrere Ecken-Enden enthalten (als Beispiel betrachte man dazu Abbildung 3.1). Da in diesen Graphen aber kein Ecken-Ende von

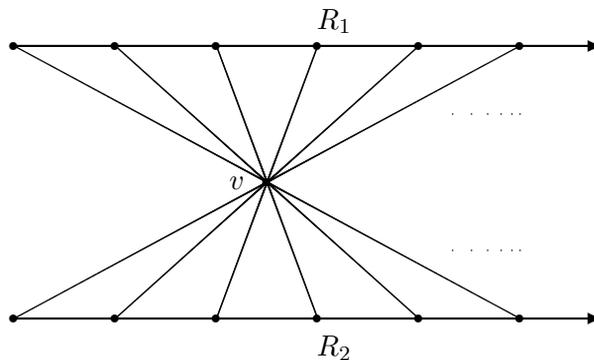


Abbildung 3.1: Die Strahlen R_1 und R_2 repräsentieren ein Kanten-Ende, aber zwei Ecken-Enden.

mehr als einer Ecke dominiert wird, bietet sich hier generell die Strategie an, eine Ecke v mit den Ecken-Enden Ω_v , die es dominiert, zu identifizieren. Unabhängig

davon, welche Topologie auf $G \cup \Omega_V(G)$ definiert ist, ergibt dies eine Äquivalenzrelation auf dieser Menge, die mit \sim_I bezeichnet werde. $G \cup \Omega'_V(G)$ ist dann immer ein Repräsentantensystem des entsprechenden Quotientenraumes. Und da für die Graphen, die keine zwei äquivalente Ecken enthalten, $\Omega'_V(G) = \Omega'_E(G)$ gilt, können wir nach einem Zusammenhang von G zusammen mit seinen undominierten Kanten-Enden und ETOP suchen.

Soll auf $G \cup \Omega_V(G)$ eine Topologie definiert werden, die in einer engen Beziehung zu ETOP steht, so sollte sie die Eigenschaft von ETOP respektieren, dass unter ETOP jede Umgebung U einer Ecke v unendlichen Grades fast alle Nachbarn von v enthält. Dies ist beispielsweise der Grund, warum ETOP nicht homöomorph zu einer Quotiententopologie auf TOP wie ITOP sein kann.⁶ Die folgende Topologie respektiert diese Eigenschaft und es wird sich zeigen, dass ihr Quotientenraum bezüglich \sim_I für Graphen, die keine zwei äquivalenten Ecken enthalten, homöomorph zu ETOP auf $G \cup \Omega'_E(G) = \overline{G}$ ist.

Legen wir auf $G \cup \Omega_V(G)$ die Topologie TOP zu Grunde, so können wir zu der größeren Topologie PTOP übergehen.⁷ Dabei ist PTOP wie folgt definiert: Als basisoffen werden alle topologischen Komponenten von $|G|_{TOP} \setminus P$ deklariert für eine endliche Menge von Punkten $P \subseteq G = V(G) \cup \dot{E}(G)$. Der entsprechende topologische Raum wird dann auch mit $|G|_{PTOP}$ bezeichnet.

Offenbar induziert PTOP auf Kanteninnern dieselbe Topologie wie ETOP (oder TOP). Und die Tatsache, dass bei der Definition der basis-offenen Mengen von einer endlichen Punktmenge P ausgegangen wird, lässt einen Zusammenhang mit ETOP vermuten. Man beachte aber, dass ein solches P auch Ecken enthalten kann. Dies führt beispielsweise dazu, dass es unter PTOP zu äquivalente Ecken $x, y \in V(G)$ Umgebungen O_x von x und O_y von y gibt, so das x nicht in O_y und y nicht in O_x enthalten ist. Auch besitzt ein Ende $\omega \in \Omega_V(G)$, das von einer Ecke $v \in V(G)$ dominiert wird, eine Umgebung, die v nicht enthält.

Dies lässt es naheliegend erscheinen, eine enge Beziehung zu ETOP nur für Graphen zu vermuten, die keine zwei äquivalenten Ecken enthalten.

Es kann jetzt via \sim_I zur entsprechenden Quotiententopologie übergegangen werden. Es gilt hier die Homöomorphie

$$|G|_{PTOP} / \sim_I \cong \overline{G} .$$

Um dies einzuehen, bedarf es eines einfachen Lemmas. Es zeigt, dass sich die topologischen Komponenten von $|G| \setminus P$ für ein endliches $P \subseteq G$ im Wesentlichen als graphentheoretische Komponenten zusammen mit den darin lebenden (Ecken-) Enden verstehen lassen.⁸

⁶Die Topologie ITOP ist dabei gerade die Quotiententopologie \sim_I für TOP, unter der Voraussetzung, dass kein (Ecken-) Ende von mehr als einer Ecke (ecken-) dominiert wird; vgl. dazu [5].

⁷Die Topologie PTOP geht auf A. Brower zurück.

⁸Wieder *lebe* für ein endliches $S \subseteq V(G)$ ein Ecken-Ende ω in einer Komponente C von $G - S$, wenn C einen Strahl aus ω enthält.

Lemma 3.14. *Sei $P \subseteq G$ eine endliche Punktmenge, $X_1 := P \cap V(G)$ und $X_2 := \{e \in E(G) \mid e \cap P \neq \emptyset\}$ sowie $X := X_1 \cup X_2$. Ist dann C_{top} eine topologische Komponente von $|G|_{TOP} \setminus P$, die mindestens eine Ecke enthält, dann gibt es eine graphentheoretische Komponente C von $G - X$, so dass C_{top} gleich der Komponente C zusammen mit den darin lebenden (Ecken-) Enden und halboffenen Kantenstücken $[v, w)$ mit $v \in C$ ist.*

Beweis. Sei also $P \subseteq G$ eine endliche Punktmenge, C_{top} eine topologische Komponenten von $|G|_{TOP} \setminus P$, die mindestens eine Ecke v enthält. Ist dann X wie im Lemma definiert, dann sei C diejenige Komponente von $G - X$, die v enthält und \widehat{C}_* die Komponente C zusammen mit allen darin lebenden (Ecken-) Enden und allen Kantenstücken $[v, w)$ mit $v \in C$, $w \in P$ und $[v, w) \cap P = \emptyset$.

Da \widehat{C}_* topologisch zusammenhängend ist und $\widehat{C}_* \cap P = \emptyset$ gilt, ist $\widehat{C}_* \subseteq C_{top}$.

Es gilt aber auch $C_{top} \subseteq \widehat{C}_*$, da sowohl \widehat{C}_* als auch analog definierte \widehat{C}'_* (für weitere Komponenten C' von $G - X$) und Kantenstückchen (x, y) mit $x, y \in P$ offen in $|G|_{TOP}$ sind. Deshalb würde $C_{top} \not\subseteq \widehat{C}_*$ dem Zusammenhang von C_{top} widersprechen. Insgesamt zeigt dies die Behauptung. \square

Damit lässt sich jetzt die eingangs formulierte Behauptung zeigen.

Satz 3.5. *Es sei G ein Graph, der keine zwei äquivalenten Ecken enthält. Dann gilt:*

$$|G|_{PTOP}/\sim_I \cong \overline{G}.$$

Beweis. Da $G \cup \Omega'_V(G)$ ein Repräsentantensystem von $|G \cup \Omega_V(G)|_{PTOP}/\sim_I$ ist und aus der Voraussetzung an G die Gleichheit $\Omega'_V(G) = \Omega'_E(G)$ folgt, sind die beiden Räumen einander in natürlicher Weise bijektiv zugeordnet und wir brauchen ihre Elemente formal nicht zu unterscheiden.

Ist $O \subseteq \overline{G}$ basis-offen, dann ist O offenbar auch offen unter $PTOP/\sim_I$, da für eine dominierenden Ecke $v \in O$ das von v dominierte Ende in O lebt.

Ist umgekehrt $O \subseteq |G|_{PTOP}/\sim_I$ offen und $x \in O$, dann gibt es eine unter ETOP basis-offene Umgebung von x in O . Liegt x im Innern einer Kante, dann ist diese Aussage klar. Ansonsten wählt man eine unter $PTOP$ basisoffene und von einem endlichen $P \subseteq G$ induzierte Umgebung U von x in $\bigcup O$. Betrachtet man als F alle Kanten, die einen Punkt aus P enthalten zusammen mit einem endlichen Kantentrenner, der x von allen Ecken aus P abtrennt (was möglich ist, da in G keine zwei Ecken äquivalent sind), dann induziert dies eine in \overline{G} offene Umgebung von x in O . \square

Kapitel 4

Homologie

In diesem Kapitel sollen nun die grundlegenden Aussagen über den Zyklenraum, wie sie in THEOREM 1.1 bezüglich lokal-endlicher Graphen formuliert wurden, auch auf nicht lokal-endliche Graphen erweitert werden. Dabei spielen topologische Spann­bäume eine zentrale Rolle. Nach einer kurzen Zusammenstellung grundlegender Tatsachen über topologische Wege und Kreise wird es daher zunächst vor allem darum gehen, das Existenzproblem für topologische Spann­bäume zu lösen. Es zeigt sich, dass sie (für zusammenhängendes G) immer existieren.

Enthält ein Graph G keine zwei äquivalente Ecken, so ist es eine interessante Frage, ob es einen topologischen Spannbaum von $|G|$ geben kann, dessen Schnitt mit G graphentheoretisch zusammenhängend ist. Relativ schnell sieht man, dass ein solcher topologischer Spannbaum gerade der Abschluss eines Ω' -treuen Spannbaums von G sein muss. Bereits bei der Diskussion der Metrisierbarkeit (Abschnitt 2.2) von $|G|$ hatten wir gesehen, dass diese Spann­bäume in dem hier interessierenden Fall immer existieren. Dies ermöglicht nebenbei mit Hilfe der Einbettung des Quotientenraums $|G|/\sim$ in den Ausgangsraum $|G|$ einen unabhängigen zweiten Beweis dafür, dass es für $|G|$ immer einen topologischen Spannbaum gibt. Denn es zeigt sich, dass topologische Spann­bäume für den Quotientengraphen in einfacher Weise einen topologischen Spannbaum im Ausgangsgraphen induzieren.

Im Schlussabschnitt werden dann die erzielten Ergebnisse zusammengeführt. Dabei kann gezeigt werden, dass die Elemente des Zyklenraums genau diejenigen sind, die jeden endlichen Schnitt in einer geraden Anzahl von Kanten treffen. Ferner erzeugen sowohl die Fundamentalkreise eines topologischen Spannbaums als auch die endlichen Kreise den Zyklenraum. Schließlich lässt sich auch jedes Element des Zyklenraums als disjunkte Vereinigung von Kreisen darstellen.

4.1 Topologische Wege und Kreise: Grundlegende Tatsachen

In diesem Abschnitt soll es darum gehen, einige grundlegende Tatsachen über topologische Wege und Kreise in dem mit ETOP versehenen Raum $|G|$ bereitzustellen. Sie werden in dem nachfolgenden Aufbau der Homologie dieses Raumes

immer wieder benötigt.

Ist X ein topologischer Raum, dann heie eine Menge $P \subseteq X$ ein *topologischer Weg*, wenn P ein stetiges Bild des Einheitsintervalls $[0, 1]$ ist. Ein homöomorphes Bild $A \subseteq X$ des Einheitsintervalls heißt ein *Bogen* und ein homöomorphes Bild $C \subseteq X$ der Einheitssphäre S^1 ein *topologischer Kreis*. Man überlegt sich leicht, dass graphentheoretische Wege P im Graphen G auch topologische Wege im Raum $|G|$ sind. Gleiches gilt auch fur Strahlen $R \cup \omega(R)$ zusammen mit dem Ende, das sie enthält. Aber ein topologischer Weg in $|G|$ muss nicht immer einen Bogen zwischen seinen Endelementen enthalten. In diesem Abschnitt soll daher bestimmt werden, wann ein topologischer Weg einen Bogen zwischen seinen Endecken enthält.

Ein Bogen A ist als homöomorphes Bild des Einheitsintervalls ein hausdorffscher Unterraum von $|G|$. Er kann also nicht zwei quivalente Ecken oder eine dominierende Ecke v zusammen mit einem von v dominierten Ende enthalten, da diese Paare in $|G|$ dieselben Umgebungen haben.

Da auch ein topologischer Kreis als homöomorphes Bild der Einheitssphäre S^1 hausdorffsch ist, greift hier dieselbe Überlegung.

Beides soll in der folgenden Bemerkung festgehalten werden.

Bemerkung 4.1. *Ist A ein Bogen und C ein (topologischer) Kreis in $|G|$, dann enthalten weder A noch C zwei quivalenten Ecken oder ein dominiertes Ende $\omega \in \Omega(G)$ zusammen mit einer ω dominierenden Ecke.*

Diese Bemerkung zeigt auch, dass einige graphentheoretische Wege $P \subseteq G$, aufgefasst als Unterräume von $|G|$, keine Bogen sein konnen, nämlich dann nicht, wenn P zwei quivalente Ecken enthält. Genauso kann auch ein Strahl $R \cup \omega(R)$ kein Bogen sein, wenn eine Ecke auf R das Ende $\omega(R)$ dominiert.

Umgekehrt überlegt man sich leicht, dass ein Weg $P = x_1 \cdots x_n$ in naturlicher Weise ein Bogen ist, wenn die Ecken x_i paarweise inäquivalent sind. Und ein Strahl $R = x_1 x_2 \cdots$ ist zusammen mit $\omega(R)$ bereits ein Bogen, wenn die Ecken auf R paarweise inäquivalent sind und keine dieser Ecken das Ende $\omega(R)$ dominiert.

Das folgenden Lemma zeigt, dass sich Bogen zwischen Elementen aus $V(G) \cup \Omega(G)$ lokal nicht unerwartet verhalten: mit einem Element aus dem Innern einer Kante e enthalten sie bereits ganz \mathring{e} . Und ist $e = xy$, dann enthalten sie mit \mathring{e} zumindest ein Element aus \tilde{x} oder ein von x ggf. dominiertes Ende.

Daraus kann dann auch geschlossen werden, dass solche Bogen zumindest das Innere einer Kante enthalten.

