Geometrie II

Blatt 8 SoS 2007 — H. Kiechle

Präsenzaufgabe

30. Es sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum.

(a) Zu jedem Unterraum U und $x \in P \setminus U$ gibt es einen maximalen Unterraum L_x mit $U \subset L_x$ und $x \notin L_x$. **Tipp:** Zornsches Lemma.

(b) Jeder echte Unterraum U ist als Durchschnitt aller ihn enthaltenden maximalen Unterräume darstellbar.

Hausaufgaben

31. Betrachte den (unendlich dimensionalen) Vektorraum $(\mathbb{R}[t], \mathbb{R})$ aller Polynome über $\mathbb{R}$.

(a) $N := \{a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n\,;\ a_i \in \mathbb{R}\}$ ist eine (vektorielle) Hyperebene in $\mathbb{R}[t]$.

(b) Geben Sie eine Linearform $\ell : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}$ an mit $N = \{f \in \mathbb{R}[t]\,;\ \ell(f) = 0\}$.

(c) Was ist mit $H = \{f \in \mathbb{R}[t]\,;\ f(a) = 0\}$, $a \in \mathbb{R}$?

32. In $\mathrm{AG}(3, K)$ seien die Punkte

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Z}_{11}$ bestimme

(a) $E = \overline{a, b, c}$ und $F = \overline{0, d, e}$;

(b) den Schnitt A von E mit der x-y-Ebene. Ist A ein Unterraum?

(c) $E \cap F$. Ist das ein Unterraum?

(d) Ist E eine Hyperebene?

33. Der Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ erfülle (I3) (d. h. $\forall G \in \mathfrak{G} : |G| \geq 3$) und das Axiom von Veblen-Young:

VY Seien $G, H \in \mathfrak{G}$, mit $z = G \cap H \in P$ und $a, c \in G \setminus \{z\}$, $b, d \in H \setminus \{z\}$, dann gilt $\overline{a, b} \cap \overline{c, d} \neq \varnothing$.

Für drei nicht kollineare Punkte $x, y, z \in P$ sei $\quad U := \bigcup\limits_{u \in \overline{y,z}} \overline{u, x}.$

(a) U ist ein Unterraum von P.

(b) $U = \overline{x, y, z}$.

(c) U ist eine projektive Ebene.

(d) P ist ein projektiver Raum.