Blatt 9

Übung 9.1 (2+3+1 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die folgenden topologischen Räume. (Wir betrachten $S^1 \subset \mathbb{C}$ und alle Sphären und abgeschlossenen Kugeln haben Radius 1 und, soweit nicht anderweitig vermerkt, den Mittelpunkt als Ursprung.)

- A Sei $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \subset \mathbb{C}^2$ wobei $A_0 = S^1 \times S^1$, $A_1 = \mathbb{D}^2 \times \{1\}$ und $A_2 = \mathbb{D}^2 \times \{-1\}$.
- B Sei $B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $B_0 = S^2$, $B_1 = \mathbb{D}^2 \times \{0\}$ und $B_2 = [0,2] \times \{(0,-1)\} \cup [0,2] \times \{(0,1)\} \cup \{(2,0)\} \times [-1,1]$.
- C Sei $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ wobei C_0 eine Sphäre mit Radius 1 und Mittelpunkt $(2,0,0)$ ist, C_1 eine Sphäre mit Radius 1 und Mittelpunkt $(-2,0,0)$, $C_2 = [-2,2] \times \{(0,1)\}$ und $C_3 = [-2,2] \times \{(0,-1)\}$.
- D Definiere zuerst $D' = D_0 \cup D_1 \cup D_2$ mit $D_0 = S^1 \times [0,1]$, $D_1 = \mathbb{D}^2 \times \{\frac{3}{4}\}$ und $D_1 = \mathbb{D}^2 \times \{\frac{1}{4}\}$. Dann sei $D = D'/\sim$ wobei $[t,0] \sim [2\pi - t, 1]$ (hier parametrisiert $t \in [0,2\pi]$ die Punkte des Kreises mit $0 \sim_{S^1} 2\pi$.

(b) Zeigen Sie, dass die Räume A, B, C, D alle homotopieäquivalent sind.

(c) Skizzieren Sie zwei weitere Räume, die homotopieäquivalent zu A sind.

Übung 9.2 (1 Punkt)

* Zeigen Sie, dass S^∞ zusammenziehbar ist.

Übung 9.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie dass für zwei beliebige topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) gilt

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Übung 9.4 (3 Punkte)

Wir bezeichnen mit $\Omega_{x_0} X = \mathrm{Map}_*((S^1, 1), (X, x_0))$ den Unterraum von $\mathrm{Map}(S^1, X)$, der aus allen stetigen Abbildungen besteht, die den Grundpunkt bewahren.

Zeigen Sie, dass es eine Bijektion von $\pi_1(X, x_0)$ nach $\pi_0(\Omega_{x_0} X)$ gibt.

Übung 9.5 (1+2+1+1+1 Punkte)

In dieser Übung betrachten wir den Zusammenhang zwischen Homotopiemengen und Fundamentalgruppen.

Wir erinnern daran, dass die Elemente von $\pi_1(X, x_0)$ Klassen von Wegen mit Grundpunkt x_0 sind, modulo Homotopien, die den Grundpunkt x_0 festlassen, $H(0,t) = H(1,t) = x_0$ für alle $t \in I$.

In der Homotopiemenge $[S^1, X]$ dagegen wird kein Grundpunkt festgelegt. Es werden beliebige geschlossene Wege betrachtet, und die Homotopien müssen die Endpunkte nicht festlassen.

Sei X topologischer Raum, $x_0 \in X$ und wir definieren

$$V: \quad \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$$

als die Abbildung, die den Grundpunkt vergisst.

(a) Zeigen Sie, dass V wohldefiniert ist.

(b) Nehmen Sie an, dass $[f]$ und $[g]$ in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert sind, $[f] = \bar{\alpha} \star g \star \alpha$. Benutzen Sie α, um eine (nicht punktierte) Homotopie von f nach g zu konstruieren, also zu zeigen, dass $V[f] = V[g]$.

(c) * Nehmen Sie nun an, dass $H : S^1 \times I \to X$ eine (nicht punktierte) Homotopie von f nach g ist, also $V(f) = V(g)$. Finden Sie einen geschlossenen Weg α, so dass $f \simeq \bar{\alpha} \star g \star \alpha$ homotop relativ zum Grundpunkt sind.

(d) Sei nun $[v] \in [S^1, X]$ und sei α ein Weg von x_0 nach $v(1)$. (Wir bezeichnen den Grundpunkt von S^1 mit 1.) Zeigen Sie, dass $[v]$ im Bild von V liegt.

(e) Zeigen Sie, dass V bijektiv ist, wenn X wegzusammenhängend und $\pi_1(X, x_0)$ abelsch ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 14. Dezember.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.