Lemma 4.1. *Ist A ein x - y Bogen in $|G|$, $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$, dann gilt:*

- (i) *Ist $e \in E(G)$ eine Kante mit $\dot{e} \cap A \neq \emptyset$, dann ist bereits $\dot{e} \subseteq A$.*
- (ii) *A enthält das Innere von mindestens einer Kante.*
- (iii) *Ist $e \in E(G)$ eine Kante mit $\dot{e} \subseteq A$ und x eine Endecke von e , dann ist $\bar{x} \cap A \neq \emptyset$.¹*
- (iv) *Ist e eine Kante, deren Endecken äquivalent sind, dann ist $\dot{e} \cap A = \emptyset$.*
- (v) *Ist $e = xy$ eine Kante mit $\dot{e} \subseteq A$, dann enthält A nicht das Innere einer weiteren \tilde{x} - \tilde{y} Kante.*

Beweis. Sei also A ein x - y Bogen in $|G|$, $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ und $\psi : [0, 1] \rightarrow A$ ein entsprechender Homöomorphismus.

ad (i): Man kann zeigen, dass für eine Kante $e \in E(G)$ und ein $y \in \dot{e}$ mit $y \notin A$ zunächst aufgrund der Stetigkeit von ψ die Existenz einer offenen Umgebung U von y mit $U \cap A = \emptyset$ folgt. Die Injektivität von ψ ergibt dann weiter, dass dann sogar $\dot{e} \cap A = \emptyset$ gelten muss. Da dies einfache topologische Argumente sind, seien sie hier nicht vollständig vorgeführt.

ad (ii): Da x und y aufgrund von Bemerkung 4.1 durch ein endliches $F \subseteq E(G)$ getrennt werden, muss es ein $e \in F$ geben mit $\dot{e} \cap A \neq \emptyset$, da sonst F zwei disjunkte und nicht-leere offene Umgebungen O_x und O_y von x bzw. von y induzieren würde mit $A \subseteq O_x \cup O_y$, was einen Widerspruch zum Zusammenhang von A darstellen würde.

ad (iii): Es sei $e = [x, y]$ ein Kante mit $\dot{e} = (x, y) \subseteq A$. Man wähle dann eine (in $[x, y]$) gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (x, y) und betrachte dazu die Folge $y_n := \psi^{-1}(x_n)$ der Urbilder unter ψ . Da das Intervall $[0, 1]$ kompakt ist, hat die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungs $h \in [0, 1]$. Wäre nun $z := \psi(h) \notin \bar{x}$, dann gibt es zwei disjunkte offene Umgebungen O_z und O_x von z bzw. x in $|G|$. Offenbar enthält dann O_x für fast alle $n \in \mathbb{N}$ die Elemente x_n . Damit wäre $\psi^{-1}(O_z)$ eine offene Umgebung von h , die nur für endlich viele n die Elemente y_n enthält, im Widerspruch dazu, dass h Häufungspunkt dieser Folge ist.

ad (iv): Es sei $e = xy$ eine Kante, deren Endecken äquivalent sind. Angenommen, es wäre $\dot{e} \cap A \neq \emptyset$. Dann ist nach (i) $\dot{e} \subseteq A$. Nach (iii) gibt es dann ein $x_0 \in A$ mit $x_0 \in \tilde{x} = \tilde{y}$. Sei $\psi : [0, 1] \rightarrow A$ ein geeigneter Homöomorphismus. Es ist dann $\psi^{-1}(\dot{e}) = (a, b) \subseteq [0, 1]$ ein Intervall. Es ist weiter $\psi^{-1}(x_0) = a$ oder $\psi^{-1}(x_0) = b$. Es kann der erste Fall angenommen werden. Wie im Beweis von (iii) zeigt man dann, dass auch $\psi(b)$ zu x und y äquivalent ist im Widerspruch dazu, dass A keine zwei äquivalente Elemente enthält (Bemerkung 4.1).

ad (v): Angenommen, es gäbe zwei \tilde{x} - \tilde{y} Kanten $e_1 = x_1y_1$ und $e_2 = x_2y_2$ mit $\dot{e}_1 \subseteq A$ und $\dot{e}_2 \subseteq A$ ($x_1, x_2 \in \tilde{x}$, $y_1, y_2 \in \tilde{y}$). Ist dann $\psi : [0, 1] \rightarrow A$ ein geeigneter Homöomorphismus, dann sind $\psi^{-1}(\dot{e}_1) = (a_1, b_1)$ und $\psi^{-1}(\dot{e}_2) = (a_2, b_2)$ zwei disjunkte offene Intervalle in $[0, 1]$. Wieder wie im Beweis von (iii) folgt, dass $\psi(a_i)$ und $\psi(b_i)$, $i = 1, 2$, mit x oder y äquivalent sind. Dann würde A aber

¹Zur Erinnerung: \bar{x} ist die Klasse der mit x äquivalenten Elemente aus $V(G) \cup \Omega(G)$.

mindestens zwei äquivalente Ecken enthalten mit Widerspruch. □

Ein Analogon dieses Lemmas gilt auch für topologische Kreise in Bezug auf die Aussagen (i) bis (iii) (die anderen beiden Aussagen gelten nicht für Kreise; sie können vielmehr als Spezialfall der Tatsache interpretiert werden, dass ein Bogen keinen Kreis enthält). Da sich dieses Lemma auf ganz ähnliche Weise ergibt, kann auf seinen Beweis verzichtet werden.

Lemma 4.2. *Ist C ein Kreis in $|G|$, dann gilt:*

- (i) *Ist $e \in E(G)$ eine Kante mit $\mathring{e} \cap C \neq \emptyset$, dann ist bereits $\mathring{e} \subseteq C$.*
- (ii) *C enthält das Innere von mindestens einer Kante.*
- (iii) *Ist $e \in E(G)$ eine Kante mit $\mathring{e} \subseteq C$ und x eine Endecke von e , dann ist $\bar{x} \cap C \neq \emptyset$.*

Es ist eine interessante Frage, wann topologische Wege zwischen zwei Elementen x und y eines topologischen Raumes X einen x - y Bogen enthalten. Normalerweise regelt dies das folgende grundlegende topologische Lemma.²

Lemma 4.3. *Jeder topologische Weg zwischen zwei verschiedenen Elementen x und y in einem Hausdorff-Raum X enthält einen x - y Bogen.*

Nun ist der Raum $|G|$ im Allgemeinen aber nicht hausdorffsch. Und Lemma 4.3 kann auch nicht uneingeschränkt für $|G|$ gelten, wenn $|G|$ nicht hausdorffsch ist. Seien beispielsweise x und y zwei (verschiedene) äquivalente Ecken in G und P ein graphentheoretischer x - y Weg. Dann induziert P einen topologischen x - y Weg. Aber P kann keinen x - y Bogen enthalten (Bemerkung 4.1).

Interessanterweise kann man aber Lemma 4.3 benutzen, um zu zeigen, dass ein topologischer x - y Weg P in $|G|$ bereits dann einen x - y Bogen enthält, wenn die Elemente x und y nicht äquivalent sind (bzgl. der Äquivalenzrelation – auf $V(G) \cup \Omega(G)$).

Als Beweisstrategie bietet es sich an, den Raum $|G|$ hausdorffsch zu machen, indem die in $|G|$ nicht trennbaren Elemente heraus faktorisiert werden. Denn interessanterweise ist Nicht-Trennbarkeit in $|G|$ eine Äquivalenzrelation, nämlich gerade die bekannte Äquivalenzrelation –, die äquivalente Ecken zusammen mit einem ggf. von ihnen dominierten Ende identifiziert. Auf den entsprechenden Quotientenraum könnte so Lemma 4.3 angewandt werden. Es bedarf dann noch eines Lemmas, das es uns ermöglicht, einen im Quotientenraum gefundenen Bogen wieder auf $|G|$ zurück zu übertragen.

Es ist leicht zu sehen, dass der Quotientenraum $|G|/_-$ tatsächlich hausdorffsch ist:

²Es findet sich beispielsweise in [10, p. 208].

Lemma 4.4. $|G|/_-$ ist hausdorfsch.

Beweis. Es sei $\pi : |G| \rightarrow |G|/_-$ die kanonische Projektion sowie \bar{x} und \bar{y} zwei verschiedene Elemente des Quotientenraumes. Dann gibt es in $|G|$ disjunkte offene Umgebungen O_x und O_y von x bzw. y . Da O_x und O_y unter Äquivalenz abgeschlossen sind, ist zunächst $\pi(O_x) \cap \pi(O_y) = \emptyset$. Da dann $\pi^{-1}(\pi(O_x)) = O_x$ und $\pi^{-1}(\pi(O_y)) = O_y$ ist, sind $\pi(O_x)$ und $\pi(O_y)$ auch offen. □

Das nächste Lemma hilft uns, Bögen im Quotientenraum wie gewünscht auf $|G|$ zurück zu übertragen. Es kann wesentlich allgemeiner formuliert werden.

Lemma 4.5. *Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum; man definiere für $x, y \in X$ eine Äquivalenzrelation:*

$$x \sim y :\Leftrightarrow (\forall O \in \mathcal{O} : x \in O \Leftrightarrow y \in O).$$

Sei $f : X/\sim \rightarrow X$ eine Funktion, die aus jedem $y \in X/\sim$ einen Repräsentanten auswählt. Dann ist f eine Einbettung des Quotientenraums X/\sim in den Ausgangsraum X .

Beweis. Sei also (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und die Äquivalenzrelation \sim definiert wie im Lemma (dabei sei wieder π die kanonische Projektion). Ferner wähle die Funktion $f : X/\sim \rightarrow X$ einen Repräsentanten aus jedem $y \in X/\sim$ aus.

Offenbar ist f injektiv.

Für eine offene Menge $O \subseteq X$ gilt die Gleichheit $f^{-1}(O) = \pi(O)$ und nach Definition der Äquivalenzrelation auch $\pi^{-1}(\pi(O)) = O$. Also ist f auch stetig. Sei jetzt \tilde{O} eine offene Menge in X/\sim . Dies ist gleichbedeutend damit, dass $\pi^{-1}(\tilde{O})$ offen in X ist. Damit ist $f(\tilde{O}) = \text{im } f \cap \pi^{-1}(\tilde{O})$ offen in $\text{im } f$. □

Damit jetzt zur eigentlichen Aussage:

Lemma 4.6. *Ist $P \subseteq |G|$ ein (topologischer) x - y -Weg zwischen zwei nicht äquivalenten Elementen aus $V(G) \cup \Omega(G)$, dann enthält P einen x - y Bogen.*

Beweis. Es sei $P \subseteq |G|$ ein (topologischer) x - y -Weg zwischen zwei nicht äquivalenten Elementen aus $G \cup \Omega(G)$ und wieder $\pi : |G| \rightarrow |G|/_-$ die kanonische Projektion. Dann sind $\pi(x) = \bar{x}$ und $\pi(y) = \bar{y}$ zwei verschiedene Elemente in $|G|/_-$ und $\pi(P)$ ist offenbar ein \bar{x} - \bar{y} Weg im Quotientenraum. Da dieser wegen Lemma 4.4 hausdorfsch ist, gibt es nach Lemma 4.3 einen \bar{x} - \bar{y} Bogen $A \subseteq \pi(P)$ im Quotientenraum.

Sei jetzt f eine Funktion wie in Lemma 4.5 mit $f(\bar{x}) = x$ und $f(\bar{y}) = y$, die ferner immer ein $z \in P$ auswählt, falls $\bar{z} \cap P \neq \emptyset$ ist. Da die Äquivalenzrelation – gerade die Äquivalenzrelation aus Lemma 4.5 (mit $X = |G|$) ist, ergibt $f(A) \subseteq P$ nach diesem Lemma den gewünschten x - y Bogen in $|G|$. □

Da Bögen in $|G|$ durch Enden laufen können, ist es ihnen im Gegensatz zu graphentheoretischen Wegen möglich, Schnitte des Graphen zu überspringen. Das nächste Lemma beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Bedingungen dies möglich ist. Es ist eine Variante eines Lemmas für die Topologie TOP, das DIESTEL in [4] gibt.

Lemma 4.7. *Es sei $F = E(X, Y)$ ein Schnitt in einem zusammenhängenden Graphen G . Dann gilt:*

(i) *Fist unendlich $\Leftrightarrow \overline{X} \cap \overline{Y} \neq \emptyset$.*

(ii) *Fist endlich \Rightarrow Es gibt keinen \overline{X} - \overline{Y} Bogen, der F überspringt.*

Nehmen wir zusätzlich an, dass X und Y zusammenhängend und abgeschlossen unter Äquivalenz (bzgl. $V(G)$) sind, dann gilt ferner:

(iii) *Fist unendlich \Rightarrow Es gibt einen X - Y Bogen, der F überspringt.*

Beweis. Sei $F = E(X, Y)$ ein Schnitt in einem zusammenhängenden Graphen G .

ad (i): Es wird zuerst die Implikation " \Rightarrow " gezeigt. Sei dazu F unendlich und $V(F)$ die Menge der Enden von Kanten aus F . Es ist dann entweder $V(F) \cap X$ oder $V(F) \cap Y$ unendlich. Wir können annehmen, dass $U := V(F) \cap X$ unendlich ist. Man wende auf U und G das Strahl/Stern-Lemma an. Ergibt es einen Strahl R , dann sei $z := \omega(R)$. Ergibt es einen Stern S , dann sei z das Zentrum von S . Offenbar trifft in beiden Fällen jede Umgebung von z sowohl X als auch Y , d.h. $z \in \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Sei jetzt F endlich. Offenbar induziert F dann disjunkte offene Umgebungen von \overline{X} und \overline{Y} , d.h. es ist $\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset$.

ad (ii): Es sei F endlich. Die Menge F induziert dann zwei disjunkte Umgebungen O_X und O_Y von \overline{X} bzw. \overline{Y} . Für einen Bogen A in $G - F$ muss also aufgrund des Zusammenhangs von A entweder $A \subseteq O_X$ oder $A \subseteq O_Y$ gelten.

ad (iii): Seien jetzt X und Y zusammenhängend und abgeschlossen unter Äquivalenz (auf $V(G)$). Ferner sei F unendlich. Wir können dann wieder annehmen, dass der Schnitt $U := X \cap V(F)$ unendlich ist. Es kann nun zunächst auf U und X das Strahl/Stern-Lemma angewendet werden. Dies ergibt entweder einen Strahl $R_X \subseteq X$ oder einen Stern $S_X \subseteq X$ mit Zentrum $x \in X$. In beiden Fällen ist die Menge $U' \subseteq U$ der Blätter von R_X oder der Blätter von S_X unendlich. Sei $F' \subseteq F$ die Menge der mit Ecken aus U' inzidenten Kanten aus F .

Ist der Schnitt $V(F') \cap Y$ endlich, dann gibt es eine Ecke $y \in Y$, die unendlich viele Kanten in U' schickt. Da Y abgeschlossen unter Äquivalenz ist, kann es in X nicht den Stern S_X , sondern nur den Strahl R_X geben. Dieser wird dann offenbar von y dominiert. Sei in diesem Fall $P := R_X \cup \{y\}$.

Ist der Schnitt $U'' := V(F') \cap Y$ unendlich, dann wende man auf U'' und Y das Strahl/Stern-Lemma an. Dies ergibt entweder einen Strahl $R_Y \subseteq Y$ oder einen Stern $S_Y \subseteq Y$ mit Zentrum $y \in Y$. Aufgrund der Abgeschlossenheit unter Äquivalenz kann es nicht sein, dass S_X und S_Y beide vorkommen.

Existieren beide Strahlen R_X und R_Y , dann sind sie offenbar äquivalent, d.h. es ist $\omega(R_X) = \omega(R_Y)$. Es sei dann $P := R_X \cup \omega(R_X) \cup R_Y$.

Existiert der Stern S_X mit x in X , dann dominiert die Ecke x offenbar den Strahl R_Y und es sei $P := R_Y \cup \{x\}$. Im analogen Fall sei $P := R_X \cup \{y\}$. In allen Fällen ist P offenbar ein topologischer X - Y Weg, der aufgrund der Abgeschlossenheit von X und Y unter Äquivalenz nach Lemma 4.6 einen X - Y Bogen enthält, der den (unendlichen) Schnitt F wegen $P \cap \overset{\circ}{F} = \emptyset$ überspringt. \square

4.2 Definition und erste Eigenschaften topologischer Spannbäume

An dieser Stelle wird der Begriff eines topologischen Spannbauums für den Raum $|G|$ vorgestellt. Daran anschließend können dann die Fundamentalschnitte und Fundamentalkreise eines topologischen Spannbauums definiert werden.

Topologische Spannbäume sind als eine Erweiterung graphentheoretischer Spannbäume konzipiert. Sie sollen dieselbe Rolle für den Aufbau des Zyklenraums spielen wie graphentheoretisch Spannbäume für den Zyklenraum endlicher Graphen.³

Ein Unterraum $H \subseteq |G|$ heißt ein *Standardunterraum* von $|G|$, wenn für jede Kante $e \in E(G)$ bereits $e \subseteq H$ daraus folgt, dass H einen inneren Punkt $p \in \overset{\circ}{e}$ enthält. Nun heiÙe ein Unterraum $T \subseteq |G|$ ein *topologischer Spannbauum* von $|G|$, wenn für T gilt:

- (i) T ist ein Standardunterraum von $|G|$.
- (ii) Es gilt $T \supseteq V(G) \cup \Omega(G)$, d.h. T enthält alle Ecken und Enden von G .
- (iii) Zu je zwei Elementen $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ enthält T einen topologischen x - y Weg.
- (iv) T enthält keinen topologischen Kreis.

Die Bedingung (iii) lässt sich auch in einfacher Weise im Rekurs auf Bögen formulieren. Dafür zieht man zunächst in Betracht, dass nach Lemma 4.6 ein x - y Weg P zwischen zwei nicht-äquivalenten Elementen $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ immer einen x - y Bogen enthält. Andererseits gibt es zwischen zwei äquivalenten Elementen $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ immer einen trivialen topologischen Weg, da äquivalente Elemente genau dieselben Umgebungen in $|G|$ haben:

Bemerkung 4.2. Sind $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ äquivalent, dann ist jede Abbildung $\varphi : [0, 1] \rightarrow \{x, y\}$ stetig.

Beides zusammen genommen zeigt, dass die Bedingung (iii) äquivalent ist dazu, dass T zwischen zwei nicht-äquivalenten Elementen $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ immer einen x - y Bogen enthält. Im Folgenden wird daher zwischen diesen beiden äquivalenten Varianten topologischer Spannbäume zu definieren nicht mehr

³Dies wird motiviert in [2]. Hieraus sind auch die entsprechenden Begrifflichkeiten entnommen. Sie finden sich auch in [4].

unterschieden und in der jeweiliger Situation von der einen oder der anderen Gebrauch gemacht (als Beispiel für einen topologischen Spannbaum betrachte man Abbildung 4.1).

Ein topologischer Spannbaum kann zwischen zwei äquivalenten Ecken $x, y \in G$ nicht die Kante $e = xy$ enthalten, da \hat{e} zusammen mit x oder y bereits ein Kreis in T wäre.

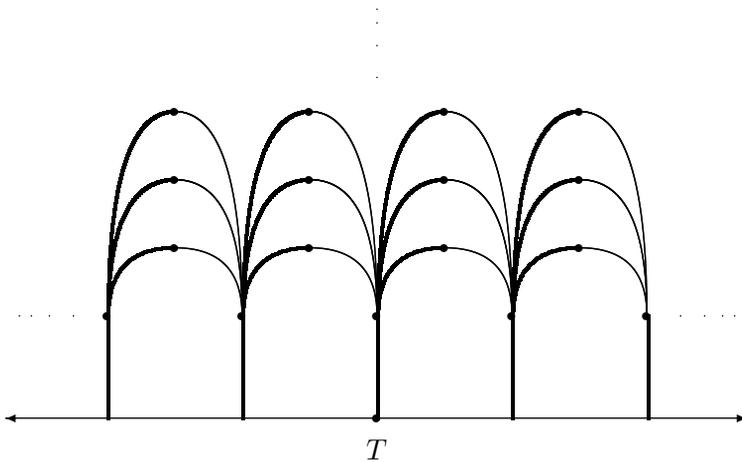


Abbildung 4.1: Ein topologischer Spannbaum T (fett) für den Graphen aus Abbildung 1.3

Es kann allgemeiner zwischen zwei äquivalenten Ecken x, y in T keinen graphentheoretischen Weg geben, da ein solcher einen Kreis enthielte. Daraus ergibt sich, dass es für Graphen, die zwei äquivalente Ecken enthalten, keinen Spannbaum geben kann, dessen Schnitt mit G graphentheoretisch zusammenhängend ist. Enthält G jedoch keine zwei äquivalente Ecken, so ist die Frage, ob es einen solchen Spannbaum gibt, ein interessantes Problem. Es wird in Abschnitt 4.5 behandelt.

Von graphentheoretischen Spannbäumen weiß man, dass sie zwischen zwei Ecken genau einen Weg enthalten. Das topologische Analogon dieser Aussage wäre, dass ein topologischer Spannbaum zwischen zwei Elementen $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ genau einen Bogen enthält. Dies ist jedoch nicht ganz richtig, da für einen Bogen A und äquivalente Elemente $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ auch $(A \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ ein Bogen ist, falls $x \in A$ ist. Aber man hat eine leicht abgeschwächte Aussage:

Lemma 4.8. *Sei T ein topologischer Spannbaum von $|G|$ und $A \subseteq T$ ein x - y Bogen in T , $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$. Dann stimmt jeder weitere x - y Bogen $A' \subseteq T$ mit A auf dem Innern \hat{e} einer jeden Kante $e \in E(G)$ überein.*

Beweis. Es sei T ein topologischer Spannbaum von $|G|$ und $A \subseteq T$ ein x - y Bogen in T , $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$. Angenommen, es gibt einen x - y Bogen A' in

T , der sich auf dem Innern einer Kante $e = vw \in T$ von A unterscheiden würde. Es kann mit Lemma 4.1 angenommen werden, dass dann $\dot{e} \subseteq A$ und $\dot{e} \cap A' = \emptyset$ ist. Ebenfalls wegen Lemma 4.1 sind dann v und w nicht äquivalent. Offenbar ist dann aber $(A \setminus \dot{e}) \cup A'$ ein topologischer $\bar{v}\text{--}\bar{w}$ Weg $P \subseteq T$ (man beachte dabei wieder Lemma 4.1), der nach Lemma 4.6 einen $\bar{v}\text{--}\bar{w}$ Bogen A'' enthält. Dann ist aber $C := A'' \cup \dot{e}$ ein Kreis in T mit Widerspruch zur Kreisfreiheit von T . \square

Ist jetzt T ein topologischer Spannbaum von $|G|$ und $e = xy$ eine Kante in $G \setminus T$, dann enthält $T \cup e$ einen Kreis C_e . Denn sind x und y nicht äquivalent, dann gibt es in T einen x – y Bogen A und $C := A \cup e$ ist ein Kreis. Und sind x und y äquivalent, dann ist schon $C := \dot{e} \cup \{x\}$ ein Kreis. Es sei ferner $D(C_e)$ die Menge der Kanteninnern $\dot{e} \subseteq C_e$. Nach Lemma 4.8 ist $D(C_e)$ durch e und T bereits eindeutig bestimmt und es werde $D(C_e)$ der *Fundamentalkreis* von e bezüglich T genannt. Aber auch C_e heie ein Fundamentalkreis von T . Ist der Kontext unmiverstndlich, so wird auch C_e für $D(C_e)$ geschrieben.

Es sollen nun die Fundamentalschnitte eines topologischen Spannbaums T von $|G|$ definiert werden. Ist $e \in T$ eine Kante, dann zerfällt $T \setminus \dot{e}$ in genau zwei topologische Wegkomponenten C_1 und C_2 . Es sei $X_1 := V(G) \cap C_1$ und $X_2 := V(G) \cap C_2$. Dann heie $D_e := E(X_1, X_2)$ der *Fundamentalschnitt* von e bezüglich T . Im kommenden Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Fundamentalschnitte eines topologischen Spannbaums immer endlich sind.

4.3 Die Fundamentalschnitte topologischer Spannbäume

In diesem Abschnitt soll es nun darum gehen zu zeigen, dass die Fundamentalschnitte eines topologischen Spannbaums immer endlich sind. Diese Aussage ist wichtig für die Rolle, die topologische Spannbäume in der Charakterisierung des Zyklenraums spielen sollen. Dafür werden einige Lemmata benötigt, die im Folgenden bereitgestellt werden.

Sei zunächst X ein topologischer Raum. Ein *topologischer Strahl* $R \subseteq X$ ist ein homöomorphes Bild des Intervalls $[0, 1]$.⁴ Topologische Strahlen in $|G|$ lassen sich zu Bögen fortsetzen:

Lemma 4.9. *Ist $R \subseteq |G|$ ein topologischer Strahl und $\varphi : [0, 1] \rightarrow R$ ein entsprechender Homöomorphismus, dann lässt sich φ zu einem Homöomorphismus $\varphi^* : [0, 1] \rightarrow A \supseteq R$ fortsetzen. $\varphi^*(1)$ ist dabei bis auf quivalenz eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es sei $R \subseteq |G|$ ein topologischer Strahl und $\varphi : [0, 1] \rightarrow R$ ein entsprechender Homöomorphismus. Es soll zunächst gezeigt werden, dass gilt:

- (1) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen 1 konvergente Folge in $[0, 1)$, und sind $x, y \in |G|$ Häufungspunkte der Folge $(\varphi(x_n))$, dann sind x und y quivalent.

⁴Die in diesem Abschnitt neu eingeführten Begriffe eines topologischen Strahls, eines topologischen Kamms und eines topologischen Sterns sind alle [5] entnommen.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen 1 konvergente Folge in $[0, 1)$ und $x, y \in |G|$ Häufungspunkte der Folge $(\varphi(x_n))$. Wären nun x und y nicht äquivalent, dann gäbe es disjunkte basis-offene Umgebungen O_x und O_y von x bzw. y und einen endlichen Schnitt $F = E(X, Y)$, so dass $V(O_x) \subseteq X$ und $V(O_y) \subseteq Y$ gelten würde. Durch Übergang zu geeigneten Teilfolgen können wir dann $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots$ wählen, so dass $\varphi(x_i) \in O_x$ und $\varphi(y_i) \in O_y$ ist. Jeder Teilbogen $x_i R y_i$ durchläuft das Innere einer Kante von F (Lemma 4.7), was für $n > |F|$ zu einem Widerspruch führt.

Als nächstes soll die Existenz eines geeigneten Fortsetzungspunktes in $|G|$ gezeigt werden:

- (2) Es gibt ein bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmtes $x \in |G|$, so dass für jede gegen 1 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, 1)$ die Folge $(\varphi(x_i))$ gegen x konvergiert.

Sei wieder (x_n) eine gegen 1 konvergente Folge in $[0, 1)$. Da $|G|$ kompakt ist, hat die Folge $(\varphi(x_n))$ einen Häufungspunkt $x \in |G|$. Ist jetzt (y_n) eine weitere gegen 1 konvergente Folge in $[0, 1)$, dann ist x auch Häufungspunkt dieser Folge, da sonst die Folge (z_n) mit $z_{2n} := x_n$ und $z_{2n+1} := y_n$ einen Widerspruch zu (1) darstellen würde. Ist nun $O \subseteq |G|$ eine offene Umgebung von x , dann ist $y_n \in O$ sogar für fast alle n , da es andernfalls einen weiteren Häufungspunkt von y_n außerhalb von O gäbe (mit Widerspruch zu (1)). Also konvergiert die Folge (y_n) gegen x . Dass y_n gegen kein weiteres außerhalb von \bar{x} liegendes Element gehen kann, ist auch klar (umgekehrt konvergiert diese Folge aber gegen jedes Element aus \bar{x} , da diese Elemente genau dieselben Umgebungen haben).

Man wähle jetzt ein $x \in |G|$ wie in (2) und setze $\varphi^*(1) := x$ sowie $\varphi^*_{[0,1)} := \varphi$. Sei $A := R \cup \{x\}$; es gilt:

- (3) $\varphi^* : [0, 1] \rightarrow A$ ist bijektiv.

Für (3) ist nur $x \notin R$ zu zeigen. Wäre $x \in R$, dann wähle man ein Intervall $(a, b) \subseteq [0, 1)$ mit $\varphi^{-1}(x) \in (a, b)$ und $b < 1$. Dann müsste $\varphi((a, b))$ offen in $\text{im } \varphi$ sein. Aber nach Wahl von x mit (2) enthält jede Umgebung von x ein $\varphi(y)$ mit $y \in (b, 1)$.

Weiter ist noch zu zeigen:

- (4) φ^* ist stetig.

Da φ stetig ist, brauchen wir nur noch die Stetigkeit von φ^* im Punkt $x = \varphi^*(1)$ nachzuweisen. Sei also $O \subseteq |G|$ eine offene Umgebung von x . Dann ist zunächst $\varphi^{-1}(O)$ offen in $[0, 1)$. Wir wären fertig, wenn $(a, 1) \subseteq \varphi^{-1}(O)$ für ein $a \in [0, 1)$ gezeigt werden könnte. Angenommen, es gibt kein solches Element a . Dann gibt es eine gegen 1 konvergente Folge (x_n) in $[0, 1)$ mit $x_n \notin \varphi^{-1}(O)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus (2) folgt, dass die Folge $(\varphi(x_n))$ gegen x geht und damit $\varphi(x_n) \in O$ für fast alle n gilt. Also gilt erst recht $x_n \in \varphi^{-1}(O)$ für ein n . Widerspruch.

Wir wären fertig, wenn wir wüßten, dass A als Unterraum von $|G|$ hausdorffsch ist. Denn nach [1, p. 48] sind bijektive und stetige Funktionen aus einem kompakten Raum in einen Hausdorff-Raum bereits Homöomorphismen. Es wird daher gezeigt, dass gilt:

(5) A ist hausdorffsch.

Klarerweise ist $R \subseteq A$ als homöomorphes Bild des Intervalls $[0, 1)$ hausdorffsch. Es ist also lediglich zu zeigen, dass es kein zu $x = \varphi^*(1)$ äquivalentes Element $y \in R$ gibt. Angenommen, es gäbe ein solches y . Man wähle dann eine offene Umgebung $(a, b) \subseteq [0, 1)$ von y mit $b < 1$. Dann ist $\varphi((a, b))$ offen in R , d.h. es gibt ein offenes $O \subseteq |G|$ mit $\varphi((a, b)) = R \cap O$. Dann ist aber auch $x \in O$ und es wäre $\varphi^{*-1}(O) = (a, b) \cup \{1\}$ nicht offen in $[0, 1]$ im Widerspruch zur Stetigkeit von φ^* . □

Dass die Fundamentalschnitte eines topologischen Spannbaums immer endlich sind, soll mit einer topologischen Variante des schon häufig benutzten Strahl/Stern-Lemmas gezeigt werden. Es setzt einige neue Begrifflichkeiten voraus.

Sei X ein topologischer Raum und $\varphi : [0, 1] \rightarrow R \subseteq X$ ein Homöomorphismus (also R ein topologischer Strahl). Ist nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Punkten in X und sind Q_n für $x_n \notin R$ paarweise disjunkte x_n - R Bögen mit Enden y_n , so dass die Folge der Urbilder $\varphi^{-1}(y_n)$ zusammen mit den x_n , die auf R liegen, gegen 1 konvergiert, dann heißt R zusammen mit allen Bögen Q_n ein *topologischer Kamm* mit *Rücken* R und *Zähnen* x_n (einschließlich der x_n auf R). Ein *topologischer \aleph_0 -Stern* S ist eine Vereinigung von \aleph_0 Bögen, die sich genau in ihrem Anfangspunkt treffen. Der gemeinsame Anfangspunkt heißt dann wieder das *Zentrum* von S und die Endpunkte sind seine *Blätter*. Für wegzusammenhängende Hausdorff-Räume hat man nun eine topologische Variante des Strahl/Stern-Lemmas, das hier [5] entnommen wurde.

Lemma 4.10. *Sei U eine unendliche Punktmenge in einem wegzusammenhängenden Hausdorff-Raum X , dann enthält X entweder einen topologischen Kamm mit allen Zähnen in U oder einen topologischen \aleph_0 -Stern mit allen Blättern in U .*

Zwar ist $|G|$ im allgemeinen nicht hausdorffsch, aber man könnte versuchen, das Lemma 4.10 auf den hausdorffschen Quotientenraum $|G|/_-$ anzuwenden und mit Lemma 4.5 zurück nach $|G|$ zu gehen. Diese Strategie liefert eine ganz ähnliche Aussage, die etwas allgemeiner auch für Unterräume $H \subseteq |G|$ gezeigt werden soll. Dabei heißen zwei Punkte x, y in einem topologischen Raum X *trennbar*, wenn sie disjunkte Umgebungen besitzen.

Lemma 4.11. *Sei $H \subseteq |G|$ ein (topologisch) wegzusammenhängender Unterraum und U eine Teilmenge von H , die unendlich viele paarweise in H trennbare Elemente enthält. Dann gibt es in H einen topologischen Kamm mit allen Zähnen in U oder einen \aleph_0 -Stern mit allen Blättern in U .*

Beweis. Seien die Voraussetzungen des Lemmas gegeben und auch mit \sim die Äquivalenzrelation auf H bezeichnet, die genau diejenigen Elemente identifiziert, die dieselben Umgebungen haben sowie $\pi : H \rightarrow H/_-$ die kanonische Projektion in den entsprechenden Quotientenraum. Dann ist $\pi(U)$ unendlich, $H/_-$

ist hausdorffsch und mit H ist auch der Quotientenraum wegzusammenhängend. Also kann auf $H/_-$ und $\pi(U)$ das Lemma 4.10 angewendet werden, was entweder einen topologischen Kamm K oder einen topologischen \aleph_0 -Stern S ergibt. Nach Lemma 4.5 gibt es eine Einbettung f von $H/_-$ in H . Ist für $\bar{x} \in H/_-$ der Schnitt mit U nicht leer, dann wähle f so, dass $f(x) \in U$ gilt. Jetzt ergeben $f(K)$ bzw. $f(S)$ die gewünschten Objekte in H . □

Damit kann nun das Ziel dieses Abschnittes erreicht werden:

Satz 4.1. *Die Fundamentalschnitte eines topologischen Spannbaums T von $|G|$ sind immer endlich.*

Beweis. Sei T ein topologischer Spannbaum von $|G|$ und $e \subseteq T$ eine Kante von T . Dann seien C_1 und C_2 die beiden topologischen Wegkomponenten von $T \setminus \dot{e}$, $X_1 := V(G) \cap C_1$ und $X_2 := V(G) \cap C_2$.

Angenommen, der Fundamentalschnitt $D_e = E(X_1, X_2)$ wäre unendlich. Es sei dann $U_1 := V(D_e) \cap X_1$ und $U_2 := V(D_e) \cap X_2$. Es seien $\tilde{U}_1 := \{\tilde{u} \mid u \in U_1\}$ sowie $\tilde{U}_2 := \{\tilde{u} \mid u \in U_2\}$ die Mengen der Äquivalenzklassen der Ecken aus U_1 bzw. U_2 . Die Wegkomponenten C_1 und C_2 sind dann abgeschlossen unter Äquivalenz aufgrund von Bemerkung 4.2.

Es sollen jetzt zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem, ob eine der Mengen \tilde{U}_1 und \tilde{U}_2 unendlich ist.

Fall 1: Die Mengen \tilde{U}_1 und \tilde{U}_2 sind beide endlich.

Da mit D_e auch $V(D_e)$ unendlich ist, gibt es dann ein $v \in U_1 \cup U_2$, so dass $\tilde{v} \cap V(D_e)$ unendlich ist. Es kann angenommen werden, dass $v \in U_1$ gilt. Da auch \tilde{U}_2 endlich ist, gäbe es dazu ein $w \in U_2$ und unendlich viele $\tilde{v}-\tilde{w}$ Kanten in D_e , was $\tilde{v} = \tilde{w}$ implizieren würde (siehe Lemma 2.12) im Widerspruch dazu, dass C_1 und C_2 unter Äquivalenz abgeschlossen sind.

Fall 2: Es ist eine der Mengen \tilde{U}_1 und \tilde{U}_2 unendlich.

Es kann angenommen werden, dass dabei \tilde{U}_1 unendlich ist. Man wende nun Lemma 4.11 auf U_1 und C_1 an:

Ergibt es einen topologischen \aleph_0 -Stern $S_1 \subseteq C_1$ mit allen Blättern in U_1 , dann sei $U'_1 \subseteq U_1$ die Menge der Blätter von S_1 und z_1 das Zentrum von S_1 .

Ergibt es einen topologischen Kamm $K_1 \subseteq C_1$ mit Zähnen in U_1 und Rücken R_1 , dann sei $U'_1 \subseteq U_1$ die Menge dieser Zähne und z_1 ein nach Lemma 4.9 existenter Punkt, der R_1 zu einem Bogen $A = R_1 \cup \{z_1\}$ fortsetzt. Da T abgeschlossen ist (und R_1 in T liegt), muss $z_1 \in T$ gelten. Da $R_1 \subseteq C_1$ ist, folgt weiter $z_1 \in C_1$.

In beiden Fällen ist die Menge D'_e der Kanten aus D_e , die mit einer Ecke aus U'_1 inzidieren, immer noch unendlich. Sei jetzt $U'_2 := V(D'_e) \cap X_2$ die Menge der Ecken aus X_2 , die mit einer Kante aus D'_e inzidieren.

Wir betrachten jetzt gesondert die Fälle, dass die Menge \tilde{U}'_2 endlich oder unendlich ist.

- (i) Die Menge \tilde{U}'_2 ist endlich. Dann gibt es ein $w \in U'_2$ und dazu unendlich viele verschiedene Ecken x in U'_1 , so dass es zu x eine $x-\tilde{w}$ Kante e_x in D'_e gibt. Sei F_w die Menge der Kanten e_x . Ist e_x eine Kante in F_w und A_x

der eindeutige z_1 - x Bogen auf S_1 bzw. R_1 , dann ist $A_{e_x} := A_x \cup \overset{\circ}{e}_x \cup w$ ein z_1 - w Bogen in $|G|$. Es gibt dann unendlich viele solcher Bögen A_{e_x} . Es soll jetzt gezeigt werden, dass dies die Äquivalenz von z_1 und w impliziert (im Widerspruch dazu, dass C_1 und C_2 unter Äquivalenz abgeschlossen sind).

Angenommen also, z_1 und w wären nicht äquivalent. Dann gibt es disjunkte offene Umgebungen O_{z_1} und O_w von z_1 bzw. w , so dass $O_{z_1} \cup O_w = |G| \setminus \{f_1, \dots, f_n\}$ für endlich viele innere Punkte f_i von Kanten gilt. Die Punkte f_i können nur auf endlich vielen Bögen A_{e_x} ($e_x \in F_w$) liegen (dies ist klar im Falle des Sterns S_1 , da dann die A_{e_x} bis auf w und z_1 disjunkt sind; im Falle des Kamms K_1 folgt dies daraus, dass es zu jedem Punkt y auf R_1 einen Bogen A_{e_x} gibt, der y vermeidet und die A_{e_x} außerhalb von R_1 bis auf w disjunkt sind).

Dann muss es in $|G| \setminus \{f_1, \dots, f_n\}$ einen z_1 - w Bogen A_{e_x} geben, was aber wegen der disjunkten offenen Zerlegung $A_{e_x} = (A_{e_x} \cap O_{z_1}) \cup (A_{e_x} \cap O_w)$ dem Zusammenhang des Bogens A_{e_x} widerspricht.

- (ii) Die Menge \tilde{U}'_2 ist unendlich. Dann kann auf U'_2 und C_2 das Lemma 4.11 angewendet werden.

Ergibt es einen topologischen \aleph_0 -Stern $S_2 \subseteq C_2$ mit allen Blättern in U'_2 , dann sei $U''_2 \subseteq U'_2$ die Menge der Blätter von S_2 und z_2 das Zentrum von S_2 . Ergibt es einen topologischen Kamm $K_2 \subseteq C_2$ mit Zähnen in U'_2 und Rücken R_2 , dann sei $U''_2 \subseteq U'_2$ die Menge dieser Zähne und z_2 ein nach Lemma 4.9 existenter Punkt, der R_2 zu einem Bogen $A = R_2 \cup \{z_2\}$ fortsetzt. Wie in (i) folgt $z_1 \in C_1$.

Es gibt dann offenbar eine unendliche Menge $F \subseteq D_e$ von U'_1 - U''_2 Kanten, deren Endecken in X_1 bzw. X_2 paarweise verschieden sind. Ist dann $d = y_1 y_2$ eine Kante aus F , $y_1 \in X_1$ und $y_2 \in X_2$, ferner A_1 der eindeutig bestimmte z_1 - y_1 Bogen auf S_1 bzw. K_1 und A_2 der ebenfalls eindeutig bestimmte z_2 - y_2 Bogen auf S_2 bzw. K_2 , dann ist $A_d := A_1 \cup \{d\} \cup A_2$ ein z_1 - z_2 Bogen in $|G|$. Genauso wie unter (i) argumentiert man nun, dass die Existenz von unendlich vielen solchen Bögen die Äquivalenz von z_1 und z_2 impliziert, im Widerspruch dazu, dass C_1 und C_2 unter Äquivalenz abgeschlossen sind.

Insgesamt zeigt dies, dass in allen Fällen der Fundamentalschnitt D_e nicht unendlich sein konnte. □

4.4 Das Existenzproblem topologischer Spannbäume

Die Existenz eines topologischen Spannbaums von $|G|$ ist dafür notwendig, später die grundlegenden Aussagen über den Zyklenraum von G treffen zu können. Daher soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, dass für jeden Graphen $|G|$ ein topologischer Spannbaum von $|G|$ existiert.

Im endlichen Fall findet man einen Spannbaum auch als minimal zusammenhängenden aufspannenden Teilgraphen von G . Eine ähnliche Strategie kann man auch verfolgen, um die Existenz eines topologischen Spannbaums von $|G|$ nachzuweisen. Es wird unter den topologisch wegzusammenhängenden und $V(G) \cup \Omega(G)$ aufspannenden Standardunterräumen ein bezüglich \subseteq minimales Element gesucht. Um die Existenz eines solchen minimal wegzusammenhängenden Unterraums nachzuweisen, bietet sich das Lemma von Zorn an. Entscheidend dafür ist, dass der Schnitt über eine absteigende Folge (topologisch) wegzusammenhängender Unterräume wieder wegzusammenhängend ist. Die meiste Arbeit wird im Folgenden deshalb darauf verwandt werden, ein Lemma zu zeigen, dass diese Aussage sichern kann.

Ein solches Lemma wird zunächst für Graphen gezeigt, die keine zwei äquivalente Elemente enthalten. Damit gilt es dann für den mit dem Quotientengraphen assoziierten Raum $|G/\sim|$ und kann mit Hilfe der Einbettung $|G/\sim| \hookrightarrow |G|$ auf $|G|$ übertragen werden.

Die Darstellung beginnt damit, ein Lemma vorzustellen, das für den Beweis des zentralen Lemmas notwendig ist. Es handelt sich dabei um eine ähnliche Aussage wie Lemma 4.8 in [5] und soll im späteren Beweis dieselbe Funktion wie dieses Lemma erfüllen.

Lemma 4.12. *Sei G wieder ein Graph, der keine zwei äquivalenten Ecken enthält und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Ecken in G mit der Eigenschaft, dass je drei Folgeglieder auf einem gemeinsamen Bogen in $|G|$ liegen. Ist dann T ein normaler Spannbaum von G mit Wurzel r , dann gilt:*

Es gibt eine Teilfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen ein Ende $\omega \in \Omega(G)$ konvergiert und deren Folgeglieder einen beliebig großen Abstand zu r annehmen, d.h. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein y_i , so dass $d(y_i, r) \geq n$ ist.

Beweis. Sei also G ein Graph, in dem keine zwei Ecken äquivalent sind und darin $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Ecken mit der Eigenschaft, dass je drei Folgeglieder auf einem gemeinsamen Bogen in $|G|$ liegen. Ferner sei T ein normaler Spannbaum von G und r seine Wurzel.

Es ist dann $U := \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ unendlich. Man wende auf U und T das Strahl-/Stern-Lemma an. Ergibt es einen Kamm, dann sind wir offenbar fertig. Es kann also angenommen werden, dass es einen \aleph_0 -Stern S mit Zentrum s ergibt. Es seien y_1, y_2, \dots die Blätter von S , die nicht kleiner als s sind bzgl. \leq_T (es gibt höchstens ein solches Blatt).

Es sei $v_i \in N_T(s)$ die zweite Ecke auf dem s - y_i Weg in T . Ist jetzt w eine Ecke mit $w <_T s$, dann kann w nur in endlich vielen Mengen $\lfloor v_i \rfloor$ einen Nachbarn in G haben, da andernfalls w mit s äquivalent wäre. Da die Menge $\lceil s \rceil$ endlich ist, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge von (y_n) erreichen, dass kein $w \in \lceil s \rceil$ einen Nachbarn in $\lfloor v_n \rfloor$ hat.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass dann gilt:

- (1) Jeder y_i - y_j Bogen trifft s oder ein ggf. von s dominiertes Ende $\omega_s \in \Omega(G)$.

Angenommen, (1) wäre falsch. Dann sei A ein y_i - y_j Bogen, der weder s noch ein ggf. von s dominiertes Ende ω_s trifft. Im Folgenden soll ein Widerspruch zum Zusammenhang von A hergeleitet werden. Sei dazu X_i der Untergraph $G[\lfloor v_i \rfloor]$ zusammen mit allen Enden, die einen Strahl in $\lfloor v_i \rfloor$ haben.

Es gilt dann:

(*) $X_i \cap A$ ist offen in A .

Sei $x \in X_i \cap A$. Liegt x im Innern einer Kante e , dann ist $\hat{e} \subseteq A$ offenbar eine (sogar in $|G|$) offene Umgebung von x in A .

Ist x eine Ecke, dann gibt es eine basis-offene Umgebung O_x von x mit $O_x \cap \lceil s \rceil = \emptyset$, da x zu keiner Ecke aus $\lceil s \rceil$ äquivalent ist. Wegen der Normalität von T ist damit $C_{O_x} \subseteq X_i$, also auch $\widehat{C}_{O_x} \subseteq X_i$, und damit sogar $O_x \cap A \subseteq X_i$, da A keine s - X_i Kante trifft (denn sonst würde A nach Lemma 4.1 s oder ggf. ω_s enthalten) und keine weitere $\lceil s \rceil$ - X_i Kante in G existiert. Also ist $O_x \cap A$ eine offene Umgebung von x in A .

Ist x ein Ende, dann ist $x \neq \omega_s$ nach Annahme. Also gibt es eine basis-offene Umgebung O_x von x , die s nicht enthält. Ist $R \subseteq X_i$ ein Strahl mit $x = \omega(R)$, dann trennt offenbar s jedes $w < s$ von R , da keine w - X_i Kanten in G existieren (und T normal ist). Also ist dann sogar $O_x \cap \lceil s \rceil = \emptyset$, damit $C_{O_x} \subseteq X_i$ und wie oben ist $O_x \cap A$ eine offene Umgebung von x in A . Insgesamt zeigt dies (*).

Um einen Widerspruch zum Zusammenhang von A herzuleiten, ist jetzt noch zu zeigen, dass auch gilt:

(**) $(|G| \setminus X_i) \cap A$ ist offen in A .

Sei $y \in (|G| \setminus X_i) \cap A$. Liegt y im Innern einer Kante, dann ist die Aussage klar. Ist y eine Ecke, dann ist $y \neq s$ nach Annahme, also gibt es eine basis-offene Umgebung O_y von y , die s nicht enthält. Normalität von T und die Tatsache, dass für eine Ecke $w < s$ keine w - X_i Kanten existieren, zeigen, dass jeder y - X_i Weg die Ecke s trifft. Also ist $\widehat{C}_{O_y} \subseteq (|G| \setminus X_i)$ und damit auch $O_y \subseteq (|G| \setminus X_i)$. Die Menge $O_y \cap A$ ist so eine offene Umgebung von y in A .

Ist y ein Ende, dann wird y nach Annahme nicht von s dominiert. Es gibt also wieder eine basis-offene Menge O_y , die s nicht enthält. Da T normal ist, enthält T einen normalen Strahl $R \in y$. Wegen $y \notin X_i$ ist dieser nach Konstruktion von X_i zu X_i disjunkt. Da ein Teilstrahl von R in O_y liegt, enthält O_y eine Ecke, die nicht in X_i liegt. Wie eben folgt dann $O_y \subseteq (|G| \setminus X_i)$ und $O_y \cap A$ ist eine offene Umgebung von y in A . Insgesamt ergibt dies (**).

Da $y_j \notin X_i$ gilt, ergäben (*) und (**) einen Widerspruch zum Zusammenhang von A . Also gilt (1).

Wählt man jetzt drei verschiedene y_i, y_j, y_k und einen Bogen A , der sie (in dieser Reihenfolge) verbindet, dann trifft nach (1) sowohl $y_i A y_j$ als auch $y_j A y_k$ die Ecke s oder das ggf. von s dominierte Ende ω_s , im Widerspruch dazu, dass kein Bogen zwei äquivalente Elemente enthält (Bemerkung 4.1). Damit kann es keinen Stern wie angenommen geben und man ist fertig. \square

Damit nun zum zentralen Lemma:

Lemma 4.13. *Sei G ein Graph, der keine zwei äquivalenten Ecken enthält. Ferner sei $(A_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ eine transfinite Folge von x - y Bögen, $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$. Dann gibt es einen topologischen x - y Weg P und eine in P dichte Menge $P^* \subseteq G$, so dass für jedes $p \in P^*$ diejenigen Bögen A_α mit $p \in A_\alpha$ eine kofinale Teilfolge bilden.*

(Insbesondere bilden die Bögen A_α , die einen Punkt aus P treffen, der im Innern einer Kante $e \in E(G)$ liegt, eine kofinale Teilfolge.)

Diese Aussage ist eine Variante von Lemma 5.1 aus [5] unter einer etwas stärkeren Voraussetzung an G .⁵ Ihr Beweis weicht nur in einigen wenigen Details von dem Beweis in [5] ab. Daher soll im Folgenden nur aufgezeigt werden, wie der gesuchte Weg P definiert werden kann; für den Nachweis, dass P die gewünschten Eigenschaften hat, sei dann auf [5] verwiesen.

Beweis. Es sei G ein Graph, der keine zwei äquivalenten Ecken enthält. Ferner sei $(A_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ eine transfinite Folge von x - y Bögen, $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$.

Es kann angenommen werden, dass der Graph G zusammenhängend ist. Dann existiert ein normaler Spannbaum T von G mit Wurzel $r \in V(G)$ (siehe dafür Lemma 2.4 in [5]). Weiter heiÙe eine Kante $e \in E(G)$ *gut*, wenn die Folge der A_α mit $\dot{e} \subseteq A_\alpha$ eine kofinale Teilfolge bildet.

Es soll jetzt eine stetige Abbildung $\sigma : [0, 1] \rightarrow |G|$ definiert werden, so dass $P := \sigma([0, 1])$ und die Menge $P^* \subseteq P$ der Punkte auf P aus dem Innern von Kanten die Bedingungen des Satzes erfüllen. Dafür wird σ zunächst rekursiv für jedes rationale $r \in [0, 1]$ definiert. Es sei $\sigma(0) := x$ und $\sigma(1) := y$ sowie r_1, r_2, \dots eine Abzählung der rationalen Zahlen in $(0, 1)$.

Zur Definition von σ auf r_1 betrachte man einen endlichen Kantentrenner $F \subseteq E(G)$ von x und y . Da jeder Bogen A_α eine Kante aus F trifft, gibt es mindestens eine gute Kante. Unter allen guten Kanten wähle man eine Kante $e = vw$, so dass die in T größere Endecke von e minimal wird. Es sei dann $[x_1, y_1] \subseteq [0, 1]$ ein Intervall mit rationalen Randpunkten, das r_1 enthält. Unter den A_α , die \dot{e} enthalten, gibt es dann eine kofinale Teilfolge Σ_1 , so dass alle $A_\alpha \in \Sigma_1$ das Kanteninnere \dot{e} in derselben Richtung durchlaufen. Es wird dann σ auf $[x_1, y_1]$ als Homöomorphismus auf e gesetzt, so dass σ die Kante e in derselben Richtung durchläuft wie die $A_\alpha \in \Sigma_1$. Ist dabei $\sigma(x_1) = x$ oder $\sigma(y_1) = y$, so sei ggf. $x_1 := 0$ bzw. $y_1 := 1$.

Für r_2 verfähre man dann analog. Ist beispielsweise $r_2 \in (r_1, 1)$ und ist σ noch nicht auf r_2 definiert, dann ersetze man in obiger Konstruktion r_1 für x und r_2 für r_1 und betrachte für $A_\alpha \in \Sigma_1$ die Folge der Teilbögen $\sigma(r_1)A_\alpha y$.⁶

Auf diese Weise können wir σ induktiv auf $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ definieren, so dass nach dem n -ten Schritt σ auf einer Menge $X_n \supseteq X_{n-1}$ definiert ist, die r_n enthält, wobei X_n die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen mit rationalen Randpunkten zusammen mit $\{0, 1\}$ ist. Dabei gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine in $\Sigma_0 := (A_\alpha)_{\alpha < \beta}$ kofinale Teilfolge Σ_n der A_α , so dass für jede Kante

⁵In [5] wird von G nur gefordert, dass keine zwei Ecken durch unendlich viele ecken-disjunkte Wege miteinander verbunden sind. Ferner geht es natürlich nicht um die Topologie $ETOP$, sondern um eine bestimmte Quotiententopologie ($ITOP$) für die Topologie TOP .

⁶Ist dabei $\sigma(r_1) \notin A_\alpha$, dann enthält A_α anstelle dessen ein von $\sigma(r_1)$ dominiertes Ende ω und man betrachte $\omega A_\alpha y$.

$e \in E(G)$ mit $\dot{e} \subseteq \sigma(X_n)$ und für $A_\alpha \in \Sigma_n$ die Inklusion $\dot{e} \subseteq A_\alpha$ gilt (und alle $A_\alpha \in \Sigma_n$ die Kante e in derselben Richtung wie σ durchlaufen). Ferner ist dann σ auf $X := \bigcup_{n=1}^\infty$ injektiv.

Ist nun noch $p \in [0, 1] \setminus X$, dann gibt es eine gegen p konvergente Folge von rationalen Punkten $q_1 < q_2 < \dots$ aus $[0, 1]$, so dass jeweils $\sigma(q_i)$ eine Ecke ist. Nach Lemma 4.12 konvergiert die Folge $(\sigma(q_i))$ gegen ein Ende ω_p und man setzt $\sigma(p) := \omega_p$.

Die Hauptlast des Beweises wird nun darauf verwendet, dass die so definierte Funktion σ stetig ist (hier wird dann auch von der zusätzlichen Eigenschaft, die Lemma 4.12 sichert und der Minimalitätsforderung an die Kanten im Bild von σ Gebrauch gemacht). Da die Argumentation bis auf einige wenige Details nahezu im Wortlaut aus dem Beweis in [5] übernommen werden kann, wird an dieser Stelle auf ihre Ausführung verzichtet. □

Ist nun G ein beliebiger Graph, so gilt Lemma 4.13 immer für seinen Quotientengraphen. Mit Hilfe der Einbettung von $|G/\sim|$ in $|G|$ lässt sich dieses Lemma auf beliebige Graphen erweitern. Dafür werden zwei kleinere Lemmata benötigt:

Lemma 4.14. *Es sei $f : |G| \rightarrow |G|$ eine Bijektion mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Für jedes $x \in V(G) \cup \Omega(G)$ sind die Elemente x und $f(x)$ äquivalent.*
- (ii) *Auf Kanten $e \in E(G)$, deren Endecken äquivalent sind, ist f die Identität.*
- (iii) *Es gibt eine Permutation σ von $E(G)$, so dass für eine Kante $e = xy \in E(G)$ die Kante $\sigma(e)$ eine \tilde{x} - \tilde{y} Kante ist und ferner gilt: Ist $e = xy \in E(G)$ eine Kante, deren Endecken nicht äquivalent sind, dann ist die Einschränkung von f auf \dot{e} zu einem Homöomorphismus $f_e : \dot{e} \rightarrow \sigma(e)$ fortsetzbar, so dass wieder $f_e(x)$ mit x äquivalent ist.*

Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei f eine Bijektion von $|G|$ auf $|G|$ mit den Eigenschaften (i) bis (iii). Da mit f offenbar auch f^{-1} die Eigenschaften (i) bis (iii) hat, reicht es zu zeigen, dass f offen ist. Sei also $O \subseteq |G|$ eine offene Menge. Es kann angenommen werden, dass O basis-offen ist. Liegt dabei O im Innern einer Kante, dann ist wegen (ii) und (iii) $f(O)$ wieder offen. Es kann also angenommen werden, dass O mindestens eine Ecke enthält.

Da offene Mengen unter Äquivalenz abgeschlossen sind, gilt für jedes $x \in V(G) \cup \Omega(G)$ wegen (i):

$$x \in O \Leftrightarrow f(x) \in O.$$

Sei jetzt $F \subseteq E(G)$ eine endliche Kantenmenge, die O induziert. Ist dabei $F' \subseteq F$ die Menge der Kanten $e = xy \in F$ mit $x \in O$ und $y \notin O$, dann ist $f(F') = F'$ wegen (iii), denn mit einer Kante $e = xy \in F'$ liegt jede \tilde{x} - \tilde{y} Kante in F' . Die Bedingung (iii) sichert ferner, dass für ein halboffenes Kantenstück $[x, y) \subseteq e \in F'$ mit der Ecke $x \in O$ auch $f(x)$ in O liegt.

Ist $e \in F$ eine Kante, deren Enden beide in O liegen, dann liegen (wegen (ii) und (iii)) auch die Enden derjenigen Kante in O , die $f(\dot{e})$ enthält.

Zusammengenommen impliziert dies, dass $f(O)$ wieder offen ist. Dabei wird $f(O)$ von F' zusammen mit $F'' := \{e \in E(G) \mid e \supseteq f(\dot{e}), e' \in F \setminus F'\}$ induziert. Insbesondere enthalten O und $f(O)$ genau dieselben Ecken und Enden. Sie unterscheiden sich lediglich auf endlich vielen Kanten. □

Lemma 4.15. *Es sei $P \subseteq |G|$ ein topologischer x - y Weg mit $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ und $\bar{x} \neq \bar{y}$. Ist dann E_P die Menge der Punkte aus P , die im Innern einer Kante liegen, dann liegt E_P dicht in P .*

Beweis. Sei also $P \subseteq |G|$ ein topologischer x - y Weg, $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ und E_P die Menge der Punkte aus P , die im Innern einer Kante liegen.

Angenommen, E_P läge nicht dicht in P . Dann gibt es ein $z \in V(G) \cup \Omega(G)$ aus P und eine basis-offene Umgebung O von z , die E_P nicht trifft. Sei $F \subseteq E(G)$ eine endliche Kantenmenge, die O induziert. Es können jetzt zwei Fälle unterschieden werden.

Fall 1. Es liegt x oder y außerhalb von O . Wir können annehmen, dass $x \notin O$ gilt. Dann sind x und z nicht äquivalent. Also enthält der Teilweg xPz einen x - z Bogen $A \subseteq P$ (Lemma 4.6). Der Bogen A enthält dann das Innere einer Kante $e \in F$ (Lemma 4.7 zusammen mit Lemma 4.1). Offenbar wäre dann aber $\dot{e} \subseteq E_P$ und damit wegen $O \cap \dot{e} \neq \emptyset$ auch $O \cap E_P \neq \emptyset$ mit Widerspruch zur Annahme.

Fall 2. Es liegen x und y beide in O . Da x und y nicht äquivalent sind, enthält P einen x - y Bogen $A \subseteq P$ (Lemma 4.6). Dieser enthält das Innere einer Kante $e = vw \in E(G)$ (Lemma 4.1). Wegen $\dot{e} \cap O = \emptyset$ liegt v außerhalb von O . Der Bogen A enthält dann ein $v_0 \in \bar{v}$, das damit auch nicht in O liegt (Lemma 4.1). Wie im ersten Fall folgte jetzt ein Widerspruch zur Annahme $O \cap E_P = \emptyset$. □

Korollar 4.1. *Es sei $P \subseteq |G|$ ein topologischer x - y Weg zwischen zwei nicht äquivalenten Elementen $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$. Ist dann $P^* \subseteq P$ dicht in P , dann liegt auch die Menge E_{P^*} aller Punkte aus P^* , die im Innern einer Kante liegen, dicht in P .*

Beweis. Sei also $P \subseteq |G|$ ein topologischer x - y Weg zwischen zwei nicht äquivalenten Elementen $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ und $P^* \subseteq P$ dicht in P . Sei ferner E_{P^*} die Menge aller Punkte aus P^* , die im Innern einer Kante $e \in E(G)$ liegen.

Angenommen, es wäre der Abschluss $\overline{E_{P^*}} \neq P$. Wegen Lemma 4.15 gibt es dann einen Punkt $p \in P \setminus \overline{E_{P^*}}$ im Innern einer Kante $e \in E(G)$ und dazu eine offene Umgebung $O \subseteq \dot{e}$, die $\overline{E_{P^*}}$ nicht trifft. Nach Definition von E_{P^*} folgt dann $O \cap P^* = \emptyset$, im Widerspruch dazu, dass P^* dicht in P liegt. □

Es kann jetzt wie angekündigt das Lemma 4.13 auf den Raum $|G|$ für allgemeines G übertragen werden.

Lemma 4.16. *Sei G ein beliebiger Graph. Ferner sei $(A_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ eine transfinite Folge von x - y Bögen, $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$. Dann gibt es einen topologischen x - y Weg P und eine in P dichte Menge P^* , so dass für jedes $p \in P^*$ diejenigen Bögen A_α mit $p \in A_\alpha$ eine kofinale Teilfolge bilden.*

Beweis. Es sei $(A_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ eine transfinite Folge von x - y Bögen, $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$.

Es soll zunächst die Einbettung $\phi_{(f_V, *)} : |G/\sim| \rightarrow |G|$ geeignet gewählt werden. An die Funktion f_V , die aus jeder Äquivalenzklasse $\tilde{v} \in V(G/\sim)$ einen Repräsentanten $v_0 \in \tilde{v}$ auswählt, stellen wir keine Forderung. An die Funktion $*$, die jeder Kante $e = \tilde{x}\tilde{y} \in E(G/\sim)$ eine \tilde{x} - \tilde{y} Kante in G zuordnet, wird jedoch die folgende Bedingung gestellt:

- (†) Ist $e = \tilde{x}\tilde{y}$ eine Kante im Quotientengraphen G/\sim und gibt es eine \tilde{x} - \tilde{y} Kante e' in G , so dass die Bögen A_α mit $\mathring{e}' \subseteq A_\alpha$ eine kofinale Teilfolge bilden, dann bilden auch die Bögen A_α mit $\mathring{e}^* \subseteq A_\alpha$ eine kofinale Teilfolge.

Es ist offenbar möglich, durch geeignete Wahl der Funktion $*$ die Bedingung (†) zu sichern. Für die so gewählte Einbettung $\phi_{(f_V, *)}$ wird im Folgenden wieder kurz ϕ geschrieben.

Es soll jetzt zu jedem Bogen A_α eine Funktion f_α wie in Lemma 4.14 definiert werden mit $f_\alpha(A_\alpha) \subseteq \text{im}\phi$, um das Lemma 4.13 auf den Quotientengraphen anwenden zu können.

Ist $\bar{v} \subseteq V(G) \cup \Omega(G)$ eine Äquivalenzklasse, dann enthält A_α höchstens ein $v_0 \in \bar{v}$. Da nach Lemma 2.14 $\Omega'(G) \subseteq \text{im}\phi$ gilt, enthält $\text{im}\phi$ auch wirklich einen Repräsentanten $v_1 \in \bar{v}$. Für f ist in diesem Fall $v_0 \mapsto v_1$ zu sichern.

Ist $e = xy$ eine Kante, deren Enden nicht äquivalent sind mit $\mathring{e} \subseteq A_\alpha$, dann gibt es eine \tilde{x} - \tilde{y} Kante e' in $\text{im}\phi$. Da A_α keine weitere \tilde{x} - \tilde{y} Kante enthält (Lemma 4.1), kann für ein σ wie im Lemma 4.14 zur Definition von f die Bedingung $e \mapsto e'$ erfüllt werden.

Sei jetzt f_α eine Funktion wie in Lemma 4.14, die diese Bedingungen erfüllt (eine solche gibt es dann offenbar). Da A_α nicht das Innere einer Kante enthält, deren Enden äquivalent sind, gilt dann tatsächlich $f_\alpha(A_\alpha) \subseteq \text{im}\phi$. Da f_α ein Homöomorphismus ist, wird $f_\alpha(A_\alpha)$ wieder zu einem Bogen. Sei daher $A'_\alpha := f_\alpha(A_\alpha)$ und x_0, y_0 die Anfangs- bzw. Endelemente dieser Bögen.

Es kann jetzt auf $\text{im}\phi \cong |G/\sim|$ (Satz 2.6) das Lemma 4.13 angewendet werden. Dies ergibt einen topologischen x_0 - y_0 Weg P und eine darin dichte Menge P^* , so dass für jedes $p \in P^*$ die Bögen A_α mit $p \in A_\alpha$ eine kofinale Teilfolge bilden. Da x_0 zu x und y_0 zu y äquivalent ist, kann $x_0 = x$ und $y_0 = y$ erreicht werden (P bleibt dabei ein topologischer Weg, da äquivalente Elemente genau dieselben Umgebungen in $|G|$ haben). Ferner kann angenommen werden, dass P^* weder Ecken noch Enden enthält, da die Menge der Punkte aus P^* , die im Innern einer Kante liegen, ebenfalls dicht in P ist (Korollar 4.1).

Es soll jetzt gezeigt werden, dass für ein $p \in P^*$ auch die Folge der A_α mit $p \in A_\alpha$ kofinal ist. Sei dazu $p \in P^*$ und $e = vw$ eine Kante mit $p \in \mathring{e}$. Da die

Folge der $A'_\alpha \ni p$ kofinal ist und die Menge der $\tilde{v}-\tilde{w}$ Kanten endlich ist, gibt es eine $\tilde{v}-\tilde{w}$ Kante e' , so dass die Folge der $A_\alpha \supseteq e'$ kofinal ist. Die Bedingung (\dagger) sichert nun, dass damit auch die Folge der $A_\alpha \supseteq e \ni p$ kofinal ist. Damit ist alles gezeigt. \square

Mit Hilfe dieses Lemmas lassen sich nun topologische Spannbäume als minimale Elemente unter den $V(G) \cup \Omega(G)$ enthaltenden wegzusammenhängenden Unterräumen von $|G|$ finden. Sein Beweis verläuft zwar ganz analog zu dem in [5] gegebenen, aber aufgrund der herausgehobenen Bedeutung dieses Satzes wird er an dieser Stelle noch einmal vorgeführt.

Satz 4.2. *Ist G ein beliebiger zusammenhängender Graph, dann existiert ein topologischer Spannbaum T von $|G|$.*

Beweis. Es sei \mathcal{H} die Menge der topologisch wegzusammenhängenden Standardunterräume $H \subseteq |G|$ mit $H \supseteq (V(G) \cup \Omega(G))$. Die Menge \mathcal{H} wird durch \supseteq partiell geordnet. Es soll zunächst gezeigt werden, dass es in \mathcal{H} minimale Elemente T gibt und dann, dass ein solches T ein topologischer Spannbaum von $|G|$ ist (da umgekehrt jeder topologische Spannbaum ein minimales Element von \mathcal{H} ist, erweisen sich die topologischen Spannbäume so als die minimalen (topologisch) wegzusammenhängenden und $V(G) \cup \Omega(G)$ aufspannenden Standardunterräume von $|G|$).

Es sei $(H_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ eine total geordnete Familie von Elementen $H_\alpha \in \mathcal{H}$ und $H := \bigcap_{\alpha < \gamma} H_\alpha$. Dann bleibt H offenbar ein Standardunterraum von $|G|$, der $V(G) \cup \Omega(G)$ enthält. Nicht sofort klar ist lediglich, ob H noch topologisch wegzusammenhängend ist. Dies ist offensichtlich, falls γ endlich ist; im Folgenden werde daher angenommen, dass γ keine endliche Ordinalzahl ist.

Seien jetzt x, y zwei verschiedene Elemente aus H . Es kann angenommen werden, dass x und y nicht äquivalent sind (Bemerkung 4.2) und auch, dass $x, y \in V(G) \cup \Omega(G)$ gilt. Da jedes H_α topologisch wegzusammenhängend ist, gibt es wegen Lemma 4.6 darin einen x - y Bogen A_α . Für die transfinite Folge $(A_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ ergibt nun Lemma 4.16 einen x - y Weg P und eine darin dichte Teilmenge P^* , so dass für jedes $p \in P^*$ die Folge $A_\alpha \ni p$ kofinal ist. Wegen $A_\alpha \subseteq H_\alpha$ impliziert dies $P^* \subseteq H$. Und da H als Standardunterraum mit $H \supseteq (V(G) \cup \Omega(G))$ abgeschlossen ist, folgt weiter $P \subseteq H$. Also ist H topologisch wegzusammenhängend. Insgesamt zeigt dies, dass jede total geordnete Familie aus \mathcal{H} eine untere Schranke in \mathcal{H} hat. Nach dem Lemma von Zorn enthält \mathcal{H} dann ein minimales Element T . Es soll jetzt gezeigt werden, dass T ein topologischer Spannbaum von $|G|$ ist.

Nach Definition von \mathcal{H} ist T ein topologisch wegzusammenhängender Standardunterraum, der $V(G) \cup \Omega(G)$ enthält. Es ist dann lediglich noch zu zeigen, dass T keinen Kreis enthält. Wäre aber $C \subseteq T$ ein Kreis, dann würde C nach Lemma 4.2 das Innere einer Kante $e \in E(G)$ enthalten. Dann wäre aber $T \setminus e$ immer noch topologisch zusammenhängend im Widerspruch zur Minimalität von T . \square

4.5 Graphentheoretische Spannbäume und topologische Spannbäume

Wir hatten bereits gesehen, dass es für Graphen G , die zwei äquivalente Ecken enthalten, keinen topologischen Spannbaum T von $|G|$ geben kann, dessen Schnitt mit G graphentheoretisch zusammenhängend ist. Für Graphen, die keine zwei äquivalente Ecken enthalten, kann es hingegen solche Spannbäume geben. Es wird sich zeigen, dass in diesem Fall gerade die Abschlüsse von Ω' -treuen Spannbäumen topologische Spannbäume von $|G|$ sind (als Beispiel betrachte man die Abbildung 4.2). Im Rahmen des Metrisierbarkeitsproblems wurden

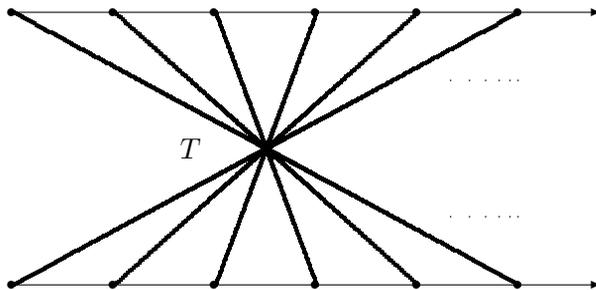


Abbildung 4.2: *Ein topologischer Spannbaum T (fett), dessen Schnitt mit dem Graphen zusammenhängend ist.*

Ω' -treue Spannbäume bereits diskutiert. Es zeigte sich, dass sie für (zusammenhängende) Graphen, die keine zwei äquivalente Ecken enthalten, immer existieren. Also gibt es für diese Graphen immer einen topologischen Spannbaum, dessen Schnitt mit dem Graphen zusammenhängend ist.

Dieses Resultat hat eine interessante Konsequenz. Es ermöglicht einen alternativen Beweis dafür, dass es für jedes G einen topologischen Spannbaum von $|G|$ gibt. Denn mit Hilfe der Einbettung $|G/\sim| \rightarrow |G|$ lässt sich zeigen, dass topologische Spannbäume im Raum $|G/\sim|$ des Quotientengraphen in einfacher Weise einen topologischen Spannbaum im Ausgangsraum $|G|$ induzieren. In gewisser Weise stellt sich das Existenzproblem topologischer Spannbäume also vornehmlich für den Quotientengraphen.

Es wird damit begonnen aufzuzeigen, wie topologische Spannbäume für $|G/\sim|$ topologische Spannbäume im Ausgangsraum $|G|$ induzieren.

Lemma 4.17. *Ist T' ein topologischer Spannbaum von $|G/\sim|$, dann ist $T := \phi(T') \cup V(G) \cup \Omega(G)$ ein topologischer Spannbaum von $|G|$ (wobei $\phi : |G/\sim| \rightarrow |G|$ eine Einbettung von $|G/\sim|$ in $|G|$ ist).*

Beweis. Es sei T' ein topologischer Spannbaum im Raum $|G/\sim|$ des Quotientengraphen von G . Mit Satz 2.6 kann eine Einbettung $\phi : |G/\sim| \rightarrow |G|$ gewählt werden. Nach Definition von ϕ zusammen damit, dass T' ein Standardunterraum von $|G/\sim|$ ist, wird dann $T := \phi(T') \cup V(G) \cup \Omega(G)$ ein Standardunterraum von $|G|$, der offenbar $V(G) \cup \Omega(G)$ enthält.

Da T' als topologischer Spannbaum von G/\sim die Menge $V(G/\sim) \cup \Omega(G/\sim)$ enthält und ferner $\Omega'(G) \subseteq \phi(\Omega(G/\sim))$ gilt (Lemma 2.14), enthält $\phi(T')$ einen Repräsentanten aus jeder Äquivalenzklasse \bar{x} mit $x \in V(G) \cup \Omega(G)$. Da $\phi(T')$ topologisch wegzusammenhängend ist, folgt mit Bemerkung 4.2, dass auch T topologisch wegzusammenhängend ist.

Es ist jetzt nur noch zu zeigen, dass T kreisfrei ist. Angenommen also, T enthält einen topologischen Kreis C . Da C aus jeder Äquivalenzklasse $\bar{x} \subseteq V(G) \cup \Omega(G)$ höchstens ein Element enthält (Bemerkung 4.1) und jede solche Äquivalenzklasse einen Repräsentanten in $\phi(T')$ hat, kann mit einem geeigneten Homöomorphismus $f : |G| \rightarrow |G|$ wie in Lemma 4.14 die Inklusion $f(C) \subseteq \phi(T')$ erreicht werden, was aber ein Widerspruch dazu wäre, dass T' als topologischer Spannbaum von $|G/\sim|$ kreisfrei ist. □

Nun also dazu, dass der Abschluss von Ω' -treuen Spannbäumen für Graphen G , die keine zwei äquivalente Ecken enthalten, einen topologischen Spannbaum von $|G|$ bildet.

Die Ω' -treuen Spannbäume für Graphen, die keine zwei äquivalente Ecken enthalten, hatten wir bereits als diejenigen Spannbäume charakterisiert, deren Fundamentalschnitte alle endlich sind. Dies ist die entscheidende Eigenschaft, mit der sich zeigen lässt, dass ein solcher Spannbaum als Abschluss einen topologischen Spannbaum hat:

Lemma 4.18. *Sind in G keine zwei Ecken äquivalent und ist T ein Spannbaum von G , dessen Fundamentalschnitte alle endlich sind, dann ist der Abschluß von T ein topologischer Spannbaum von $|G|$.*

Beweis. Es sei G ein Graph, der keine zwei äquivalente Ecken enthält und T ein Spannbaum von G , dessen Fundamentalschnitte alle endlich sind. Offenbar gilt für den Abschluss von T : $\bar{T} = T \cup \Omega(G)$. Damit ist klar, dass der Abschluss von T ein Standardunterraum von $|G|$ ist, der $V(G) \cup \Omega(G)$ enthält. Da jeder Spannbaum aus einem undominierten Ende $\omega \in \Omega'(G)$ einen Strahl enthält (Bemerkung 2.4), ist \bar{T} auch topologisch wegzusammenhängend.

Offen bleibt daher lediglich noch, ob \bar{T} kreisfrei ist. Angenommen, es gibt einen topologischen Kreis $C \subseteq \bar{T}$. Dann enthält C nach Lemma 4.2 das Innere einer Kante $e = xy \in T$. Offenbar ist dann $A := C \setminus \dot{e}$ ein $\bar{x}-\bar{y}$ Bogen (vgl. dafür wieder Lemma 4.2). Aber A trifft den nach Annahme über T endlichen Fundamentalschnitt D_e (Lemma 4.7) außerhalb von \dot{e} im Widerspruch zu $C \subseteq \bar{T}$. □

Ist umgekehrt T ein topologischer Spannbaum von $|G|$ mit der Eigenschaft, dass der Schnitt $T' := T \cap G$ (graphentheoretisch) zusammenhängend ist, dann ist T' ein Ω' -treuer Spannbaum von G , da andernfalls T einen Kreis enthielte. Es sind also für einen Graphen G , der keine zwei äquivalente Ecken enthält, und einen Spannbaum T von G die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) T ist ein Ω' -treuer Spannbaum von G .
- (ii) Der Abschluss \overline{T} ist ein topologischer Spannbaum von $|G|$.

Nach dem Korrolar 2.4 aus Abschnitt 2.2 existiert für einen Graphen G , der keine zwei äquivalente Ecken enthält, immer ein Spannbaum, dessen Fundamentalschnitte alle endlich sind. Das Lemma 4.18 hat damit als Korrolar, dass es für ein solches G immer einen topologischen Spannbaum von $|G|$ gibt, dessen Schnitt mit G zusammenhängend, also ein graphentheoretischer Spannbaum von G ist.

Korrolar 4.2. *Sind in einem zusammenhängenden Graphen G keine zwei Ecken äquivalent, dann existiert ein Spannbaum T von G , dessen Abschluß ein topologischer Spannbaum von $|G|$ ist.*

Da der Quotientengraph G/\sim eines beliebigen Graphen G keine zwei äquivalente Ecken enthält, impliziert Korrolar 4.2 zusammen mit Lemma 4.17 die Existenz eines topologischen Spannbaums von $|G|$. Es wird so ein alternativer Beweis dafür möglich, dass es für jeden (zusammenhängenden) Graphen G einen topologischen Spannbaum von $|G|$ gibt.

Ferner haben die so induzierten topologischen Spannbäume die interessante Eigenschaft, dass ihre Fundamentalkreise alle endlich sind. Denn sicher haben topologische Spannbäume von $|G|$, deren Schnitt mit G zusammenhängend ist, diese Eigenschaft. Sie bleibt aber auch bei der Übertragung mit Hilfe der Einbettung von $|G/\sim|$ in $|G|$ erhalten. Korrolar 4.2 und Lemma 4.17 ergeben also das Korrolar:

Korrolar 4.3. *Es sei G ein beliebiger zusammenhängender Graph. Dann existiert ein topologischer Spannbaum von $|G|$, dessen Fundamentalkreise alle endlich sind.*

Mit Hilfe dieses Korrolars kann in Kürze gezeigt werden, dass die endlichen Kreise den Zyklenraum eines Graphen erzeugen.

4.6 Der Zyklenraum

Die Ergebnisse der letzten Abschnitte sollen nun zusammengeführt werden, um die grundlegenden Tatsachen über den Zyklenraum, wie sie in THEOREM 1.1 eingangs für lokal-endliche Graphen formuliert wurden, auf nicht lokal-endliche Graphen zu erweitern.⁷ Es werden dazu zunächst die entsprechenden Begrifflichkeiten eingeführt.

⁷Die Topologie ITOP ermöglicht es bereits, diese Resultate auf eine bestimmte Klasse nicht lokal-endlicher Graphen zu übertragen, vgl. dazu [5].

Ein topologischer Kreis C enthält mit einem inneren Punkt $p \in \mathring{e}$ einer Kante $e \in E(G)$ nicht notwendig ganz e , aber immerhin das Innere \mathring{e} . Es werde mit $D(C)$ die Menge der Kanteninnern bezeichnet, die C enthält (d.h. $D(C) := \{\mathring{e} \subseteq C \mid e \in E(G)\}$). Es liegt dann $D(C)$ dicht in C , was sich unmittelbar aus Lemma 4.15 ergibt:

Bemerkung 4.3. *Es sei $C \subseteq |G|$ ein topologischer Kreis. Dann liegt $D(C)$ dicht in C .*

Dies motiviert die nachfolgende Definition des Zyklenraums von G .

Als neuen Kantenraum wählen wir die Menge $\mathring{\mathcal{E}}(G)$ der Teilmengen von $\mathring{E}(G)$. Offenbar wird dann $\mathring{\mathcal{E}}(G)$ isomorph zum gewöhnlichen Kantenraum $\mathcal{E}(G)$ von G mit symmetrischer Differenz als Addition.

Eine Familie $(D_i)_{i \in I}$ von Mengen $D_i \in \mathring{\mathcal{E}}(G)$ heißt wieder *schmal*, wenn kein Kanteninneres \mathring{e} in D_i liegt für unendlich viele i . Ist die Familie $(D_i)_{i \in I}$ schmal, dann sei die *Summe* $\sum_{i \in I} D_i$ die Menge der Kanteninnern \mathring{e} , die in D_i liegen für ungerade viele i . In diesem Fall sprechen wir auch von einer *schmalen Summe*. Nun sei der *Zyklusraum* $\mathcal{C}(G)$ der Unterraum von $\mathring{\mathcal{E}}(G)$, der aus allen Summen von schmalen Familien $(D(C_i))_{i \in I}$ besteht, wobei die $C_i \subseteq |G|$ topologische Kreise sind. Offenbar ist dann $\mathcal{C}(G)$ abgeschlossen unter Addition.⁸ Ein Element des Zyklenraums heie wieder ein *Zyklus*. Ist ferner $C \subseteq |G|$ ein topologischer Kreis, dann nennen wir auch $D(C)$ einen Kreis und schreiben dafür ebenfalls C .

Es kann jetzt damit begonnen werden, die grundlegenden Aussagen über den Zyklenraum zu formulieren. Der Beweis des ersten Satzes (Satz 4.3) konnte dabei weitestgehend aus [4] übernommen werden; er wird hier aber vollständig dargestellt, da das entsprechende Resultat einen der Zielpunkte dieser Arbeit bildet. Die Beweisidee von Satz 4.5 geht auf sein Analogon in [5] zurück, macht dann aber von einer speziellen unter ETOP verfügbaren Eigenschaft Gebrauch.

Satz 4.3. *Sei G ein zusammenhängender Graph. Eine Menge $D \subseteq \mathring{E}(G)$ ist genau dann Element des Zyklenraums $\mathcal{C}(G)$, wenn D jeden endlichen Schnitt in einer geraden Anzahl von Kanten trifft.*

Beweis. Es sei zunächst $D = \sum_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}(G)$ eine schmale Summe von Kreisen und $F = E(X, Y)$ ein endlicher Schnitt. Es soll zunächst gezeigt werden, dass jedes C_i den Schnitt F in einer geraden Anzahl von Kanten trifft. Dies ergibt sich aber bereits daraus, dass jeder $\overline{X-Y}$ Bogen das Innere einer Kante aus F enthält (Lemma 4.7 und Lemma 4.1). Denn dies impliziert, dass jeder $\overline{X-Y}$ Bogen den Schnitt F in einer ungeraden Anzahl von Kanten trifft. Also muss ein Kreis den Schnitt in einer geraden Anzahl von Kanten treffen.

Für $D = \sum_{i \in I} C_i$ können nur endlich viele C_i den endlichen Schnitt F treffen, da andernfalls die entsprechende Summe nicht schmal wäre. Jedes C_i trifft aber F in einer geraden Anzahl von Kanten. Da die symmetrische Differenz zweier gerader Mengen wieder gerade ist, trifft D den Schnitt F in gerade vielen Kanten.

Sei jetzt umgekehrt $D \subseteq \mathring{\mathcal{E}}(G)$ eine Menge, die jeden endlichen Schnitt in einer

⁸Diese Begrifflichkeiten sind [4] entnommen.

geraden Anzahl von Kanten trifft. Es soll dann $D \in \mathcal{C}(G)$ gezeigt werden. Man wähle dazu einen nach Satz 4.2 existenten topologischen Spannbaum T von $|G|$. Es wird jetzt gezeigt, dass dann gilt:

$$D = \sum_{\mathring{e} \subseteq (\cup D) \setminus T} C_e .$$

Denn ist f eine Kante, die nicht in T liegt, dann gilt offenbar

$$\mathring{f} \in D \Leftrightarrow \mathring{f} \in \sum C_e .$$

Und ist f eine Kante in T , dann betrachte man den Fundamentalschnitt D_f . Nach Satz 4.1 ist D_f endlich. Ist nun $\mathring{f} \in D$, dann ist $\mathring{f} \in C_e$ für ungerade viele Fundamentalkreise C_e aus der entsprechenden Summe, da die Menge D den endlichen Schnitt D_f in einer geraden Anzahl von Kanten trifft. Ist umgekehrt \mathring{f} in der entsprechenden Summe $\sum C_e$ enthalten, dann liegt \mathring{f} auf ungerade vielen der entsprechenden Fundamentalkreise C_e . Für diese muss dann $e \in D_f$ gelten und da D den Schnitt D_f gerade trifft, folgt weiter $\mathring{f} \in D$. Damit ist die obige Äquivalenz auch für Kanten auf T gezeigt.

Die Tatsache, dass für einen Fundamentalkreis C_e und eine Kante f mit $\mathring{f} \in C_e \cap T$ die Kante e im Fundamentalschnitt D_f liegen muss, impliziert zusammen damit, dass D_f endlich ist, dass die Summe $\sum C_e$ schmal ist. Insgesamt folgt so $D \in \mathcal{C}(G)$. □

Ein Menge von Zyklen $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}(G)$ erzeugt den Zyklenraum $\mathcal{C}(G)$, wenn jedes Element $D \in \mathcal{C}(G)$ eine schmale Summe von Elementen aus \mathcal{Z} ist. Wir können jetzt auch zeigen, dass die Fundamentalkreise eines topologischen Spannbaums den gesamten Zyklenraum erzeugen:

Satz 4.4. *Ist T ein topologischer Spannbaum von $|G|$, dann erzeugen die Fundamentalkreise von T den Zyklenraum $\mathcal{C}(G)$.*

Beweis. Ist $D \in \mathcal{C}(G)$ ein beliebiger Zyklus, dann wird im Beweis von Satz 4.3 durch

$$D = \sum_{\mathring{e} \subseteq (\cup D) \setminus T} C_e$$

die Menge D als schmale Summe von Fundamentalkreisen von T erwiesen. □

Da nach Korollar 4.3 immer ein topologischer Spannbaum von $|G|$ existiert, dessen Fundamentalkreise alle endlich sind, hat Satz 4.4 das

Korollar 4.4. *Für einen zusammenhängenden Graphen erzeugen die endlichen Kreise $C \in \mathcal{C}(G)$ den gesamten Zyklenraum.*

Zum Abschluss soll jetzt noch gezeigt werden, dass jedes Element des Zyklenraums eine disjunkte Vereinigung von Kreisen $C \in \mathcal{C}(G)$ ist:

Satz 4.5. *Es sei G ein zusammenhängender Graph und $Z \in \mathcal{C}(G)$ nicht leer, dann ist Z eine disjunkte Vereinigung von Kreisen $C \in \mathcal{C}(G)$.*

Beweis. Sei G zusammenhängend. Der Satz kann auf die folgende Aussage zurückgeführt werden:

- (*) Ist D eine nicht-leere Teilmenge von $\mathring{E}(G)$, die jeden endlichen Schnitt in einer geraden Anzahl von Kanten trifft, dann gibt es einen topologischen Kreis $C \subseteq D$.

Bevor die Aussage (*) gezeigt wird, soll zunächst darauf eingegangen werden, wie sie die Behauptung des Satzes impliziert. Sei dazu $Z \in \mathcal{C}(G)$ nicht leer. Man betrachte jetzt eine maximale Vereinigung disjunkter Kreise $D \in \mathcal{C}(G)$ mit $D \subseteq Z$. Offenbar ist dann auch $Z^* := Z + D$ ein Element des Zyklenraums. Also trifft Z^* nach Satz 4.3 jeden endlichen Schnitt in einer geraden Anzahl von Kanten. Wäre jetzt $Z^* \neq \emptyset$, dann impliziert (*), dass Z^* einen Kreis $C \in \mathcal{C}(G)$ enthält mit Widerspruch zur Maximalität von D . Daher muss $Z^* = \emptyset$ gelten, was $Z = D$ impliziert und Z als disjunkte Vereinigung von Kreisen erweist.

Jetzt also zu (*). Sei dazu D eine nicht-leere Menge von Kanteninnern, die jeden endlichen Schnitt in einer geraden Anzahl von Kanten trifft. Ist dann $e = xy$ eine Kante mit $\mathring{e} \in D$, dann können wir annehmen, dass x und y nicht äquivalent sind. Denn andernfalls ist bereits \mathring{e} ein Kreis in D .

Die Beweisstrategie stellt nun darauf ab, in $|G| \setminus \mathring{e}$ mit Lemma 4.16 einen x - y Bogen A zu finden, dessen Kantenmenge ganz in D liegt, so dass $A \cup \mathring{e}$ den gewünschten Kreis ergibt.

Dafür soll jetzt eine unendliche Folge $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von x - y Wegen in $G - e$ konstruiert werden mit der Eigenschaft, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ der Weg P_i keine Kante e^* benutzt, die auf einem der Wege P_1, \dots, P_{i-1} liegt und für die $\mathring{e}^* \notin D$ gilt. Etwas formaler formuliert soll für alle $i \in \mathbb{N}$ gelten:

- (†) Ist e^* eine Kante von P_i und gibt es ein $j < i$, so dass e^* auch eine Kante von P_j ist, dann ist $\mathring{e}^* \in D$.

Die Folge der P_i lässt sich induktiv konstruieren. Die Kante e kann x und y nicht trennen, da sonst $F := \{e\}$ ein endlicher Schnitt wäre, den D in einer ungeraden Anzahl von Kanten trifft. Es sei P_1 ein beliebiger x - y Weg in $G - e$ (dann ist die Bedingung (†) für P_1 trivialerweise erfüllt).

Angenommen nun, die x - y Wege P_1, \dots, P_i sind bereits in $G - e$ konstruiert und erfüllen die Bedingung (†). Dann sei F_i die Menge der Kanten e^* , die auf einem P_j liegen ($j \leq i$) und für die $\mathring{e}^* \notin D$ gilt. Es muss dann einen x - y Weg in $G - F_i - e$ geben, da sonst die Menge $F := F_i \cup \{e\}$ einen endlichen Schnitt enthält, den D in einer ungeraden Anzahl von Kanten trifft (nämlich gerade in e). Sei dann P_{i+1} ein x - y Weg in $G - F_i - e$. Nach Konstruktion erfüllt P_{i+1} die Bedingung (†). Damit ist die gewünschte Folge von Wegen gefunden.

Offenbar sind die Wege P_i auch topologische x - y Wege. Da x und y nicht äquivalent sind, enthalten sie nach Lemma 4.6 einen x - y Bogen A_i . Man wende auf die Folge der Bögen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Lemma 4.16 an. Dies ergibt einen topologischen x - y Weg P und eine darin dichte Menge $P^* \subseteq P$, so dass für jedes $p \in P^*$ die Folge der A_i mit $p \in A_i$ kofinal ist.

Wegen Korollar 4.1 können wir annehmen, dass P^* nur innere Punkte von Kanten enthält. Ferner ist offenbar $P^* \cap \dot{e} = \emptyset$.

Ist jetzt $p \in P^*$ ein Punkt und e eine Kante mit $p \in \dot{e}$. Dann gibt es ein $A_i \subseteq P_i$ mit $p \in A_i$ und ein $j > i$, so dass $p \in A_j \subseteq P_j$ gilt. Mit Bedingung (†) folgt dann $\dot{e} \in D$.

Da P^* dicht in P ist, kann es keinen inneren Punkt $p \in P$ einer Kante e geben mit $\dot{e} \cap P^* = \emptyset$. Insgesamt folgt also, dass P nur innere Punkte von Kanten e mit $\dot{e} \in D$ enthält.

Man wähle nun mit Lemma 4.6 einen x - y Bogen $A \subseteq P$. $C := A \cup \dot{e}$ ist dann ein Kreis mit $D(C) \subseteq D$. Damit ist (*) gezeigt und wir sind fertig. □

Insgesamt können so die grundlegenden Aussagen über den Zyklusraum, wie sie zu Beginn dieser Arbeit mit THEOREM 1.1 für lokal endliche Graphen formuliert wurden, auch auf nicht lokal-endliche Graphen übertragen werden.

Schlussbetrachtung

Im Fokus dieser Arbeit stand die Topologie $ETOP$ mit dem Ziel, grundlegende Aussagen über den Zyklusraum nicht lokal-endlicher Graphen zu gewinnen. Dies ist im letzten Abschnitt gelungen. Besondere Bedeutung kam dabei den topologischen Spannbäumen zu, von denen gezeigt wurde, dass sie (für zusammenhängendes G) immer existieren. Damit wurde es möglich, die Elemente des Zyklusraums als diejenigen Elemente des Kantenraums zu charakterisieren, die jeden endlichen Schnitt in einer geraden Anzahl von Kanten treffen. Und wie für endliche Graphen erzeugen die Fundamentalkreise eines topologischen Spannbauums den Zyklusraum. Schließlich konnte nachgewiesen werden, dass jedes Element des Zyklusraums eine disjunkte Vereinigung von Kreisen ist.

Zu Beginn dieser Arbeit ist die Topologie $ETOP$ näher untersucht worden. Es zeigte sich, dass sie (für zusammenhängendes G) immer einen kompakten Raum erzeugt. Ferner wurde diskutiert, wann diese Topologie metrisierbar ist. Als sehr wichtig erwies sich in der Folge auch der Quotientengraph G/\sim , da sich der mit ihm assoziierte Raum $|G/\sim|$ wieder in $|G|$ einbetten lässt. Im dritten Kapitel ist der Frage nachgegangen worden, wie sich $ETOP$ zu anderen Topologien verhält. Insbesondere wurde das Verhältnis zwischen den Freudenthal-Enden eines Graphen und seinen Kanten-Enden analysiert.

Es soll abschließend eine Einschätzung der in dieser Arbeit diskutierten Topologie $ETOP$ versucht werden. Hervorzuheben ist sicherlich, dass sie die Erweiterung der grundlegenden Aussagen über den Zyklusraum für allgemeines G erlaubt. Jedoch gelingt dies nur durch die Aufnahme unnatürlicher Kreise in den Zyklusraum: Endliche Wege zwischen zwei äquivalenten Ecken (deren innere Ecken paarweise inäquivalent sind) bilden einen topologischen Kreis (man vergleiche dazu Abbildung 1.2). Dieser Aspekt spiegelt sich topologisch darin wieder, dass $ETOP$ im Allgemeinen nicht hausdorffsch ist; äquivalente Elemente haben genau dieselben Umgebungen. Dies könnte man auch so beschreiben, dass sich $ETOP$ diesbezüglich wie eine entsprechende Quotiententopologie verhält. Geht man nun von einem Graphen zu seinem Quotientengraphen über, so verschwindet dieses Phänomen nahezu: Der Quotientengraph enthält keine zwei äquivalenten Ecken mehr. Es kann aber vorkommen, dass er einen dominierten Strahl enthält. Der entsprechende Raum $|G/\sim|$ auf dem Quotientengraphen zusammen mit all seinen Enden ist in diesem Fall nicht hausdorffsch. Man könnte aber anstelle dessen nur die undominierten Enden hinzufügen und so den Raum $\overline{(G/\sim)}$ betrachten. Dieser Raum ist dann immer hausdorffsch und enthält (wie im übrigen auch $|G/\sim|$) keine unnatürliche Kreise (obwohl natürlich immer noch

ein dominierter Strahl gegen die ihn dominierende Ecke konvergiert). Er lässt sich auf dieselbe Weise wie $|G/\sim|$ wieder in den Ausgangsraum $|G|$ einbetten. Anhand der Diskussion topologischer Spannäume erwies sich, dass topologische Spannäume im Quotientengraphen auf einfache Weise einen topologischen Spannbaum im Ausgangsgraphen induzieren. Dies lässt einen vermuten, dass sich wesentliche unter ETOP beobachtbare homologische Aspekte des Graphen bereits im Quotientengraphen zeigen. Vielleicht spiegelt daher der Raum $\overline{(G/\sim)}$ am besten die von ETOP implementierte Homologie des Graphen G wieder.

Literaturverzeichnis

- [1] ARMSTRONG, M.A.: *Basic Topology*, Springer, New York: 1983.
- [2] DIESTEL, R.: *The cycle space of an infinite graph*, *Combinatorics, Probability and Computing*, **14** (2005), 59-79.
- [3] DIESTEL, R.: *End spaces and spanning trees* (preprint 2004).
- [4] DIESTEL, R.: *Graph Theory*, 3rd edition, Springer, New York: 2005.
- [5] DIESTEL, R. & KÜHN, D.: *Topological paths, cycles and spanning trees in infinite graphs*, *European Journal of Combinatorics*, **25** (2004), 835-862.
- [6] DIESTEL, R. & KÜHN, D.: *Graph-theoretical versus topological ends of graphs*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **87** (2003), 197-206.
- [7] DIESTEL, R.: *Graphentheorie*, 2. Aufl., Springer, Berlin: 2000.
- [8] FREUDENTHAL, H.: *Über die Enden topologischer Räume und Gruppen*, *Mathematische Zeitschrift* **33** (1931), 692-713.
- [9] HAHN, G., LAVIOLETTE, F. & ŠIRÁŇ, J.: *Edge-Ends in Countable Graphs*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **70** (1997), 225-244.
- [10] HALL, D.W. & SPENCER, G.L.: *Elementary Topology*, John Wiley, New York: 1955.
- [11] QUERENBURG, B.V.: *Mengentheoretische Topologie*, 3. Aufl., Springer, Berlin: 2001.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Ein dominierter Strahl	4
1.2	Ein endlicher Weg im Zyklenraum	4
1.3	Ein kanten-dominierter Strahl, der nicht ecken-dominiert ist	5
2.1	Die offene Menge O enthält fast alle Nachbarn von v	14
2.2	Ein Quotientengraph	28
3.1	Zwei Ecken-Enden in einem Kanten-Ende	45
4.1	Ein topologischer Spannbaum	56
4.2	Ein topologischer und graphentheoretischer Spannbaum	69

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich, Moritz Schulz, geboren am 26. September 1979 in Oldenburg, an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt habe.

Moritz Schulz

Hamburg, den 14. September 2005